GEORGE PÓLYA

Descoperirea în matematică

TRADUCERE DE DUMITRU NEAGU

G. PÓLYA
MATHEMATICAL DISCOVERY

On understanding, learning, and teaching problem sloving
© 1962 & 1965 by John Wiley & Sons, INC.
New York

SUPRACOPERTA ŞI COPERTA DE DANA ŞUFANĂ

George Pólya

DESCOPERIREA ÎN MATEMATICĂ

Euristica rezolvării problemelor

Editura Ştiinţifică Bucureşti, 1971

Prefaţă

O metodă de rezolvare este perfectă dacă putem prevedea — şi chiar demonstra — încă de la început că, aplicînd acea metodă, ne vom atinge scopul.
Leibniz, *Opuscules et fragments inédits*, editate de L. Couturat

1. A rezolva o problemă înseamnă a găsi o ieşire dintr-o dificultate, înseamnă a găsi o cale de a ocoli un obstacol, de a atinge un obiectiv care nu este direct accesibil. A găsi soluţia unei probleme este o performanţă specifică inteligenţei, iar inteligenţa este apanajul distinctiv al speciei umane; se poate spune că, dintre toate îndeletnicirile omeneşti, cea de rezolvare a problemelor este cea mai caracteristică. Scopul acestei lucrări este să facă inteligibil mecanismul acestei activităţi să propună procedee de a învăţa pe alţii cum să reuşească în această activitate şi, eventual, să dezvolte îndemînarea cititorului în acest domeniu.

2. Lucrarea de faţă are două părţi; să caracterizăm pe scurt rolul fiecăreia din ele.

„A şti să rezolvi probleme" este o îndemînare practică — o deprindere — cum este înotul, schiul, sau cîntatul la pian, care se poate învăţa numai prin imitare şi exerciţiu. Această carte nu vă poate oferi o cheie magică care deschide toate uşile şi rezolvă toate problemele; în schimb, ea vă pune la dispoziţie o serie de exemple pe care le-aţi putea imita cu folos şi vă creează numeroase prilejuri de a vă exersa: dacă vreţi să învăţaţi înotul trebuie să intraţi în apă, iar dacă vreţi să învăţaţi să rezolvaţi probleme trebuie ... să rezolvaţi probleme.

Dacă vreţi să trageţi maximum de folos din efortul pe care-l depuneţi, străduiţi-vă să descoperiţi şi să reţineţi acele aspecte ale problemei examinate care v-ar putea fi utile în tratarea altor probleme.

O soluție pe care ați obținut-o prin propriile dv. eforturi, sau chiar una pe care numai ați citit-o, sau v-a fost relatată de altul, dar pe care ați urmărit-o cu interes real și i-ați pătruns înțelesul, poate deveni pentru dv. o *schemă*, un model pe care îl puteți imita cu folos cînd veți rezolva vreo problemă similară. Ei bine, scopul părții întîi este tocmai să vă familiarizeze cu cîteva scheme utile.

A rezolva o problemă imitînd metoda folosită la rezolvarea altei probleme poate fi o treabă mai ușoară — dacă problemele sînt foarte asemănătoare — sau mai grea, sau chiar imposibilă, — dacă asemănarea nu este prea mare. Oricum însă, există în ființa omenească o năzuință adînc înrădăcinată care o face să dorească mai mult: un procedeu general aplicabil și neîngrădit de nimic cu care să se poată rezolva toate problemele. În mulți din noi dorința aceasta poate rămîne latentă, dar ea este manifestă în unele basme și în scrierile cîtorva filozofi. Vă amintiți povestea despre cuvîntul magic care deschidea toate porțile. Descartes se gîndea la o metodă universală cu care să se rezolve toate problemele, iar Leibniz a formulat foarte clar ce anume înțelegea el printr-o metodă perfectă. Dar tentativele de a găsi o metodă universală și perfectă n-aveau să se bucure de mai mult succes decît căutarea pietrei filozofale, despre care se presupunea că ar transforma metalele ordinare în aur; există visuri grandioase sortite să rămînă visuri ... Și totuși asemenea idealuri inaccesibile îi pot înrîuri pe oameni: nimeni n-a ajuns la Steaua Polară, dar mulți și-au găsit calea cea bună privind într-acolo. Cartea aceasta nu vă poate oferi (și nici o carte nu va reuși vreodată să vă ofere) o metodă universală, perfectă, de rezolvare a problemelor; dar poate că și cîțiva pași mărunți spre un asemenea ideal inaccesibil v-ar putea ajuta să vă limpeziți ideile și să vă dezvoltați îndemînarea în rezolvarea problemelor. Partea a doua schițează, în linii mari, cîțiva asemenea pași.

3. Eu aș îndrăzni să numesc *euristică* studiul pe care lucrarea de față încearcă să-l întreprindă — studiul procedeelor și al metodelor de rezolvare a problemelor. Termenul acesta, care a fost folosit în trecut de o serie de filozofi, este astăzi pe jumătate uitat, pe jumătate discreditat; eu însă nu mă tem să-l folosesc.

De fapt, cea mai mare parte a lucrării de față prezintă euristica sub aspectul ei practic și nesofisticat: voi încerca, prin toate mijloacele de care dispun, să trezesc interesul cititorului pentru rezolvarea problemelor și să-l determin să reflecteze asupra procedeelor și metodelor pe care le utilizează în această activitate.

În majoritatea capitolelor care urmează, cea mai mare parte a textului este consacrată prezentării pe larg a rezolvării cîtorva probleme. Pentru matematicianul pe care nu-l preocupă aspectul metodologic expunerea poate părea exagerat de detaliată. Dar de fapt,

ceea ce se prezintă aici sînt nu atît simple rezolvări de probleme, cît *istoricul* cîtorva rezolvări. Într-un astfel de „dosar biografic" este descrisă înlănţuirea etapelor esenţiale care au dus, în cele din urmă, la descoperirea soluţiei, şi se încearcă să se dezvăluie raţiunile şi resorturile intime care au sugerat aceste etape. Scopul descrierii atît de amănunţit a unui caz particular este de a sugerea un procedeu mai general, sau o schemă, după care s-ar putea ghida cititorul în situaţii similare. De regulă, pentru formularea explicită a unor astfel de recomandări, sau a unor astfel de scheme, vor fi rezervate paragrafe speciale, însă unele formulări preliminare, cu caracter exploratoriu, vor putea fi întîlnite şi intercalate printre episoadele unui „dosar biografic".

Fiecare capitol este urmat de exemple şi comentarii. Cititorul care rezolvă problemele propuse are prilejul să aplice, să-şi clarifice şi să-şi completeze recomandările metodologice oferite în textul capitolului. Comentariile intercalate între exemple vin cu generalizări, punctează aspecte cu caracter mai tehnic sau de subtilitate sporită, sau, în fine, fac unele observaţii incidentale.

Nu ştiu cît de bine am reuşit, dar este sigur că m-am străduit să antrenez cititorul la o participare directă. Am încercat să menţionez în scris toate modalităţile de prezentare orală pe care le-am găsit cele mai eficiente în cursul activităţii mele didactice. Prezentînd istoricul unor rezolvări, am încercat să familiarizez cititorul cu atmosfera muncii de cercetare. Prin alegerea conţinutului, a formei de prezentare şi a succesiunii problemelor prezentate (formularea şi prezentarea într-o ordine adecvată sînt mult mai importante şi mi-au cerut mult mai multe strădanii decît şi-ar putea închipui un neiniţiat) am încercat să captivez atenţia cititorului, să-i trezesc curiozitatea şi spiritul de iniţiativă şi să-i creez largi posibilităţi de confruntare cu diferitele situaţii din munca de cercetare.

4. Cea mai mare parte a acestei cărţi se ocupă de probleme de matematică. Numai rareori este vorba explicit de probleme dinafara domeniului matematicii, dar ele sînt permanent prezentate în perspectiva expunerii. Problemelor de matematică le-am acordat, efectiv, cea mai mare atenţie şi am căutat să le tratez în aşa fel, încît procedeul ca atare să arunce lumină şi asupra modului de tratare a problemelor nematematice.

Majoritatea problemelor de matematică de care se ocupă această carte sînt elementare. Dar deşi referirile la problemele de matematică de nivel superior sînt rare, tocmai asemenea probleme sînt cele care m-au condus la conturarea materialului inclus în lucrare. În fapt, principala mea sursă de informaţie au constituit-o propriile mele cercetări, şi modul în care am abordat multe dintre problemele elemen-

tare reflectă propria mea experienţă în rezolvarea problemelor de nivel mai înalt, probleme care nu au putut fi incluse în acest volum.

5. Cartea de faţă îmbină obiectivul teoretic pe care şi l-a propus, studiul euristicii, cu preocuparea pentru rezolvarea unei sarcini concrete, urgente, practice: îmbunătăţirea pregătirii profesionale a profesorilor de matematică din învăţămîntul mediu.

Întreaga mea activitate didactică din ultimii cîţiva ani a fost consacrată pregătirii unor astfel de profesori, ceea ce a constituit o ocazie excelentă de a face observaţii şi de a-mi forma o opinie. Cred că sînt un observator relativ imparţial şi în această calitate opinia mea nu poate fi decît următoarea: *pregătirea profesională a profesorilor de matematică din învăţămîntul mediu este insuficientă.* Mai mult, cred că vinovate de această situaţie sînt toate forurile responsabile şi că dacă ele doresc să îndrepte situaţia prezentă, trebuie ca în special şcolile pedagogice şi catedrele de matematică din facultăţi să-şi revizuiască cu foarte multă atenţie programele de pregătire a viitorilor profesori.

Ce cursuri trebuie să ofere facultăţile viitorilor profesori de matematică? Nu se poate răspunde rezonabil la această întrebare dacă nu s-a răspuns mai întîi la o altă întrebare strîns legată de prima: *ce trebuie să ofere şcoala medie elevilor ei?*

Veţi spune, poate, că întrebarea aceasta nu ne ajută prea mult, fiindcă este prea controversată: pare imposibil să se dea un răspuns care să întrunească un consens suficient de larg. Din nefericire, lucrurile stau într-adevăr aşa: există însă măcar un aspect al acestei probleme asupra căruia experţii pot cădea de acord.

Cunoştinţele noastre asupra oricărui subiect constă din *informaţie* şi din *know-how* — „priceperea" de a utiliza informaţia. Dacă aveţi oarecare experienţă în cercetarea matematică de orice nivel, fie el elementar sau avansat — o experienţă autentică şi la care înţelegeţi să faceţi apel cu bună-credinţă — atunci în mintea dv. nu mai poate exista nici o îndoială că, în matematică, priceperea de a utiliza informaţia este mult mai importantă decît bagajul brut de informaţii. De aceea, în şcoala medie, ca şi la orice alt nivel de predare, pe lîngă un anumit bagaj de informaţii, elevului trebuie să i se inoculeze şi o anumită doză de *know-how.*

Ce înseamnă acest *know-how* în matematică? Înseamnă îndemînarea de a rezolva probleme — nu probleme de simplă rutină, ci probleme care cer un anumit grad de independenţă, de gîndire, de originalitate, de creativitate. De aceea, prima şi cea mai importantă îndatorire a şcolii medii în predarea matematicii este de a acorda atenţia cuvenită *metodologiei rezolvării problemelor.* Aceasta este convingerea mea; s-ar putea să nu fiţi complet de acord cu mine, dar presupun că veţi admite

totuşi că rezolvarea problemelor merită o oarecare atenţie — şi tocmai aceasta este ceea ce vom face aici.

Profesorul ar trebui să ştie, să cunoască temeinic ceea ce este chemat să înveţe pe alţii. El ar trebui să arate elevilor cum se rezolvă problemele — dar dacă el însuşi nu ştie, cum ar putea să arate altora? Profesorul ar trebui să dezvolte *know-how*-ul elevilor săi, priceperea lor de a folosi informaţia, abilitatea lor de a raţiona; el ar trebui să deceleze şi să încurajeze gîndirea creatoare — dar cursurile pe care le-a urmat n-au acordat decît prea puţină atenţie propriei lui măiestrii în ramura de specialitate şi practic nici o atenţie — propriului lui *know-how*, capacităţii lui de a raţiona, abilităţii lui de a rezolva probleme, gîndirii lui creatoare. Aceasta este, după părerea mea, lacuna cea mai gravă în pregătirea actuală a profesorilor de matematică din învăţămîntul mediu.

Pentru a umple această lacună, programul de pregătire a profesorilor ar trebui să găsească loc şi pentru *activitatea de creaţie la un nivel adecvat*. Am încercat să creez ocazii pentru o asemenea activitate, conducînd seminarii de rezolvare de probleme. Lucrarea de faţă conţine materialul pe care l-am strîns pentru aceste seminarii şi o serie de recomandări pentru utilizarea lui (vezi în lucrare *Recomandări pentru profesori şi pentru profesorii profesorilor* p. 375). Ea va contribui, sper, la îmbunătăţirea pregătirii profesorilor de matematică; în orice caz, acesta este scopul practic pe care şi l-a propus volumul de faţă.

Atenţia pe care am acordat-o permanent celor două scopuri menţionate, cel teoretic şi cel practic, cred că au făcut mai bună, mai utilă, cartea pe care am scris-o. Cred, de asemenea, că nu există nici un conflict între interesele diferitelor categorii de cititori potenţiali (unii preocupaţi de rezolvarea problemelor în general, alţii — de îmbunătăţirea propriei lor îndemînări, iar alţii—de îmbunătăţirea îndemînării elevilor lor). Ceea ce interesează o categorie de cititori are şanse considerabile să se dovedească de folos şi celorlalte categorii.

6. Lucrarea de faţă este o continuare a altor două lucrări, publicate anterior, *Cum rezolvăm o problemă?*[1] şi *Matematica şi raţionamentele plauzibile*[2]; aceasta din urmă are două volume, cu subtitluri distincte: *Inducţia şi analogia în matematică* (vol. I) şi *Scheme de inferenţe plauzibile* (vol. II). Cele trei cărţi se completează una pe alta, fără suprapuneri esenţiale. Se întîmplă, ce-i drept, ca o temă abordată într-o lucrare să fie reluată într-o alta, dar atunci tratarea este diferită: cititorului i se oferă alte exemple, alte detalii, sau alte aspecte. De

[1] Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1965.
[2] Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1962.

aceea, nu are nici o importanţă care din ele este citită mai întîi şi care, pe urmă.

Pentru uşurinţa cititorului, aceste trei lucrări vor fi comparate între ele şi pasajele corespondente vor fi trecute într-un index cumulativ, plasat la sfîrşitul acestei cărţi, *Descoperirea în matematică*.

7. Materialul lucrării de faţă este împărţit în două părţi intitulate *Scheme* şi, respectiv, *Spre o metodă generală*. Cele patru capitole ale Părţii întîi conţin mai multe probleme decît celelalte capitole. De fapt, Partea întîi seamănă, sub multe aspecte, cu culegerea de probleme de analiză întocmită de G. Szegő şi de autor (vezi Bibliografia). Există însă şi deosebiri evidente: problemele propuse în volumul de faţă sînt mult mai elementare, iar aspectele metodologice sînt nu numai sugerate, ci şi formulate explicit şi analizate.

Capitolul 2 al Părţii a doua este inspirat de o lucrare recentă a lui Werner Hartkopf (vezi Bibliografia). Eu însă prezint aici numai cîteva puncte din lucrarea lui Hartkopf, cele care mi s-au părut mai militante, şi le prezint în modul cel mai corespunzător concepţiei mele despre euristică — cu exemple adecvate şi observaţii suplimentare.

8. Comitetul pentru studii universitare de matematică (The Committee on the Undergraduate Program in Mathematics) a sprijinit pregătirea manuscrisului acestei lucrări din fondurile puse la dispoziţie de Fundaţia Ford. Ţin să le exprim mulţumirile mele; mulţumesc, de asemenea, Comitetului pentru sprijinul moral. Doresc, de asemenea, să mulţumesc editorului lui "Journal of Education of the Faculty and College of Education, Vancouver and Victoria", pentru permisiunea de a include, în lucrarea de faţă, părţi dintr-un articol. Mulţumesc, de asemenea, prof. Gerald Alexanderson (Santa Clara, California) şi prof. Alfred Aeppli (Zürich, Elveţia) pentru ajutorul eficient în corectarea şpalturilor.

GEORGE PÓLYA

Zürich
Decembrie 1961

Indicaţii şi recomandări pentru cititor

Referirea la paragraful 5 din capitolul 2 se face sub forma 2.5 ; la subparagraful (3) al paragrafului 5 din capitolul 2 — sub forma 2.5(3) ; la exemplul 61 din capitolul 3 — sub forma ex. 3.61.

*CRP** şi *MRP*** sînt abreviaţii pentru titlurile lucrărilor autorului care vor fi citate frecvent. Titlurile complete sînt date în Bibliografie.

†. Semnul † la începutul unui exemplu, comentariu, paragraf sau pasaj semnalează că acolo sînt necesare cunoştinţe mai avansate de matematică (vezi însă şi pasajul următor). Semnul † nu va fi totuşi folosit dacă pasajul respectiv este foarte scurt.

Cea mai mare parte a materialului din această carte nu face apel decît la cunoştinţe de matematică elementară, adică la geometrie, algebră, reprezentări grafice (folosirea coordonatelor) şi (uneori) la trigonometrie — la nivelul la care aceasta este (sau — ar trebui să fie) predată în şcoala medie.

Problemele propuse în această carte nu necesită decît rareori cunoştinţe peste nivelul celor de şcoală medie, însă în ceea ce priveşte dificultatea, ele sînt deseori ceva peste acest nivel. La unele probleme se dă (dar numai pe scurt) soluţia completă, la altele sînt indicate doar cîteva etape importante ale rezolvării, iar cîteodată nu este dat decît rezultatul.

---

* *Cum rezolvăm o problemă ?*, vezi Bibliografia.

** *Matematica şi raţionamentele plauzibile*, vezi Bibliografia.

La unele probleme enunțul este însoțit (între paranteze drepte) de scurte indicații menite să ușureze rezolvarea. Asemenea indicații pot fi însă sugerate și de problemele vecine. O deosebită atenție trebuie acordată părților introductive care preced exemplele (sau anumite grupuri de probleme) din unele capitole.

Cititorul care s-a străduit serios cu o problemă poate trage foloase din efortul său chiar și atunci cînd nu reușește să o rezolve singur; de pildă, el poate citi în carte numai o parte a rezolvării, căutînd să extragă de acolo vreo informație utilă, și după aceea, punînd cartea deoparte, poate încerca să elaboreze singur restul rezolvării.

Momentul cel mai potrivit pentru reflecții asupra metodologiei rezolvării este, probabil, imediat după ce cititorul a rezolvat singur o problemă, sau a citit în carte rezolvarea (sau istoricul rezolvării unei probleme). O dată încheiată etapa pe care și-a propus-o, și avînd încă proaspete în minte toate episoadele experienței trăite, cititorul — *examinînd retrospectiv* efortul depus — poate investiga cu maximum de folos natura dificultăților pe care le-a avut de întîmpinat. El își poate pune sie însuși multe întrebări utile: „Care a fost momentul hotărîtor? Care a fost dificultatea principală? Cum ar fi fost mai bine să procedeze? N-am reușit să sesizez un anumit aspect: ce detaliu din cunoștințele mele ar fi trebuit să-mi rememorez, ce modalitate de a gîndi ar fi trebuit să adopt ca să-l sesizez? Există aici vreun truc pe care ar fi bine să-l țin minte, vreun artificiu pe care l-aș putea folosi, data viitoare, într-o situație similară?" Toate aceste întrebări sînt utile, și pe lîngă ele există multe altele, dar întrebarea cea mai bună rămîne totuși cea care-ți vine spontan în minte.

Partea întîi

SCHEME

. . . , şi fiecare adevăr pe care îl găseam servindu-mi apoi drept regulă pentru găsirea altora, . . .

DESCARTES, *Discurs asupra metodei*, p. 50.

Cît despre mine, dacă am găsit pînă acum unele adevăruri în ştiinţe, (. . .), pot să spun că acestea nu sînt decît urmările şi dependenţele a cinci sau şase dificultăţi principale pe care le-am învins şi pe care le socotesc drept tot atîtea bătălii în care norocul a fost de partea mea.

DESCARTES, *op. cit.*, p. 94.

CAPITOLUL 1

Schema celor două locuri geometrice

1.1 CONSTRUCȚII GEOMETRICE

Desenarea (sau construirea) figurilor cu ajutorul riglei și compasului face parte, prin tradiție, din predarea geometriei plane. Dintre construcțiile de acest gen, cîteva — cele mai simple — sînt utilizate efectiv de desenatori, însă în rest, importanța lor practică este neglijabilă, și nici importanța lor teoretică nu este prea mare. Cu toate acestea, prezența acestei teme în programele de învățămînt este pe deplin justificată: construcțiile geometrice sînt cît se poate de potrivite pentru a familiariza începătorul cu figurile geometrice, și constituie un excelent pretext pentru a-l iniția în noțiunile de bază ale rezolvării problemelor. Și tocmai pentru acest din urmă motiv, vom începe prin a studia construcțiile geometrice.

Ca și multe alte teme tradiționale din predarea matematicii, construcțiile geometrice își au originea în opera lui Euclid, în al cărui sistem ele joacă un rol important. Prima problemă din *Elementele* lui Euclid — Propoziția întîi, Cartea I — cere să se construiască un triunghi echilateral pe un segment de dreaptă dat. În sistemul lui Euclid există un motiv puternic de a limita problema la cazul unui triunghi echilateral, însă rezolvarea este la fel de ușoară și în cazul următoarei probleme mai generale: „*Să se deseneze* (sau — să se construiască) — *un triunghi, cunoscînd cele trei laturi*".

Să ne ocupăm, un moment, de analiza acestei probleme.

În orice problemă trebuie să existe o *necunoscută* — dacă totul ar fi cunoscut, n-am avea nimic de căutat, nimic de rezolvat. În pro-

blema noastră, necunoscuta (adică ceea ce se cere, ceea ce se caută, aşa-numitul *quaesitum*) este o figură geometrică, un triunghi.

Pe de altă parte, în orice problemă trebuie să existe ceva care este cunoscut, ceva care este *dat* (elementele cunoscute vor fi numite *date*) — dacă nimic nu este dat, nu există nimic cu care am putea recunoaşte că am găsit ceea ce căutam: n-am putea face identificarea nici dacă am avea totul în faţa ochilor. În problema noastră, datele sînt trei „bucăţi" de dreaptă, trei segmente de dreaptă.

În fine, în orice problemă trebuie să existe o *condiţie* care stipulează în ce fel necunoscuta este legată de date. În problema noastră, condiţia precizează că cele trei segmente date trebuie să fie laturile triunghiului căutat.

Condiţia este o parte esenţială a problemei. Să comparăm problema noastră cu o alta: „Să se construiască triunghiul ale cărui înălţimi sînt date". În ambele probleme, datele sînt aceleaşi (trei segmente de dreaptă), iar necunoscuta este o figură geometrică de acelaşi tip (un triunghi). Însă legătura dintre necunoscută şi date este diferită — condiţia este diferită — şi, de aceea, problemele sînt complet distincte (problema noastră este mai uşoară).

Cititorul cunoaşte, desigur, rezolvarea problemei noastre. Să notăm cu a, b şi c lungimile celor trei segmente date. Trasăm segmentul a şi notăm cu B şi C capetele lui (desenaţi efectiv figura). Trasăm apoi două cercuri, unul cu centrul în C şi de rază b, celălalt cu centrul în B şi de rază c; fie A unul din punctele lor de intersecţie. ABC este triunghiul căutat.

1.2. DE LA EXEMPLU LA SCHEMĂ

Să revenim asupra rezolvării precedente şi să vedem ce trăsături caracteristice, relevante pentru procedeul de rezolvare, am putea extrage din ea, în speranţa că ele ne-ar putea fi utile în rezolvarea unor probleme similare.

Trasînd segmentul a, am şi fixat automat două din vîrfurile triunghiului căutat, vîrfurile B şi C; tot ce ne mai rămîne de găsit este un singur vîrf. În fapt, trasînd segmentul, noi am transformat problema propusă într-o alta, echivalentă cu problema iniţială, dar distinctă. În această nouă problemă

necunoscuta este un punct (al treilea vîrf al triunghiului căutat);
datele sînt două puncte (B şi C) şi două lungimi (b şi c);
condiţia stipulează că punctul căutat trebuie să fie la distanţa b de punctul dat C şi la distanţa c de punctul dat B.

Condiția constă din două părți, una referitoare la b și la C, cealaltă — la c și la B. *Să reținem numai o parte a condiției și să facem abstracție de cealaltă; în ce măsură este acum determinată necunoscuta; cum mai poate ea varia?* Un punct din plan care se află la o distanță dată, b, de un punct dat, C, nu este nici complet determinat, nici complet oarecare: libertatea lui de mișcare este limitată la un anumit „loc geometric"; punctul trebuie să se afle pe circumferința unui cerc cu centrul în C și de rază b, dar se poate mișca de-a lungul acestei circumferințe. Punctul necunoscut trebuie să se afle simultan pe două asemenea locuri geometrice și deci este la intersecția acestora.

Din toate acestea putem degaja o schemă („schema celor două locuri geometrice"), o schemă pe care o putem imita cu oarecare șansă de succes la rezolvarea altor probleme de construcții geometrice.

Mai întîi, reducem problema la construirea UNUI singur punct. După aceea, împărțim condiția în DOUĂ părți, în așa fel încît fiecare să determine cîte un loc geometric pentru punctul căutat; fiecare din aceste locuri geometrice trebuie să fie sau o dreaptă, sau un cerc.

Exemplele sînt însă mai bune decît preceptele — simpla enunțare a schemei nu vă poate fi de prea mare folos; în schimb, cu fiecare exemplu în care o veți aplica cu succes, schema va cîștiga în culoare și vi se va părea din ce în ce mai interesantă și mai valoroasă.

1.3. EXEMPLE

Aproape toate construcțiile geometrice intrate prin tradiție în programele de învățămînt ale școlilor medii sînt aplicații directe ale schemei celor două locuri geometrice.

(1) *Să se găsească cercul circumscris unui triunghi dat.* Vom reduce problema la construirea centrului cercului căutat. În problema astfel redusă

necunoscuta este un punct; să-l numim X; datele sînt trei puncte A, B și C;

condiția constă în egalitatea a trei distanțe:

$$XA = XB = XC.$$

Împărțim condiția în două părți:

Prima parte: $XA = XB$

A doua parte: $XA = XC$.

Fiecărei părți a condiției îi corespunde un loc geometric. Primul loc geometric este mediatoarea segmentului AB, al doilea mediatoarea lui AC. Punctul căutat este intersecția acestor drepte.

Am fi putut împărți condiția și în alt mod : prima parte, $XA = XB$; a doua parte, $XB = XC$. Aceasta ne-ar fi condus la altă construcție. Oare și rezultatul ar fi fost altul? Dacă nu — de ce?

(2) *Să se găsească cercul înscris într-un triunghi dat.* Vom reduce problema la construirea centrului cercului căutat. În problema astfel redusă

necunoscuta este un punct ; să-l numim X ;
datele sînt trei drepte (infinite) a, b și c ;
condiția cere ca punctul X să fie la aceeași distanță (măsurată pe perpendiculară) de toate cele trei drepte date.

Împărțim condiția în două părți :

Prima parte : X este echidistant de dreptele a și b.
A doua parte : X este echidistant de dreptele a și c.

Locul geometric al punctelor care satisfac prima parte a condiției constă din două drepte perpendiculare una pe alta : bisectoarele unghiurilor formate de a și b. Al doilea loc geometric are o configurație similară. Cele două locuri geometrice au patru puncte de intersecție : pe lîngă centrul cercului înscris, obținem simultan și centrele celor trei cercuri exînscrise.

Se remarcă că această aplicație impune o ușoară modificare a descrierii în cuvinte a schemei, dată la sfîrșitul lui 1.2. În ce constă modificarea?

(3) *Fiind date două drepte paralele și un punct între ele, să se traseze cercul care este tangent la ambele drepte și trece prin punctul dat.* Dacă reprezentăm figura căutată (ne ajută mult s-o avem pe hîrtie), observăm imediat că *putem rezolva ușor o parte a problemei* : distanța dintre cele două drepte date este, evident, diametrul cercului căutat, iar jumătatea acestei distanțe este raza cercului.

Vom reduce problema la găsirea centrului X al cercului căutat.

Cunoscînd raza — s-o notăm cu r — vom împărți condiția în felul următor :

Prima parte : punctul X este la distanța r de punctul dat.
A doua parte : punctul X este la distanța r de ambele linii.

Prima parte a condiției dă un cerc, a doua parte — o dreaptă paralelă cu dreptele date și echidistantă față de ele.

Dacă n-am fi sesizat că raza cercului căutat poate fi determinată imediat, am fi putut împărți condiția în felul următor :

Prima parte : punctul X este la aceeași distanță de punctul dat și de prima dintre dreptele date.
A doua parte : punctul X este la aceeași distanță de punctul dat și de-a doua dintre dreptele date.

Această împărțire a condiției în două părți este inatacabilă din punct de vedere logic, însă, din păcate, este inutilă ; locurile geometrice corespunzătoare sînt *parabole* ; nu le putem trasa cu rigla și compasul — or, în schema noastră se stipulează, ca un element esențial, că locurile geometrice obținute trebuie să fie sau cercuri, sau drepte.

Acest exemplu contribuie, cred, la o mai bună înțelegere a schemei celor două locuri geometrice : schema este utilă în multe cazuri, dar nu în toate, așa cum rezultă imediat din contraexemple bine alese

1.4. SĂ NE IMAGINĂM CĂ PROBLEMA A FOST DEJA REZOLVATĂ

A visa înseamnă a-ți imagina lucruri agreabile pe care nu le ai. Un om flămînd, care nu avea decît o bucată de pîine uscată, își spunea : „Dacă aș avea puțină șuncă, mi-aș putea face niște ouă cu șuncă — dacă aș avea cîteva ouă".

Mulți spun că a visa nu-i bine. Să nu-i credeți — aceasta nu-i decît una din erorile de largă circulație. Ce-i drept, visarea poate fi și ceva rău, așa cum prea multă sare în supă — strică și cum nici usturoiul nu-i bun — nici chiar ca miros — în prăjitura cu ciocolată. Vreau să spun că visarea poate fi și ceva rău — dacă întrece măsura sau dacă nu intervine la momentul potrivit, dar că visarea ca atare este ceva bun și ne poate fi de mare ajutor în viață și în rezolvarea problemelor. Visînd la șuncă și la ouă, sărmanul înfometat găsea, probabil, că pîinea lui uscată este mai gustoasă și poate că și de digerat o digerea mai bine. Să ne ocupăm însă de problema următoare (vezi fig. 1.1).

Fiind date trei puncte, A, B și C, să se traseze dreapta care intersectează pe AC în punctul X și pe BC în punctul Y, astfel încît să aibă loc egalitatea

$$AX = XY = YB.$$

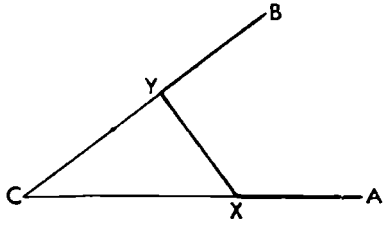


Fig. 1.1. Necunoscuta, datele, condiția

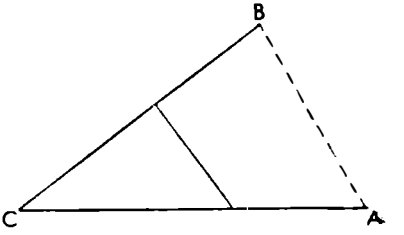


Fig. 1.2. Lucrăm „ascendent" (pornim de la date)

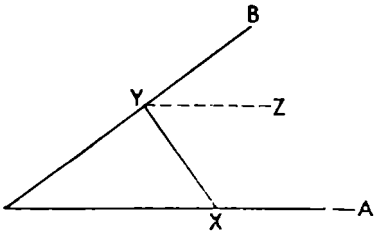


Fig. 1.3. Lucrăm „descendent" (pornim de la necunoscută)

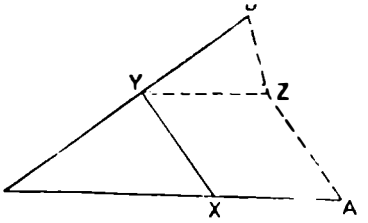


Fig. 1.4. Contacte cu cunoştinţe anterioare

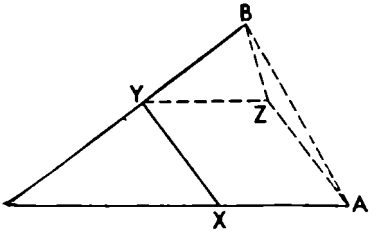


Fig. 1.5. Suprapunerea

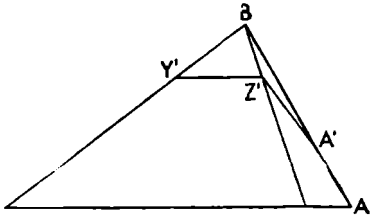


Fig. 1.6. Un „punct de sprijin"

Să ne imaginăm că am cunoaşte poziţia unuia din cele două puncte X şi Y (acesta este „visul" !). În cazul acesta, am putea găsi foarte uşor celălalt punct — ducînd o mediatoare. Necazul este însă că nu cunoaştem nici unul din puncte — problema nu pare uşoară.

Să ne mai permitem însă un dram de visare şi *să considerăm că problema a fost deja rezolvată.* Cu alte cuvinte, să presupunem că fig. 1.1 a fost desenată conform stipulaţiilor condiţiei problemei noastre, aşa că cele trei segmente ale liniei frînte $AXYB$ sînt riguros egale. Procedînd în felul acesta, ne-am imaginat un lucru agreabil, pe care încă nu-l avem; ne-am imaginat că am găsit poziţia căutată a dreptei XY; în fapt, ne-am imaginat că *am găsit soluţia.*

Este însă foarte bine să avem sub ochi fig. 1.1. Ea ne arată toate elementele geometrice pe care ar trebui să le examinăm — elementele pe care le avem şi elementele pe care le căutăm, datele şi necunoscuta — reunite aşa cum stipulează condiţia. Cu desenul în faţă, putem specula după voie în legătură cu elementele utile pe care le-am putea construi pornind de la date şi cu elementele pe care le-am putea folosi pentru a construi necunoscuta. Putem porni de la date, lucrînd „ascendent", adică mergînd „înainte" (spre rezolvare), sau putem porni

de la necunoscută, lucrînd „descendent", adică mergînd „înapoi" (spre date) — uneori şi căile ocolite pot fi instructive.

Oare n-am putea îmbina coerent măcar cîteva din piesele acestui mozaic răvăşit? *Oare n-am putea rezolva măcar o parte (oarecare) a problemei*? În fig. 1.1 există un triunghi — ΔXCY. Oare nu l-am putea construi? Pentru aceasta ne-ar trebui însă trei date şi, din nefericire, avem numai una (unghiul din C).

Să ne folosim atunci de ceea ce avem — nu putem folosi ceva ce nu avem. *Oare din datele problemei n-am putea deduce ceva util*? Ce-i drept, este uşor să unim între ele punctele date A şi B, şi linia de legătură s-ar putea să aibă ceva şanse de a ne fi de folos; s-o desenăm (fig. 1.2); dar nu este prea uşor de văzut *în ce fel* dreapta AB ne-ar putea fi utilă. Ce-ar fi să renunţăm la ea?

Fig. 1.1. pare prea goală. Aproape că nu încape nici o îndoială că pentru construcţia căutată va fi nevoie de mai multe linii — întrebarea este însă: care anume?

Segmentele AX, XY şi YB sînt egale (aşa le considerăm noi — după cum am spus, ne permitem să visăm!); poziţia lor relativă este însă teribil de stîngace — nişte segmente egale pot fi aranjate în aşa fel încît să formeze figuri mult mai simpatice. Poate că ar trebui să adăugăm şi alte segmente egale, sau, pentru început, măcar încă un segment.

Şansa, sau inspiraţia, ne-ar putea „sufla" să introducem în desen un segment care, judecînd după aparenţe, vine „ca turnat" în contextul care ne interesează: să deducem segmentul YZ egal şi paralel cu XA (vezi fig. 1.3). (Ceea ce facem noi acum constă în aceea că pornim de la necunoscuta căutată — continuăm să visăm — şi încercăm să mergem înapoi spre date.)

Introducerea segmentului YZ n-a însemnat decît o simplă tentativă. Dar segmentul acesta nu arată de loc rău: el ne readuce în ambianţa unor figuri familiare. Să unim pe Z cu A şi cu B (vezi fig. 1.4); obţinem rombul $XAZY$ şi triunghiul isoscel BYZ. *Oare n-am putea acum rezolva măcar o parte a problemei*? N-am putea oare construi triunghiul BYZ? Pentru un triunghi isoscel avem nevoie de două date, şi, din nefericire, nu dispunem decît de una (unghiul din Y este egal cu unghiul din C, care este dat). Totuşi, dispunem de ceva în legătură cu acest triunghi. Deşi nu-l cunoaştem în întregime, nu cunoaştem exhaustiv triunghiul BYZ, îi cunoaştem forma; deşi nu-i cunoaştem dimensiunile, putem construi un triunghi asemenea lui.

Aceasta poate că ne apropie un pic de rezolvare, dar rezolvarea ca atare încă n-am găsit-o; trebuie să încercăm şi altfel. Mai devreme sau mai tîrziu, ne vom aminti, probabil, de o tentativă precedentă, fig. 1.2. Cum am putea combina această figură cu ultima noastră

remarcă? Suprapunînd fig. 1.2 şi fig. 1.4, obţinem fig. 1 5, în care apare un nou triunghi, $\Delta\, BZA$. Oare nu l-am putea construi efectiv? Ba da — dacă am cunoaşte ΔBYZ; în acest caz favorabil, am putea lega între ele trei date; două laturi — ZB şi $ZA = ZY$ — şi unghiul din B. Da — dar noi nu cunoaştem ΔBZA; în orice caz nu-l cunoaştem complet, cunoaştem numai forma lui. Dar atunci, putem ...

Putem construi patrulaterul $BY'Z'A'$ (vezi fig. 1.6) asemenea cu patrulaterul $BYZA$ din fig. 1.5, care este o parte esenţială a configuraţiei căutate. Iată ceva care s-ar putea să ne servească drept punct de sprijin!

1.5. SCHEMA FIGURILOR ASEMENEA

Să realizăm efectiv construcţia ale cărei etape sînt ilustrate de seria de figuri 1.1 — 1.6.

Pe dreapta dată BC (vezi fig. 1.6) alegem (la întîmplare, dar nu prea departe de B) un punct Y'. Trasăm segmentul $Y'Z'$ paralel cu CA, în aşa fel încît

$$Y'Z' = Y'B.$$

După aceea, determinăm un punct A' pe AB, astfel încît

$$A'Z' = Y'Z'.$$

Ducem prin A o paralelă la $A'Z'$ şi îi determinăm intersecţia cu prelungirea segmentului BZ': această intersecţie este tocmai punctul căutat, Z. Restul este uşor.

Cele două patrulatere $AZYB$ şi $A'Z'Y'B$ sînt nu numai asemenea, ci şi „asemenea ca poziţie" (omotetice). Punctul B este centrul lor de omotetie; aceasta înseamnă că orice dreaptă care uneşte puncte corespondente pe cele două figuri, trece prin B.

Aici putem face o remarcă de metodologie din care putem învăţa ceva în legătură cu rezolvarea problemelor; dintre cele două figuri asemenea, cea care ne-a apărut prima în cursul raţionamentului, $AZYB$, este cea care, de fapt, a fost construită ultima[1].

---

[1] În acest „dosar biografic" căruia tocmai i-am terminat de parcurs ultimile rînduri (l-am început în 1.4), momentul cel mai important a fost acela în care ne-am hotărît „să ne imaginăm că problema a fost deja rezolvată". Pentru alte observaţii în legătură cu aceasta, vezi *CRP*, „Figurile", (2), pp.102—103 şi „Pappus", pp.141—148, în special pp.146—147.

Exemplul precedent sugerează o schemă generală: *Dacă nu puteți construi figura căutată, gîndiți-vă la posibilitatea de a construi o figură ASEMENEA cu cea căutată.*

Veți găsi, la sfîrșitul acestui capitol, o serie de exemple care — dacă le veți rezolva — vă vor convinge, cred eu, de utilitatea acestei scheme a „figurilor asemenea".

1.6. EXEMPLE

Exemplele care urmează diferă între ele sub mai multe aspecte; însă tocmai aceste diferențe vor scoate mai clar în evidență elementul comun pe care vrem să-l degajăm.

(1) *Să se ducă tangentele comune la două cercuri date.* Poziția relativă a cercurilor este dată (cercurile sînt desenate pe hîrtie și sînt determinate prin aceea că cunoaștem centrele și razele lor). Vrem să trasăm dreptele care ating ambele cercuri în cîte un punct și numai în unul. Dacă cercurile nu se întretaie, ele au patru tangente comune, două exterioare și două interioare. Să ne concentrăm atenția asupra tangentelor comune exterioare (vezi fig. 1.7), care există totdeauna — cu excepția cazului în care unul din cercurile date este situat, în întregime, în interiorul celuilalt.

Dacă nu putem rezolva problema propusă, să căutăm o problemă înrudită, adecvată situației, dar mai accesibilă. Există o problemă evident înrudită (pe care presupunem că cititorul știe să o rezolve): dintr-un punct exterior, dat, să se ducă tangentele la un cerc dat. Această problemă este, de fapt, un caz limită sau un *caz extrem* al problemei propuse: unul din cercuri s-a contractat pînă s-a redus la un punct. La acest caz extrem ajungem în modul cel mai firesc *prin variera continuă a datelor.* Putem însă varia datele în foarte multe feluri: putem micșora una din raze lăsînd-o pe cealaltă neschimbată, putem micșora o rază mărind-o în același timp pe cealaltă, sau putem micșora ambele raze. Mergînd pe ideea aceasta, ne poate veni în minte să facem ambele raze să se micșoreze uniform, *cu aceeași viteză*, astfel încît, în fiecare interval de timp, ambele raze să se micșoreze cu aceeași lungime. Dacă reprezentăm pe hîrtie această modificare continuă, putem remarca ușor că

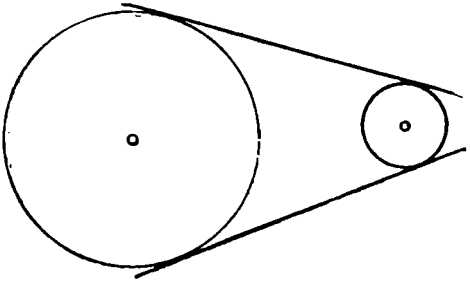


Fig. 1.7. Necunoscuta, datele, condiția

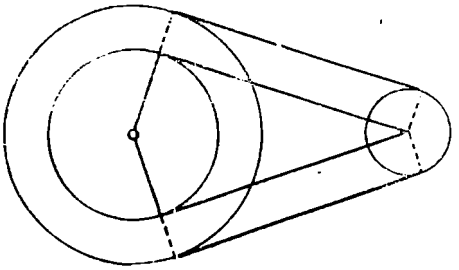


Fig.1.8. Un „punct de sprijin"

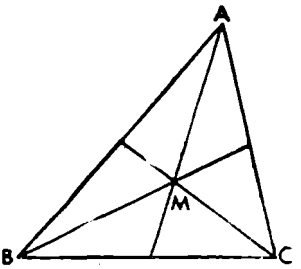


Fig. 1.9. Necunoscuta, datele, condiția

fiecare din tangentele comune se deplasează rămînînd tot timpul paralelă cu ea însăşi, pînă ce, în cele din urmă, apare fig. 1.8 — şi iată şi soluţia: din centrul cercului mai mic care ne-a fost dat, ducem tangentele la un nou cerc, care este concentric cu cercul mai mare şi are raza egală cu diferenţa celor două raze date. Folosim figura astfel obţinută drept punct de sprijin: saltul de aici la figura căutată este uşor (nu mai rămîne decît să construim două dreptunghiuri).

(2) *Să se construiască un triunghi, cunoscînd lungimile celor trei mediane.* „Ne imaginăm că problema a fost deja rezolvată"; cu alte cuvinte, desenăm triunghiul (căutat) în care cele trei mediane (date) se asamblează aşa cum cere problema (vezi fig. 1.9). Trebuie acum să ne amintim că cele trei mediane ale unui triunghi sînt concurente, şi anume trec toate printr-un acelaşi punct (punctul M din fig. 1.9, centrul de greutate al triunghiului) care împarte fiecare mediană în raportul 1:2. Pentru a pune în evidenţă acest fapt esenţial, să marcăm pe figură mijlocul D al segmentului AM; punctele D şi M împart mediana AE în trei părţi egale (vezi fig. 1.10).

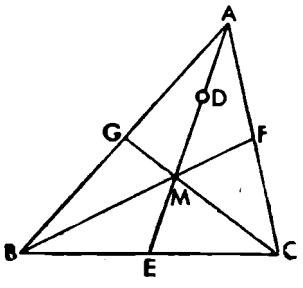


Fig. 1.10. Un punct „însetat" de ... relaţii

Triunghiul căutat se împarte atunci în şase triunghiuri mai mici. *Oare n-am putea rezolva măcar o parte a problemei?* Pentru a construi unul din aceste triunghiuri mici avem nevoie de trei date; în fapt, noi nu cunoaştem decît două laturi: o latură este o treime dintr-una din medianele date, iar cealaltă este două treimi dintr-o altă mediană dată, dar nu vedem care ar putea fi un al treilea element cunoscut. Oare n-am putea introduce vreun alt triunghi, cu toate trei datele cunoscute? Pe fig. 1.10

există un punct, punctul D, care, evident, arde de dorința de a intra și el în joc, de a avea mai multe „relații" — dacă îl unim cu un punct vecin, putem pune în evidență un triunghi, de pildă $\Delta\, MDG$, ale cărui laturi sînt, fiecare în parte, o treime a cîte unei mediane, așa că triunghiul poate fi construit efectiv, fiindcă îi cunoaștem toate cele trei laturi — iată punctul de sprijin! Restul este ușor.

(3) Fiecărei probleme referitoare la triunghiurile obișnuite îi corespunde o problemă referitoare la triunghiurile sferice, sau la triedre. (Un triedru, sau un unghi triedru, este porțiunea de spațiu cuprinsă între trei plane neparalele; o sferă cu centrul în vîrful triedrului intersectează triedrul după un triunghi sferic.) Aceste probleme de geometrie în spațiu pot fi reduse la probleme de geometrie plană. Reducerea problemelor cu figuri spațiale la reprezentări — desene — în plan constituie obiectul *geometriei descriptive*, o ramură interesantă a geometriei, indispensabilă inginerilor și arhitecților pentru reprezentarea corectă pe planșe a mașinilor, navelor, clădirilor etc.

Cititorul nu va avea însă nevoie de cunoștințe de geometrie descriptivă — ci doar de puțină geometrie în spațiu și de un dram de judecată — pentru a rezolva următoarea problemă: *Fiind date cele trei unghiuri ale fețelor unui unghi triedru, să se construiască unghiurile lui diedre.*

Fie a, b și c unghiurile fețelor triedrului (ele sînt tocmai laturile triunghiului sferic corespunzător) iar α — unghiul diedru opus fetei a (α este un unghi al triunghiului sferic). Cunoscînd pe a, b și c, vrem să construim unghiul α. (Cu exact aceeași metodă vom putea construi toate cele trei unghiuri diedre, și tocmai de aceea nu ne vom ocupa decît de unul din ele, de unghiul α.)

Pentru a ne reprezenta vizual *datele*, punem pur și simplu unul lîngă altul cele trei unghiuri a, b și c, în planul hîrtiei (vezi fig. 1.11). Pentru a ne reprezenta *necunoscuta*, trebuie însă să „vedem" configurația în spațiu. (Copiați fig. 1.11 pe un carton, zgîriați ușor semidreapta dintre a și b precum și pe cea dintre a și c, apoi îndoiți cartonul în lungul zgîrieturilor, pentru a forma triedrul.) În fig. 1.12. unghiul triedru este reprezentat în perspectivă; A este un punct ales la întîmplare pe muchia opusă fetei a; două perpendiculare pe această muchie duse prin punctul A, una cuprinsă în fața b, iar cealaltă — în fața c, cuprind între ele unghiul α pe care căutăm să-l construim.

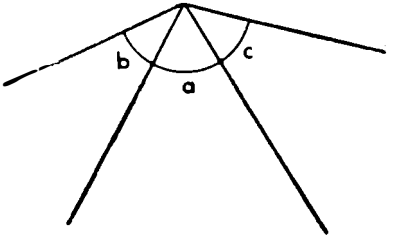


Fig. 1.11. Datele

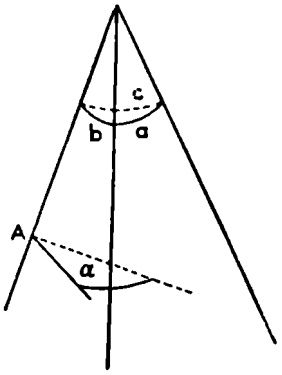


Fig. 1.12. Necunoscuta

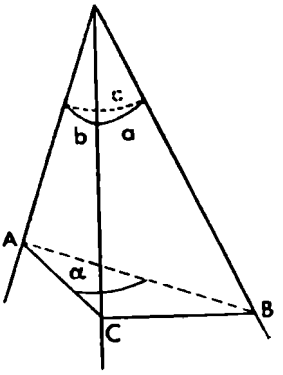


Fig. 1.13. Ceva de genul unui punct de sprijin

Să examinăm necunoscuta! — Ea este un unghi, unghiul α din fig. 1.12.

Ce-am putea face pentru a obține o necunoscută de acest tip? — Aproape totdeauna cînd a fost vorba să determinăm un unghi, am pornit de la un triunghi.

Există vreun triunghi în figura noastră? — Nu, dar putem introduce unul.

Într-adevăr, există un mod aproape evident de a introduce aici un triunghi: planul care conține unghiul α intersectează triedrul după un triunghi (vezi fig. 1.13). Acest triunghi s-ar putea să fie o figură auxiliară foarte promițătoare, ceva de genul unui punct de sprijin.

De fapt, soluția nu este prea departe. Să ne întoarcem la figura în plan (fig. 1.11), în care datele — unghiurile a, b și c — apar în mărimea lor reală. (Dezdoim modelul de carton pe care l-am construit cînd am trecut de la fig 1.11 la fig. 1.12.). Punctul A apare de două ori, în A_1 și în A_2 (dezdoind cartonul, am separat fețele b și c care, în spațiu, erau adiacente). Aceste puncte A_1 și A_2 sînt la distanțe egale de vîrful V. Perpendiculara în A_1 pe A_1V întîlnește cealaltă latură a unghiului b în punctul C, iar punctul B se obține în mod analog (vezi fig. 1.14). Acum cunoaștem A_2B, BC și CA_1 cele trei laturi ale triunghiului auxiliar introdus în fig. 1.13, așa că îl putem construi fără dificultate (cu linii punctate, pe fig 1.14): el conține unghiul căutat α.

Problema pe care tocmai am discutat-o este analogă cu problema cea mai simplă pe care ne-o putem imagina în legătură cu triunghiurile obișnuite, și de care ne-am ocupat în 1.1; mai mult, ea folosește și

aceeaşi metodă de construire a soluţiei. S-ar cuveni să vedem în aceasta un fel de act de dreptate făcut procedeului prin analogie şi o sugestie indirectă despre utilitatea acestui procedeu.

1.7. SCHEMA FIGURILOR AUXILIARE

Să revenim asupra problemelor discutate în 1.6. Ele au fost foarte diferite, şi tot diferite au fost şi procedeele de rezolvare folosite — cu excepţia unui fapt, şi anume că în fiecare caz, cheia rezolvării a constituit-o o *figură auxiliară*: un cerc cu două tangente duse dintr-un punct exterior — problema (1); un triunghi mai mic extras din triunghiul căutat — problema (2); un alt triunghi — problema (3). În fiecare caz în parte, ne-a fost uşor să construim figura auxiliară pornind de la date, şi o dată în posesia acestei figuri, ne-a fost uşor să construim figura cerută iniţial, folosind-o pe cea auxiliară. Aşadar, ne-am atins scopul urmărit în două etape, figura auxiliară fiind pentru noi un fel de punct de sprijin la mijlocul drumului: „descoperirea" ei a constituit performanţa decisivă, punctul culminant al străduinţilor noastre. Din toate acestea putem degaja o schemă — *schema figurilor auxiliare* — care este destul de promiţătoare şi pe care o putem descrie în felul următor: *încercaţi să descoperiţi vreo parte a figurii căutate sau vreo FIGURĂ STRÎNS LEGATĂ DE EA, pe care o puteţi construi efectiv şi pe care o puteţi folosi apoi drept punct de sprijin în construirea figurii iniţiale.*

Această schemă este foarte generală. De fapt, schema figurilor asemenea enunţată în 1.5 nu este altceva decît un caz particular al acesteia: o figură asemenea cu figura căutată este o figură legată de aceasta din urmă într-un mod cu totul particular, şi tocmai de aceea poate servi drept figură auxiliară deosebit de uşor de mînuit.

Datorită însă generalităţii ei mai mari, schema figurilor auxiliare este — şi aceasta, în mod inevitabil — mai puţin concretă, mai puţin tangibilă; ea nu face nici o recomandare specifică despre tipul de figură (auxiliară) pe care ar trebui s-o căutăm. Bineînţeles, experienţa acumulată ne poate da unele indicaţii directoare (dar nu şi reguli rigide

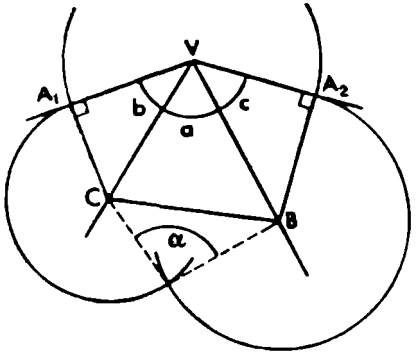


Fig. 1.14. Soluţia

şi expeditive): trebuie să căutăm figuri uşor de „extras" din figura căutată, figuri „simple" (de pildă, triunghiuri), cazuri-limită etc. Mai putem învăţa şi diferite procedee, cum ar fi varierea datelor, sau raţionamentul prin analogie, care, şi ele, ne pot indica, în unele cazuri, o figură auxiliară adecvată.

Am pus în evidenţă pînă acum trei scheme diferite la care putem recurge cînd avem de-a face cu probleme de construcţii geometrice. Schema *figurilor auxiliare* ne lasă mai multă libertate de alegere, dar ne propune un obiectiv mai puţin clar definit decît o face schema *figurilor asemenea.* Cea mai simplă este schema celor *două locuri geometrice* şi tocmai de aceea este bine să începeţi cu ea, fiindcă, în majoritatea cazurilor, cel mai bun lucru este să încerci în primul rînd procedeul cel mai simplu. Nu vă angajaţi însă mai mult decît este necesar, păstraţi-vă libertatea de opţiune: consideraţi problema gata rezolvată, desenaţi o figură în care *necunoscuta* şi *datele* sînt reunite în mod adecvat — cu toate elementele la locurile cuvenite, cu toate părţile corelate prin relaţiile corecte, aşa cum cere *condiţia.* Studiaţi, după aceea, această figură — încercaţi să identificaţi în ea vreo configuraţie familiară, căutaţi să vă reamintiţi toate cunoştinţele pertinente pe care le-aţi putea avea (probleme înrudite, teoreme aplicabile în cazul dat), străduiţi-vă să sesizaţi vreo conjunctură favorabilă (de pildă, o parte mai accesibilă a figurii). S-ar putea să aveţi şi un pic de şansă — privind figura să vă vină o idee strălucită, care să vă sugereze o linie auxiliară adecvată, sau vreo schemă foarte potrivită, sau vreo altă decizie utilă.

EXEMPLE ŞI COMENTARII LA CAPITOLUL 1

1.1. Care este locul geometric al unui punct variabil care se află la o distanţă dată de un punct dat?

1.2. Care este locul geometric al unui punct variabil care se află la o distanţă dată de o dreaptă dată?

1.3. Un punct variabil rămîne tot timpul echidistant faţă de două puncte date; care este locul lui geometric?

1.4. Un punct variabil rămîne tot timpul echidistant faţă de două drepte paralele, date; care este locul lui geometric?

1.5. Un punct variabil rămîne tot timpul echidistant faţă de două drepte date care se intersectează; care este locul lui geometric?

1.6. Într-un triunghi sînt date două vîrfuri, A și B, și unghiul γ, opus laturii AB; triunghiul nu este însă determinat, fiindcă al treilea vîrf (cel al unghiului γ) poate varia. Care este locul geometric al acestui al treilea vîrf?

1.7. *Notații.* Cînd este vorba de un triunghi, este comod să se folosească următoarele notații:

A, B, C vîrfurile
a, b, c laturile
α, β, γ unghiurile
h_a, h_b, h_c înălțimile
m_a, m_b, m_c medianele
d_α, d_β, d_γ bisectoarele unghiurilor
R raza cercului circumscris
r raza cercului înscris

În acest sistem de notații se subînțelege că latura a este opusă unghiului α, al cărui vîrf este punctul A, care este extremitatea comună a celor trei segmente h_a, m_a și d_α. Conform unei convenții curente, a reprezintă atît latura ca atare (un segment de dreaptă), cît și lungimea laturii; cititorul trebuie să deducă din context sensul în care este folosit simbolul. Aceeași ambiguitate este inerentă și în ceea ce privește simbolurile b, c, h_a, ..., d_γ, R, r. Vom respecta această convenție, cu toate că ea nu este în afară de orice critică.

Enunțul „[Să se construiască] triunghiul determinat de a, b, c" subînțelege, evident, că se cere „să se construiască triunghiul ale cărui laturi a, b și c sînt date". De remarcat că problema aceasta se poate să nu aibă soluție (figura care satisface condiția propusă se poate să nu existe), dacă datele sînt nepotrivit alese; de exemplu, dacă $a > b + c$, nu există nici un triunghi cu laturile a, b și c. Este bine, de aceea, să se încerce mai întîi rezolvarea problemei cu date pentru care este foarte probabil ca soluția să existe.

1.8. Triunghiul determinat de a, b, m_a.

1.9. Triunghiul determinat de a, h_a, m_a.

1.10. Triunghiul determinat de a, h_a, α.

1.11. Triunghiul determinat de a, m_a, α.

1.12. Fiind date trei drepte (infinite), să se construiască cercul tangent la două din ele și cu centrul pe a treia dreaptă.

1.13. Fiind date două drepte infinite care se intersectează și un segment de lungime r, să se construiască un cerc de rază r, tangent la cele două drepte.

1.14. Să se construiască un cerc de rază dată, care trece printr-un punct dat și este tangent la o dreaptă dată.

1.15. De pe o navă se văd *trei faruri*; pozițiile lor pe hartă sînt cunoscute, iar unghiurile dintre razele de lumină care vin de la ele au fost măsurate. Determinați pe hartă poziția navei.

1.16. În interiorul unui cerc dat, să se traseze trei cercuri egale, în așa fel încît fiecare din ele să fie tangent la celelalte două și la cercul dat. (Această figură apare uneori în arhitectura gotică, dar mai frecvente în aceste construcții sînt totuși figurile analoge cu cinci, sau cu șase cercuri interioare.)

1.17. În interiorul unui triunghi dat, să se găsească un punct din care toate cele trei laturi sînt văzute sub un același unghi.

1.18. Să se împartă în trei părți egale aria unui triunghi.

Aceasta înseamnă că trebuie determinat un punct X în interiorul triunghiului ABC dat, în așa fel încît triunghiurile XBC, XCA și XAB să aibă arii egale.

Rețineți numai o parte a condiției și faceți abstracție de rest: dacă se presupune că numai două din triunghiuri, ΔXCA și ΔXCB, sînt egale, care este locul geometric al punctului X? Răspunsul la această întrebare v-ar putea sugera o cale de rezolvare, dar există și alte moduri de a aborda problema.

1.19. Triunghiul determinat de a, α, r.

Rețineți numai o parte a condiției și faceți abstracție de rest: ignorați valoarea r, dar țineți seama de a și α; care este locul geometric al centrului cercului înscris?

1.20. Să se construiască triunghiul a, h_b, c.

1.21. Triunghiul determinat de a, h_b, d_γ.

1.22. Triunghiul determinat de a, h_b, h_c.

1.23. Triunghiul determinat de h_a, h_b, β.

1.24. Triunghiul determinat de h_a, β, γ.

1.25. Triunghiul determinat de h_a, d_α, α.

1.26. Să se construiască un paralelogram, cunoscînd o latură și cele două diagonale.

1.27. Să se construiască un trapez, cunoscînd cele patru laturi a, b, c și d; a și c sînt laturile paralele.

1.28. Să se construiască un patrulater cunoscînd cele patru laturi a, b, c și d, și unghiul ε cuprins între laturile opuse, a și c.

1.29. Triunghiul determinat de a, $b + c$, α.

[Nu uitați să introduceți în figură *toate datele*. Care este „locul potrivit" pentru $b + c$?]

1.30. Triunghiul determinat de a, $b + c$, $\beta - \gamma$.

1.31. Triunghiul determinat de $a + b + c$, h_a, α.

[O remarcă de simetrie: b și c (care nu sînt date) joacă roluri intervertibile.]

1.32. Fiind date două cercuri exterioare unul altuia, să se construiască tangentele comune interioare. (O tangentă comună este „exterioară" dacă cele două cercuri sînt situate într-un același semiplan determinat de această tangentă, și este „interioară" dacă cele două cercuri sînt situate în semiplane diferite.)

1.33. Fiind date trei cercuri egale, să se construiască cercul tangent celor trei cercuri, și care le conține.

1.34. Triunghiul determint de α, β, d_γ.

1.35. Să se înscrie un pătrat într-un triunghi dreptunghic dat. Se cere ca unul din colțurile pătratului să coincidă cu vîrful unghiului drept al triunghiului, colțul opus să fie pe ipotenuză, iar celelalte două — cîte unul pe cele două laturi ale unghiului drept.

1.36. Să se înscrie un pătrat într-un triunghi ABC dat, în așa fel încît două din vîrfurile lui să fie pe AB, unul pe AC și unul pe BC.

1.37. Să se înscrie un pătrat într-un sector de cerc dat, în așa fel încît două vîrfuri ale pătratului să fie pe arcul de cerc, iar celelalte două — cîte unul pe cele două laturi ale unghiului la centru al sectorului.

1.38. Să se construiască un cerc, cunoscînd două din punctele lui și dreapta la care este tangent.

1.39. Să se construiască un cerc, cunoscînd unul din punctele lui și două drepte la care este tangent.

1.40. Să se construiască un pentagon în care se poate înscrie un cerc dat, cunoscînd cele cinci unghiuri α, β, γ, δ și ε (ele satisfac, bineînțeles, condiția $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540°$) și lungimea perimetrului, l.

1.41. Triunghiul determinat de h_a, h_b, h_c.

1.42. *O fisură.* Se poate întîmpla ca o problemă de construcție geometrică să nu aibă soluție: se poate să nu existe o figură care să satisfacă condiția, cu datele concrete propuse. De pildă, dacă $a > b + c$, nu există un triunghi ale cărui laturi să aibă valorile date a, b și c. O metodă perfectă de rezolvare trebuie: fie să construiască efectiv figura care satisface condiția cerută, fie — atunci cînd nu reușește — să demonstreze că o asemenea figură nu există.

Poate surveni însă și următoarea situație: luată ca atare, problema propusă are soluție, dar nu are soluție problema auxiliară asociată — figura auxiliară de care avea nevoie, în cadrul schemei adoptate de noi, pentru a obține figura cerută inițial, nu poate fi construită. Aceasta înseamnă, bineînțeles, că schema adoptată are o fisură.

Considerați perfectă, sub acest aspect, metoda pe care ați folosit-o la rezolvarea ex. 1.41? (Aplicați-o, de pildă, la triunghiul cu laturile 65, 156, 169, care este un triunghi dreptunghic — laturile lui sînt proporționale cu 5, 12, 13 — cu înălțimile 156, 65, 60.) Dacă răspunsul este NU, gîndiți-vă cum ați putea îmbunătăți metoda?

1.43. Triunghiul determinat de a, α, R.

1.44. *O revenire.* Reluînd rezolvarea ex. 1.43, ați putea să vă puneți cîteva întrebări instructive și să vă formulați cîteva probleme înrudite.

(*a*) Ați putea formula o problemă analogă?

(*b*) O problemă mai generală?

(*c*) Construiți triunghiul determinat de a, β, R.

(*d*) Construiți triunghiul determinat de a, r, R.

1.45. *Trei posturi de reperare acustică.* S-a înregistrat cu precizie, în trei posturi de reperare acustică A, B, C, momentul în care a fost auzit zgomotul descărcării unui tun inamic.

Pe baza acestor date, stabiliți pe hartă poziția X a tunului inamic.

1.46. *În legătură cu schema celor două locuri geometrice.* Locurile geometrice de care este vorba în ex. 1.2, 1.5 și 1.6, n-ar putea fi ele folosite și în legătură cu schema celor două locuri geometrice? Recitiți descrierea schemei de la sfîrșitul 1.2.

1.47. *Schema celor trei locuri geometrice.* Un concept de geometrie plană poate avea diferite corespondente, diferite concepte analoge, în geometria în spațiu. De pildă, în 1.6(3) am considerat atît triunghiul sferic, cît și unghiul triedru, drept configurații analoge triunghiului plan, obișnuit. Dar și tetraedrul poate fi considerat un analog al triunghiului obișnuit; privită din acest punct de vedere, și problema care urmează ne apare drept un analog al problemei din 1.3(1).

Unui tetraedru dat să i se circumscrie o sferă.

Să examinăm analogia mai în detaliu. Reducem problemal a determinarea centrului sferei cerute. În problema astfel redusă necunoscuta este un punct, să-l notăm cu X;

datele sînt patru puncte (vîrfurile tetraedrului dat), să le notăm cu A, B, C și D;

condiția stipulează că patru distanțe trebuie să fie egale

$$XA = XB = XC = XD .$$

Putem împărți această condiție în trei părți:

Prima: $XA = XB$

A doua: $XA = XC$

A treia: $XA = XD$.

Fiecărei părți a condiției îi corespunde un loc geometric. Dacă punctul X satisface prima parte a condiției, locul lui geometric este un plan (punctul se poate afla oriunde într-un anumit plan), și anume planul mediator al segmentului AB; fiecărei din celelalte părți ale condiției îi corespunde cîte un plan analog. În fine, centrul sferei căutate se obține găsind intersecția acestor trei plane.

Să presupunem că dispunem de instrumente cu care putem determina punctele de intersecție a trei suprafețe date, dacă fiecare din aceste suprafețe este fie un plan, fie o sferă. (De fapt, în contextul precedent, am făcut, în mod implicit, această presupunere. Între altele fie spus, rigla și compasul constituie efectiv asemenea instrumente — cu ajutorul lor, și cu suficiente cunoștințe de geometrie descriptivă, putem determina acele puncte de intersecție.) În aceste condiții, putem formula și rezolva probleme de construcții geometrice în spațiu. Problema precedentă constituie un exemplu; dar tot un exemplu îl constituie și metoda pe care am folosit-o la rezolvarea ei: făcînd apel la analogie, din

această metodă putem degaja o schemă generală de rezolvare a problemei de construcții în spațiu, *schema celor trei locuri* geometrice.

1.48. În ex. 1.47 precedent, precum și în exemplul din 1. 3(1), am fi putut împărți condiția într-un alt mod, ceea ce ne-ar fi condus la o altă construcție (deși nu prea diferită de prima). Dacă ne gîndim însă la rezultatul final, oare acest rezultat ar fi putut fi altul? De ce — nu?

1.49. *În legătură cu construcțiile geometrice.* Există numeroase probleme de construcții geometrice în care este evident că figura cerută „există", dar în care această figură nu poate fi construită cu rigla și compasul (ea ar putea fi construită cu alte instrumente, de asemenea — idealizate). O problemă celebră de acest tip este cea a trisecțiunii unghiului: un unghi *oarecare* nu poate fi împărțit în trei părți egale, folosind pentru aceasta numai rigla și compasul (vezi Courant și Robbins, pp. 154—156)[3].

O metodă perfectă de construcție geometrică trebuie *fie* să conducă la construirea figurii cerute cu ajutorul riglei și al compasului, *fie* să demonstreze că o asemenea construcție nu este posibilă. Despre schemele de care ne-am ocupat (a celor două locuri geometrice, a figurilor asemenea, a figurilor auxiliare) nu se poate spune că n-ar fi utile (sper că cititorul a avut deja prilejul să se convingă de aceasta), ci doar că nici una din ele nu constituie o metodă perfectă; de foarte multe ori, ele sugerează o metodă de construire a figurii căutate, însă, din nefericire, atunci cînd nu o fac, ele nu ne spun absolut nimic despre alternativa care ne interesează în cel mai înalt grad, și anume: construcția ca atare este imposibilă, sau, de fapt, ea este posibilă și numai efortul nostru n-a fost suficient de susținut?

Pentru construcțiile geometrice există o metodă mai eficientă decît cea a riglei și a compasului, și ea este bine cunoscută; este vorba de reducerea la algebră, dar nu-i nevoie să intrăm acum în detaliile ei. Însă pentru alte tipuri de probleme cu care ne-am putea întîlni cîndva, s-ar putea să nu existe o metodă perfectă pe care s-o cunoaștem în acel moment, așa că și atunci va trebui să procedăm tot prin încercări. Se poate spune, de aceea, că schemele de care ne-am ocupat pînă acum contribuie la formarea îndemînării în rezolvarea problemelor tocmai prin aspectul lor negativ — prin aceea că sînt intrinsec imperfecte!

1.50. *Alte probleme.* Imaginați cîteva probleme similare celor propuse în acest capitol, dar diferite de acestea — în special probleme pe care dv. înșivă le-ați putea rezolva.

1.51. *Mulțimi.* Nu putem da o definiție a noțiunii de *mulțime* cu ajutorul altor noțiuni „mai" fundamentale, pentru simplul motiv că noțiuni „mai" fundamentale decît aceasta nu există. De fapt, însă, fiecare din noi are obișnuința acestei noțiuni, chiar dacă nu folosește termenul exact de „mulțime". O „mulțime de elemente" înseamnă, în esență, același lucru ca o „clasă de obiecte", sau o „colecție de lucruri", sau un „ansamblu de indivizi". „Studenții care vor lua nota 10 la cutare examen" formează

[3] Este vorba de lucrarea lui R. Courant și H. Robbins *Ce este matematica?* apărută în Ed. Științifică, București, 1968. — *N. R.*

o mulțime, cu toate că, deocamdată, n-am putea enumera numele lor exacte. „Punctele din spațiu care sînt echidistante față de două puncte date" formează o mulțime de puncte perfect definită — un plan. „Dreptele din plan care se află la o distanță dată față de un punct dat" formează o mulțime — deosebit de interesantă — care cuprinde toate tangentele la un anumit cerc. Dacă a, b și c sînt trei obiecte distincte, mulțimea căreia îi aparțin ca elemente exact aceste trei obiecte este, și ea, perfect definită

Spunem că două mulțimi sînt *egale* dacă fiecare element care aparține unei mulțimi, aparține și celeilalte mulțimi. Dacă orice element care aparține mulțimii A aparține și mulțimii B, spunem că A este *inclus* în B; există însă și alte modalități de a exprima acest fapt: B conține pe A, B include pe A, A este o *submulțime* a lui B etc.

Deseori este convenabil să considerăm și *mulțimea vidă*, adică mulțimea care nu conține nici un element. De exemplu, este perfect posibil ca „mulțimea studenților care vor lua nota 10 la cutare examen" să se dovedească în cele din urmă a fi *mulțimea vidă* — dacă nici unul din studenți nu va lua o notă mai mare decît 9, sau dacă cursul respectiv va trebui să fie întrerupt înainte de examenul final. Mulțimea vidă este o mulțime utilă așa cum și **0** — zero — este un număr util. Și, așa cum numărul **0** este mai mic decît orice număr întreg pozitiv, tot așa se consideră că mulțimea vidă este o submulțime a oricărei alte mulțimi.

Cea mai mare submulțime comună mai multor mulțimi se numește *intersecția* acelor mulțimi. Cu alte cuvinte, intersecția mulțimilor A, B, C, ..., L constă din acele, și numai din acele, elemente care aparțin simultan fiecăreia din mulțimile A, B, C, ..., L.

Fie, de exemplu, A și B două plane, considerate fiecare drept o mulțime de puncte (mulțimea punctelor sale); dacă planele sînt distincte și neparalele, intersecția lor este o dreaptă; dacă sînt distincte, dar paralele, intersecția lor este mulțimea vidă; iar dacă planele sînt identice, „intersecția" lor este identică cu fiecare din ele. Dacă A, B și C sînt trei plane, și nu există nici o dreaptă care să fie paralelă cu toate trei, intersecția lor este o mulțime care conține un singur element — un punct.

Termenul „loc geometric" înseamnă, în esență, același lucru ca termenul „mulțime"; de exemplu, mulțimea (sau locul geometric al) punctelor dintr-un plan care se află la o distanță dată față de un punct dat este un cerc.

În acest exemplu, am definit mulțimea (sau locul geometric) enunțînd o *condiție* pe care trebuie s-o satisfacă elementele mulțimii (sau punctele locului geometric), sau o *proprietate* pe care trebuie s-o aibă aceste elemente: punctele unui cerc satisfac condiția — sau: au proprietatea — că sînt, toate, conținute într-un același plan și sînt, toate, (a aceeași distanță față de un punct dat.

Noțiunile de „condiție" și „de proprietate" sînt indisolubil legate de cea de „mulțime". În multe exemple din domeniul matematicii putem enunța clar și simplu condiția, sau proprietatea, care caracterizează fiecare element al mulțimii. Dar și atunci cînd nu putem da o descriere mai precisă, putem totdeauna spune: elementele mulțimii S au proprietatea că aparțin mulțimii S, și satisfac condiția că ele aparțin lui S.

Cînd am examinat schema celor trei locuri geometrice după cea a celor două locuri geometrice (vezi. ex. 1.47), faptul ca atare ne-a sugerat — probabil — că am putea merge și mai departe cu generalizarea. Examinarea mulțimilor și a intersecțiilor lor

accentuează acum această sugestie. S-o lăsăm însă deocamdată „să coacă" în mintea cititorului, urmînd să revenim asupra ei într-un capitol următor.

(Mulțimea cea mai puțin cuprinzătoare față de care fiecare dintre mulțimile unui set dat de mulțimi este o submulțime se numește *reuniunea* acelor mulțimi date. Cu alte cuvinte, reuniunea mulțimilor A, B, ..., L conține toate elementele lui A, toate elementele lui B, ..., și toate elementele lui L, și orice element pe care-l conține reuniunea trebuie să fie conținut și de cel puțin una dintre mulțimile A, B, ..., L (poate însă să fie conținut și de mai multe.)

Intresecția și reuniunea mulțimilor sînt noțiuni strîns legate între ele (ele sînt noțiuni „complementare" într-un anumit sens bine definit, pe care însă, aici, nu-l putem decît sugera indirect), și nu putem studia corect una din ele fără a o menționa și pe cealaltă. Totuși, vom avea considerabil mai multe ocazii de a ne ocupa de intersecția unor mulțimi date, decît de *reuniunea* lor.

CAPITOLUL 2

Schema carteziană

2.1. DESCARTES ŞI IDEEA UNEI METODE UNIVERSALE

René Descartes (1596—1650) a fost una din cele mai remarcabile personalităţi. Mulţi îl consideră fondatorul filozofiei moderne, opera lui a dat matematicii o nouă înfăţişare şi pe deasupra el şi-a cîştigat un loc şi în istoria fizicii. Ne vom ocupa aici în principal de una din lucrările lui *Regulae utiles et clares ad ingenii directionem in veritatis inquisitione*[1].

În *Regulile* sale, Descartes îşi propunea să expună o metodă universală de rezolvare a problemelor. Iată o prezentare sumară a schemei despre care Descartes credea că ar putea fi aplicată la toate tipurile de probleme:

Mai întîi, problema, de orice tip ar fi ea, trebuie redusă la o problemă de matematică.

După aceea, problema de matematică, indiferent de tipul ei, trebuie redusă la o problemă de algebră.

În fine, orice problemă de algebră trebuie redusă la rezolvarea unei singure ecuaţii.

Cu cît aveţi cunoştinţe mai ample, cu atît mai multe lacune puteţi descoperi în acest proiect. Descartes însuşi trebuie să fi remarcat, după cîtva timp, că există cazuri în care această schemă nu poate fi aplicată; în orice caz, fapt este că el a lăsat *Regulile* neterminate

[1] Descartes, *Reguli utile şi clare pentru îndrumarea minţii în cercetarea adevărului*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1964 — *N.R.*

şi n-a prezentat decît fragmente din acest proiect în lucrarea lui ulterioară (şi mai binecunoscută) *Discours de la Méthode*[2].

Se pare totuşi că există un element profund corect în intenţia care a stat la baza schemei carteziene. Este însă mult mai dificil de tradus în viaţă această intenţie, şi există mult mai multe obstacole şi mult mai multe detalii complicate decît şi-a imaginat Descartes în primul lui entuziasm. Proiectul lui Descartes a eşuat; a fost însă un proiect grandios şi, chiar nereuşind, el a influenţat ştiinţa incomparabil mai mult decît au făcut-o o mie şi unul de proiecte mărunte care au avut norocul să reuşească.

Deşi schema lui Descartes nu poate fi aplicată în toate situaţiile, există nenumărat de multe şi de variate cazuri în care ea este totuşi eficace şi printre ele există nenumărat de multe şi de variate cazuri *importante*. Cînd un elev de şcoală medie rezolvă o problemă „şcolărească"[3] „punînd-o în ecuaţie", el urmează schema lui Descartes, şi făcînd aceasta, el se pregăteşte pentru a şti să aplice ideea ei de bază la probleme cu totul serioase.

De aceea, cred că merită să aruncăm o privire asupra cîtorva probleme tipice de şcoală medie.

2.2. O PROBLEMA MARUNTĂ

Iată o mică problemă care îi poate amuza pe elevii inteligenţi de astăzi, cum i-a amuzat, probabil, şi pe alţii, de-a lungul multor secole.

Un fermier are găini şi iepuri. Aceste animale au la un loc 50 de capete şi 140 de picioare. Cîte găini şi cîţi iepuri are fermierul?

Vom examina mai multe moduri de a aborda problema.

(1) *Tatonare*. Sînt în total 50 de animale. Ele nu pot fi toate găini, fiindcă n-ar avea atunci decît 100 de picioare. Ele nu pot fi toate iepuri, fiindcă ar avea atunci 200 de picioare. Or, trebuie să existe fix 140 de picioare. Dacă exact jumătate din animale ar fi găini

---

[2] Descartes, *Discurs asupra metodei*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1957 — *N. R.*

[3] În original, aici şi în alte locuri: *Word problems* — probleme (formulate) în cuvinte, probleme cu o scurtă anecdotă care expun situaţii mai mult sau mai puţin verosimile, de tipul celor întîlnite în viaţă; este tocmai genul de probleme din manualele şi culegerile elementare şi rezolvate curent în şcoala medie. De aici — echivalentul „probleme şcolăreşti". — *N. T.*

şi cealaltă jumătate — iepuri, ele ar avea în total... Dar ca să avem totul sub ochi, să trecem toate aceste cazuri într-un tabel:

Găini	*Iepuri*	*Picioare*
50	0	100
0	50	200
25	25	150

Dacă luăm un număr mai mic de găini, trebuie să luăm un număr mai mare de iepuri, şi aceasta duce la picioare mai multe; din contra, dacă luăm un număr mai mare de găini, atunci... Da, trebuie să fie mai mult de 25 de găini — să încercăm cu 30:

Găini	*Iepuri*	*Picioare*
30	20	140

Am găsit! Asta-i soluţia!

Da, este adevărat, am găsit soluţia, dar aceasta numai şi numai pentru că numerele date, 50 şi 140, sînt numere relativ mici şi simple. Dacă problema, enunţată în aceiaşi termeni, ar fi fost dată cu numere mai mari, sau mai complicate, am fi avut nevoie de mult mai multe încercări şi de mult mai multă şansă pentru a o rezolva aşa cum am făcut aici, adică pur şi simplu văzînd şi făcînd „pe dibuite".

(2) *O idee strălucită.* Bineînţeles, mica noastră problemă poate fi rezolvată mai puţin „empiric" şi ceva mai „deductiv" — vreau să spun, cu mai puţine încercări, mai puţin „la nimereală", mai puţin „pe ghicite", şi cu mai mult raţionament. Iată o altă rezolvare.

Să ne închipuim că fermierul îşi surprinde animalele într-o poziţie cu totul insolită: fiecare găină stă într-un singur picior, iar fiecare iepure — pe labele din spate. În această situaţie neobişnuită, animalele îşi folosesc exact jumătate din picioarele lor, adică 70. În acest număr 70, fiecare cap de găină este socotit *o dată*, însă fiecare cap de iepure este socotit *de două ori*. Să scădem din 70 — numărul total de capete, adică 50; ceea ce rămîne este tocmai numărul de capete „urecheate" — sînt deci

$$70 - 50 = 20$$

iepuri! Şi, bineînţeles, 30 de găini.

Această metodă de rezolvare ar funcţiona la fel de bine şi dacă numerele din problema noastră (50 şi 140) ar fi înlocuite cu altele mai puţin simple. Rezolvarea aceasta (ea poate fi prezentată şi în termeni mai puţin excentrici) este ingenioasă: ea necesită o foarte clară înţelegere intuitivă a situaţiei, un grăunte de ingeniozitate, o sclipire — felicitările mele puştiului de 14 ani care a descoperit-o singur. Ideile strălucite sînt însă rare — e un noroc ca să-ţi vină vreuna în minte.

(3) *Rezolvarea algebrică.* Putem rezolva mica noastră problemă şi fără să ne mai bazăm pe întîmplare, cu mai puţină şansă şi cu mai multă logică — cu condiţia însă să ştim puţină algebră.

Algebra este un limbaj, însă un limbaj care foloseşte nu cuvinte, ci simboluri. Dacă ne-am obişnuit cu el, putem traduce în acest limbaj unele propoziţii din vorbirea de toate zilele (cu condiţia ca ele să se preteze la o astfel de operaţie). Să încercăm deci să traducem în limbaj algebric problema propusă. Făcînd aceasta, urmăm unul din preceptele schemei carteziene: „orice problemă, de orice tip, trebuie redusă la o problemă de algebră". În cazul dat, traducerea este uşoară:

Enunţul problemei

în limbajul obişnuit	*în limbaj algebric*
Un fermier are un anumit număr de găini	x
şi un anumit număr de iepuri.	y
Aceste animale au în total 50 de capete	$x + y = 50$
şi 140 de picioare.	$2x + 4y = 140.$

Am tradus problema propusă într-un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute, x şi y. Nu este nevoie decît de foarte puţine cunoştinţe de algebră pentru a rezolva acest sistem; să-l scriem din nou sub forma

$$x + 2y = 70$$
$$x + y = 50$$

şi scăzînd a doua ecuaţie din prima, obţinem

$$y = 20.$$

Folosind acest rezultat găsim, din a doua ecuaţie a sistemului, că

$$x = 30.$$

Acest procedeu este aplicabil la fel de bine pentru numere mari date ca şi pentru numere mici, el funcţionează fără greş în nenumărat de multe şi de variate cazuri (probleme) şi nu cere nici o idee „strălucită" — ele sînt atît de rare! — ci numai un pic de îndemînare în utilizarea limbajului algebric.

(4) *Generalizare.* Ne-am oprit în repetate rînduri pentru a examina posibilitatea de a înlocui numerele date în problema noastră, cu altele, în special, cu numere mai mari, şi de fiecare dată această

examinare a fost instructivă. Dar şi mai instructiv este *să înlocuim numerele date, cu litere.*

Să înlocuim în problema noastră pe 50 cu h şi pe 140 cu f. Aceasta înseamnă că h reprezintă numărul de capete, iar f numărul de picioare. Prin această înlocuire, problema capătă o altă înfăţişare; să vedem acum şi traducerea ei în limbajul algebric.

Un fermier are un anumit număr de găini	x
şi un anumit număr de iepuri.	y
Aceste animale au în total h capete	$x + y = h$
şi f picioare.	$2x + 4y = f.$

Sistemul de ecuaţii pe care l-am obţinut poate fi scris sub forma

$$x + 2y = \frac{f}{2}$$

$$x + y = h$$

şi dă, prin scădere,

$$y = \frac{f}{2} - h.$$

Să traducem din nou această formulă în limbajul obişnuit: numărul de iepuri este egal cu jumătate din numărul de picioare minus numărul de capete: exact rezultatul pe care l-am obţinut imaginîndu-ne o situaţie cu totul insolită (2).

Dar de data aceasta n-a mai fost nevoie de norocul extraordinar al unei idei strălucite, sau de imaginaţie debordantă; am ajuns la rezultat printr-un procedeu direct şi de rutină, după ce am depăşit o primă etapă, foarte simplă, care a constat în înlocuirea numerelor date prin litere. Etapa este, fără îndoială, simplă, dar este foarte importantă, fiindcă este o etapă de generalizare[4].

(5) *Studiu comparativ.* Cred că este instructiv să comparăm între ele diferitele moduri de a aborda una şi aceeaşi problemă. Revenind asupra celor patru abordări precedente, putem observa că fiecare din ele, inclusiv prima, are un anumit merit, prezintă un anumit interes specific.

Primul procedeu, cel pe care noi l-am calificat drept „tatonare" sau rezolvare „pe dibuite", se numeşte, de obicei, rezolvare prin *încer-*

[4] Vezi *CRP* „Generalizarea", (2) p. 106; „Modificări ale problemei", (4), p. 132; „Se poate verifica rezultatul ?", (2), p. 205.

cări şi ajustări, sau prin *încercări şi erori*. Efectiv, el constă într-o serie de încercări, în care fiecare nouă tentativă încearcă să corecteze eroarea comisă în tentativa precedentă, efectul de ansamblu fiind că erorile scad pe măsură ce avansăm, iar valorile de probă pe care le introducem succesiv se apropie din ce în ce mai mult de rezultatul final pe care-l căutăm. Ţinînd seama de acest aspect al procedeului, poate că am putea găsi o denumire mai reuşită decît cea de „încercări şi ajustări"; am putea vorbi de „încercări succesive", sau de „corecţii succesive", sau de „aproximaţii succesive". Ultima expresie pare să fie, din multe motive cea mai potrivită. Termenul *metoda aproximaţiilor succesive* se aplică, în mod firesc, la o varietate enormă de procedee, de toate gradele de complexitate şi de dificultate. Prin aproximaţii succesive procedăm, de pildă, cînd căutăm un cuvînt în dicţionar şi întoarcem paginile înainte sau înapoi, după cum un cuvînt oarecare, luat la întîmplare pe pagina respectivă precede, în ordinea alfabetică, cuvîntul pe care-l căutăm, sau urmează după el. Un matematician poate folosi termenul de aproximaţii succesive pentru a desemna un anumit procedeu extrem de complex cu care încearcă să rezolve o problemă foarte complicată, de mare importanţă practică, pe care n-o poate rezolva altfel. Termenul se aplică şi ca referire la ştiinţa în ansamblu; teoriile ştiinţifice care se succed, propunînd fiecare o explicare a fenomemenelor mai adecvată decît cea precedentă, pot fi considerate drept aproximaţii succesive ale adevărului.

De aceea, profesorul n-ar trebui să-şi deconsilieze elevii de a proceda prin „încercări şi ajustări", sau prin „încercări şi erori"; din contra, se cuvine ca el să încurajeze folosirea inteligentă a metodei aproximaţiilor succesive, care este o metodă fundamentală. Dar în acelaşi timp, este bine ca el să arate în mod convingător că în problemele simple — cum a fost cea cu găini şi iepuri — dar şi în multe alte situaţii (dintre cele mai importante) aplicarea directă a algebrei se dovedeşte mai eficientă decît metoda aproximaţiilor succesive.

2.3. PUNEREA IN ECUAŢIE

În paragraful precedent [vezi 2.2(3)], am transcris o problemă dată în limbajul obişnuit al cuvintelor, în limbajul algebric al simbolurilor. În exemplul de care ne-am ocupat, trecerea de la un limbaj la altul era evidentă; există însă cazuri în care transpunerea într-un sistem de ecuaţii cere mult mai multă experienţă din partea rezolvatorului, sau mai multă ingeniozitate, sau mai mult efort[8].

[8] Cf. *CRP*, „Punerea în ecuaţie", pp. 170—173.

De ce natură este acest efort? Descartes intenționa să răspundă la această chestiune în partea a doua a *Regulilor*, dar manuscrisul a rămas neterminat. Voi încerca să extrag din textul lui, și să prezint în limbajul contemporan, acele pasaje ale considerațiilor sale care sînt cele mai relevante în stadiul în care am ajuns cu investigația noastră. Vom lăsa deoparte multe lucruri pe care Descartes le-a spus și voi explicita cîteva lucruri pe care el nu le-a spus ca atare, dar cred că prin aceasta nu-i voi denatura sau deforma intențiile.

Voi încerca să urmez metoda de expunere folosită de însuși Descartes: voi începe fiecare explicație cu o scurtă „recomandare" (care, de fapt, este mai curînd un rezumat) și după aceea voi dezvolta această recomandare (sau rezumat) completînd-o cu cîteva comentarii.

(1) *După ce ați înțeles bine problema, reduceți-o mai întîi la determinarea unui anumit număr de cantități necunoscute* (Regulile XIII—XVI).

Ar fi absurd să ne pierdem timpul cu o problemă pe care n-am înțeles-o. De aceea, prima și cea mai evidentă dintre îndatoririle noastre trebuie să fie aceea de a înțelege problema, esența ei, miezul problemei, scopul pe care și-l propune.

După ce am înțeles problema în ansamblu, ne concentrăm atenția asupra părților ei principale. Trebuie să pricepem foarte clar:

ce anume trebuie să găsim și de ce natură este acel obiect (NECUNOSCUTA sau necunoscutele);

ce anume este „dat" în problemă, sau ce anume este cunoscut (DATELE);

în ce fel, prin ce relații, sînt legate între ele necunoscutele și datele (CONDIȚIA).

(În problema din 2.2(4), necunoscutele sînt x și y, iar datele — h și f, adică numărul de găini și cel de iepuri, respectiv numărul de capete și cel de picioare. Condiția este exprimată mai întîi în cuvinte, după aceea — sub formă de ecuații.)

Urmîndu-l pe Descartes, ne limităm deocamdată la probleme în care necunoscutele sînt cantități (adică *numere*, dar nu neapărat numere întregi). Se întîmplă însă uneori ca și probleme de altă natură, cum ar fi unele probleme de geometrie sau de fizică, să poată fi reduse la probleme de acest tip pur cantitativ; ceva mai departe, în 2.5 și 2.6, vom ilustra faptul acesta prin cîteva exemple.

(2) *Examinați problema în modul cel mai firesc, considerînd-o gata-rezolvată și reprezentîndu-vă într-o ordine potrivită toate relațiile care, conform condiției, trebuie să existe între necunoscute și date* (Regula XVII).

Ne imaginăm că toate mărimile (cantitățile) necunoscute au valori care satisfac perfect condiția problemei — aceasta se înțelege în esență,

prin recomandarea „consideraţi problema gata rezolvată" (vezi 1.4). Considerăm, prin urmare, că sub un anumit aspect, putem să nu facem deosebire între necunoscute şi cantităţile date şi că putem să le tratăm, pe unele şi pe celelalte, pe picior de egalitate : ni le reprezentăm, în concret, legate între ele prin relaţiile pe care le stipulează condiţia problemei. Aceste relaţii trebuie apoi examinate şi studiate în ansamblu, exact în spiritul în care examinăm şi studiem o figură, cînd ne propunem să realizăm o construcţie geometrică (vezi sfîrşitul lui 1.7). Scopul pe care-l urmărim este să descoperim vreo indicaţie utilă pentru pasul imediat următor.

(3) *Separaţi din condiţie o parte care vă permite să exprimaţi o aceeaşi cantitate în două moduri distincte, şi să obţineţi, în felul acesta, o ecuaţie între necunoscute. În cele din urmă, trebuie să împărţiţi condiţia în exact atîtea părţi — şi în felul acesta să obţineţi un sistem de exact atîtea ecuaţii — cîte necunoscute are problema* (Regula XIX).

Rîndurile de mai sus sînt, de fapt, o versiune liberă, sau *o parafrază*, a enunţului Regulii XIX dat de Descartes. După acest enunţ, în manuscrisul lui Descartes există un spaţiu gol : explicaţia care ar fi trebuit să urmeze după enunţul Regulii lipseşte (şi probabil că nici n-a fost scrisă vreodată). Va trebui de aceea să-l completăm cu propriile noastre comentarii.

Scopul urmărit este formulat destul de clar : trebuie să obţinem un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute. Se înţelege de la sine că sistemul trebuie astfel construit, încît rezolvarea lui şi calculul necunoscutelor să dea soluţia problemei propuse. Prin urmare, sistemul de ecuaţii trebuie să fie echivalent cu conţinutul condiţiei propuse. Dar dacă sistemul în ansamblu exprimă condiţia în ansamblu, înseamnă că fiecare ecuaţie în parte a sistemului trebuie să exprime o anumită parte a condiţiei. Deci pentru a stabili cele n ecuaţii trebuie să împărţim condiţia în n părţi. Bine — s-o împărţim, dar cum ?

Consideraţiile precedente, de la punctele (1) şi (2), (care prezintă foarte schematic Regulile XIII—XVII date de Descartes) dau unele indicaţii generale în această privinţă, dar nu şi instrucţiuni concrete, bine definite. Desigur, trebuie să înţelegem problema, trebuie să vedem care sînt necunoscutele, datele, condiţia — şi toate acestea, foarte, foarte clar. Examinarea diferitelor stipulaţii ale condiţiei, reprezentarea în concret a relaţiilor dintre necunoscute şi date — toate aceste activităţi şi operaţii ne pot fi de folos ; dar ceea ce ne dau ele nu este decît şansa de a obţine sistemul de ecuaţii căutat, nu şi certitudinea că îl vom găsi.

Recomandarea de care ne ocupăm acum (parafraza la Regula XIX) subliniază un nou element : pentru a obţine o ecuaţie trebuie ***să exprimăm*** *o aceeaşi cantitate în două moduri distincte.* (În exemplul din

2.2(3), una din ecuaţii exprimă *numărul de picioare* în două moduri distincte.) Corect asimilată, această remarcă ne ajută deseori să descoperim o ecuaţie între necunoscute — dar punctul ei forte este totuşi altul: ea ne ajută totdeauna să explicăm o ecuaţie *după ce* aceasta a fost descoperită.

Pe scurt, în ceea ce priveşte operaţia de punere în ecuaţie, există o serie de sugestii utile, dar nu şi o reţetă infailibilă. Însă acolo unde nu ne putem sprijini pe precepte, ne poate veni în ajutor experienţa.

(4) *Reduceţi sistemul de ecuaţii la o singură ecuaţie* (Regula XXI).

Enunţul parafrazat aici al Regulii XXI a lui Descartes nu este urmat de un comentariu (el este efectiv ultima recomandare din manuscrisul lui Descartes). Nu vom analiza aici în ce condiţii un sistem de ecuaţii algebrice poate fi redus la o singură ecuaţie, şi nici în ce fel se poate efectua această reducere; chestiunile acestea ţin de domeniul teoriei pure a matematicii — care este mult mai complicată decît am putea-o bănui din recomandarea succintă pe care o face Descartes, dar care este astăzi destul de bine studiată — şi ele nu ne interesează direct în acest moment. Pentru a efectua reducerea la o singură ecuaţie în acele cazuri simple în care operaţia aceasta ne va fi necesară, nu vom avea nevoie decît de foarte puţină algebră.

Există în schimb alte chestiuni care au rămas încă nestudiate, deşi ar trebui să ne intereseze. Dar poate că le vom aborda cu mai mult folos dacă vom analiza, mai întîi cîteva exemple.

2.4. EXEMPLE DIDACTICE

Pentru matematicieni, problemele şcolare clasice („problemele şcolăreşti") de nivelul şcolii medii sînt banale şi elementare, dar pentru elevii de şcoală medie, şi pentru profesorii respectivi, nu sînt chiar banale, şi nici elementare. Sînt însă convins că profesorul care va face un efort conştiincios şi insistent pentru a aduce recomandările lui Descartes, prezentate mai sus, la nivelul de înţelegere al elevilor, şi pentru a le introduce în practică, va evita multe din capcanele şi dificultăţile frecvente în predare.

Înainte de orice, elevul nu trebuie — în nici un caz — să înceapă să rezolve o problemă, înainte de a o fi înţeles pe deplin. Se poate verifica, într-o oarecare măsură, dacă elevul a înţeles realmente problema: el trebuie să fie în stare să repete enunţul problemei, să arate care sînt necunoscutele şi datele să explice condiţia cu propriile lui cuvinte. Dacă poate să facă toate acestea suficient de bine, el poate trece la rezolvarea propriu-zisă.

O ecuație exprimă *o parte a condiției.* Elevul trebuie să fie în stare să spună ce parte a condiției este exprimată de ecuația pe care o scrie — și ce parte nu este încă exprimată. O ecuație exprimă *o aceeași cantitate în două moduri distincte.* Elevul trebuie să fie în stare să spună care anume cantitate a fost astfel exprimată.

Elevul trebuie să aibă, evident, cunoștințele relevante necesare, fără de care n-ar putea înțelege problema. De pildă, multe dintre problemele obișnuite de școală medie sînt „probleme cu viteze", „probleme cu creșteri proporționale" (vezi cele trei exemple care urmează). Ei bine, înainte de a i se cere să rezolve o astfel de problemă, elevul trebuie să asimileze, într-o formă sau alta, ideea de „viteză a unui proces", de „creștere proporțională", de variație uniformă.

(1) *O conductă poate umple un rezervor în 15 minute, o alta — în 20 minute, iar o a treia — în 30 minute. Dacă toate trei conductele sînt deschise, în cît timp se va umple rezervorul inițial gol?*

Să presupunem că în rezervorul plin încap g litri de apă. Conform enunțului, debitul primei conducte este deci

$$\frac{g}{15}$$

litri pe minut. Deoarece

$$\text{cantitatea} = \text{debitul} \times \text{timpul},$$

cantitatea de apă care curge din prima conductă în t minute este

$$\frac{g}{15}\,t.$$

Dacă t este timpul în care cele trei conducte, debitînd împreună, umplu rezervorul, *cantitatea de apă din rezervorul plin* poate fi exprimată în două moduri:

$$\frac{g}{15}\,t + \frac{g}{20}\,t + \frac{g}{30}\,t = g.$$

În partea stîngă figurează separat contribuția fiecărei conducte, în partea dreaptă — rezultatul global al acestor trei contribuții.

Împărțind la g, se obține ecuația pentru necunoscuta căutată, timpul t:

$$\frac{t}{15} + \frac{t}{20} + \frac{t}{30} = 1.$$

Deducerea ecuației ar putea fi fără îndoială prezentată și în alt mod, iar problema ca atare ar putea fi generalizată, sau modificată, în diferite feluri.

(2) Pentru a face o anumită lucrare, Tom are nevoie de 3 ore, Dick — de 4 ore, iar Harry — de 6 ore. În cît timp vor termina lucrarea dacă cei trei lucrează împreună (și, bineînțeles, nu se incomodează unul pe altul)?

Într-o oră, Tom poate efectua o treime din întreaga lucrare: putem spune, de asemenea, că Tom lucrează în ritmul (sau „cu viteza") de 1/3 (din lucrare) pe oră. Prin urmare, în t ore Tom face $t/3$ din lucrare. Dacă cei trei băieți lucrează împreună și termină lucrarea în t ore (și dacă nu se stingheresc unul pe celălalt — o condiție cu totul esențială!), *cantitatea totală de muncă* poate fi exprimată în două moduri:

$$\frac{t}{3}+\frac{t}{4}+\frac{t}{6}=1;$$

de fapt, cifra 1 din partea dreaptă reprezintă „o lucrare (efectuată) în întregime".

Problema acesta este aproape identică cu cea precedentă (1), și aceasta chiar și numeric, fiindcă

$$15:20:30=3:4:6.$$

Ar fi instructiv să formulați o generalizare a ambelor probleme (folosind simboluri literale). Ar fi de asemenea instructiv să comparați rezolvările și să cîntăriți avantajele și dezavantajele introducerii cantității g în rezolvarea (1).

(3) *Un avion de recunoaștere zboară cu 440 km pe oră cînd nu bate vîntul. El poate transporta combustibil pentru 4 ore de zbor autonom. Dacă avionul pleacă în misiune zburînd împotriva vîntului care suflă cu 40 km pe oră, pînă la ce distanță poate zbura, pentru ca la întoarcere să nu rămînă în pană de carburant?*

În această problemă se presupune, bineînțeles, că vîntul suflă cu aceeași intensitate pe toată durata zborului, că avionul zboară în linie dreaptă, și că timpul necesar pentru schimbarea direcției de zbor în punctul extrem este neglijabil. Toate problemele „școlărești" conțin asemenea ipoteze simplificatoare neexplicitate, și cer din partea celui care le rezolvă un anumit efort preliminar de *interpretare și abstractizare*. Aceasta este o trăsătură esențială a problemelor școlărești, care nu este totdeauna autoevidentă și care trebuie amintită, măcar din cînd în cînd.

Problema devine mai instructivă dacă înlocuim numerele

440 **40** **4**

cu cantităţile complet generale

$$v \qquad w \qquad T,$$

care reprezintă respectiv, viteza avionului în aerul în repaus, viteza vîntului şi durata totală a zborului; aceste trei cantităţi sînt *datele*. Fie x distanţa de zbor într-o direcţie, t_1 — durata zborului la dus şi t_2 — durata zborului la întors; aceste trei cantităţi sînt *necunoscutele*. Este util să dispunem unele din aceste cantităţi într-un tabel ordonat

	Dus	Întors
Distanţa	x	x
Timpul (durata)	t_1	t_2
Viteza	$v - w$	$v + w$

(De fapt, pentru a completa ultimul rînd al tabelului, avem nevoie de unele cunoştinţe — ce-i drept, cu totul elementare — de cinematică.) Or, aşa cum ştim,

$$\text{distanţa} = \text{viteza} \times \text{timpul}.$$

Exprimăm în două moduri distincte fiecare din următoarele trei cantităţi:

$$x = (v - w)t_1,$$

$$x = (v + w)t_2,$$

$$t_1 + t_2 = T.$$

Avem aici un sistem de trei ecuaţii, pentru cele trei necunoscute, x, t_1 şi t_2. De fapt, în problema propusă nu se cerea decît x; t_1 şi t_2 *sînt necunoscute auxiliare* pe care le-am introdus pentru a exprima mai clar ansamblul condiţiei. Eliminînd pe t_1 şi t_2 obţinem

$$\frac{x}{v - w} + \frac{x}{v + w} = T$$

şi deci

$$x = \frac{(v^2 - w^2)T}{2v}.$$

Nu este nici o greutate să înlocuim acum datele v, w şi T cu valori numerice oarecare — în particular, cu cele date în enunţ. Mai în-

teresant este însă să analizăm rezultatul şi să-l verificăm *variind* (modificînd) *datele*.

Dacă $w = 0$, atunci $2x = vT$. Tezultatul acesta este, evident, corect : am presupus, de data aceasta, că zborul are loc cînd nu bate vîntul.

Dacă $w = v$, atunci $x = 0$. Din nou — un rezultat evident : împotriva unui vînt care suflă cu viteza v, avionul nu se poate îndepărta de punctul de plecare.

Dacă w creşte de la valoarea $w = 0$ la valoarea $w = v$, distanţa x scade necontenit, aşa cum arată şi formula. Prin urmare, şi de data aceasta, formula concordă cu ceea ce puteam prevedea şi fără nici un fel de algebră — pur şi simplu, reprezentîndu-ne intuitiv situaţia concretă.

Dacă am fi lucrat nu cu date generale (cu litere), ci cu date numerice, am fi ratat posibilitatea acestei discuţii atît de instructive pe marginea formulei pentru x, ca şi verificările, foarte preţioase şi pertinente ale rezultatului obţinut. În treacăt fie spus, există şi alte verificări interesante pe care le-am putea întreprinde.

(4) *Un negustor are două sorturi de nuci : pe unele le vinde cu* 9 *lei kilogramul, pe celelalte — cu* 6 *lei kilogramul. El vrea să le amestece şi să le vîndă cu* 7 *lei şi* 20 *bani kilogramul. Cîte kilograme dintr-un sort şi cîte din celălalt trebuie să amestece, ca să obţină în total* 50 *kilograme ?*

Aceasta este o „problemă de amestec" tipică şi destul de simplă. Să presupunem că negustorul amestecă x kilograme de nuci din primul sort cu y kilograme de nuci din al doilea sort ; x şi y sînt necunoscutele. Ne va fi mai comod să analizăm necunoscutele şi datele dacă le aranjăm într-un tabel :

	Primul sort	*Al doilea sort*	*Amestecul*
Preţul per kilogram	9	6	7,20
Greutatea	x	y	50

Exprimăm în două moduri *greutatea totală a amestecului* de nuci :

$$x + y = 50 ;$$

după aceea, exprimăm în două moduri *preţul total al amestecului* :

$$9x + 6y = 7{,}20 \times 50.$$

Am obţinut un sistem de două ecuaţii pentru cele două necunoscute x şi y. Las pe seama cititorului să găsească singur soluţia acestui sistem, fiindcă nu va avea nici o dificultate în obţinerea valorilor

$$x = 20, \quad y = 30.$$

Trecînd de la „numere" la „litere" — ceea ce îi şi recomandă să facă — cititorul va obţine o problemă care, aşa cum vom vedea mai departe, permite şi alte interpretări (şi chiar, interpretări mai interesante).

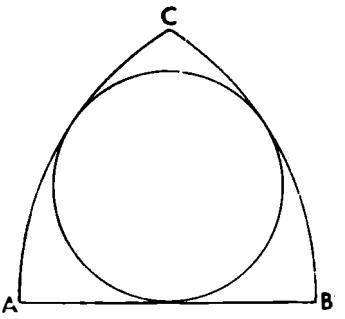


Fig. 2.1. Detaliu de fereastră gotică

2.5. EXEMPLE DIN GEOMETRIE

Nu vom discuta aici decît două exemple.

(1) *O problemă de construcţie geometrică.* Orice problemă de construcţie geometrică poate fi redusă la o problemă de algebră. Nu ne putem ocupa aici de teoria generală a unei astfel de reduceri[6], dar, iată un exemplu.

O arie triunghiulară este mărginită de un segment de dreaptă AB şi de două arce de cerc AC şi BC. Centrul unuia din cercuri este în A, al celuilalt este în B, şi fiecare cerc trece prin centrul celuilalt. În această arie triunghiulară să se înscrie un cerc tangent la toate cele trei frontiere.

Configuraţia căutată (vezi fig. 2.1) apare uneori în arhitectura gotică.

Evident, putem reduce problema la determinarea unui singur punct: centrul cercului căutat. Un prim loc geometric pentru acest punct este, de asemenea, evident: mediatoarea segmentului AB, care este axă de simetrie pentru aria triunghiulară dată. Prin urmare, nu ne mai rămîne de găsit decît un al doilea loc geometric.

Să reţinem numai o parte a problemei şi să facem abstracţie de rest. Să considerăm un cerc (variabil tangent nu la trei, ci numai la două din liniile de frontieră: la dreapta AB şi la arcul de cerc BC (vezi fig. 2.2). Pentru a găsi locul geometric al centrului acestui cerc variabil, folosim geometria analitică. Plasăm originea sistemului de coordonate în punctul A şi luăm axa x în lungul lui AB (vezi fig. 2.2). Fie x şi y coordonatele centrului cercului variabil. Unim acest centru cu cele două puncte esenţiale, unul — cu segmentul AB, celălalt — cu arcul de cerc BC vezi fig. 2.2). Cele două raze au (evident!) aceeaşi lungime, aşa că aceasta poate fi exprimată în două moduri diferite (notăm $AB = a$)

$$y = a - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

[6] Vezi R. Courant şi H. Robbins, *op. cit.*, pp. 134—158.

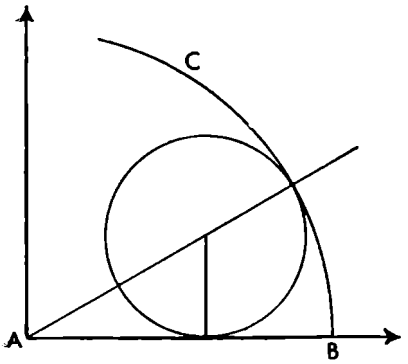


Fig. 2.2. Am făcut abstracție de o parte a condiției

Eliminînd rădăcina pătrată, transformăm această ecuație în

$$x^2 = a^2 - 2ay.$$

Găsim, așadar, că locul geometric al centrului cercului variabil este o parabolă — un loc geometric fără utilizare imediată în construcțiile geometrice.

Or, locul geometric evident de care am vorbit la început, mediatoarea segmentului AB, are ecuația

$$x = \frac{a}{2},$$

care, combinată cu ecuația parabolei, ne dă ordonata centrului căutat al cercului:

$$y = \frac{3a}{8};$$

ordonata aceasta se poate construi foarte ușor, pornind de la lungimea dată $a = AB$.

(2) *Analoga teoremei lui Pitagora în geometria în spațiu.* Analogia nu este niciodată lipsită de ambiguitate. Există multe propoziții, complet distincte, din geometria în spațiu care pe drept cuvînt pot fi considerate drept analoge ale teoremei lui Pitagora. La una din aceste propoziții ajungem considerînd cubul drept analogul spațial al pătratului, iar tetraedrul pe care îl obținem tăind cu un plan oblic unul din colțurile cubului — drept analog triunghiului dreptunghic (pe care îl obținem tăind un colț al pătratului cu o dreaptă oblică). Vîrfului rectangular al triunghiului dreptunghic îi corespunde un vîrf al tetraedrului, pe care îl vom numi vîrf *trirectangular*, sau vîrf *drept*. Într-adevăr, cele trei muchii ale tedraedrului care pleacă din acest vîrf sînt perpendiculare între ele și formează trei unghiuri drepte.

Teorema lui Pitagora rezolvă următoarea problemă: Într-un triunghi care are un vîrf rectangular O, sînt date lungimile a și b ale celor două laturi (catete) care se întîlnesc în O. Să se găsească lungimea c a laturii opuse lui O.

Formulăm problema analogă; Într-un tetraedru care are un vîrf trirectangular O, sînt date ariile A, B și C ale celor trei fețe care se întîlnesc în O. Să se găsească aria D a fetei opuse lui O.

Ni se cere să exprimăm pe D în funcție de A, B și C. Este firesc să ne așteptăm la o formulă analogă teoremei lui Pitagora,

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

care rezolvă problema corespunzătoare din geometria plană. Cu un pic de imaginație, un elev de școală medie a „ghicit" :

$$D^3 = A^3 + B^3 + C^3.$$

Prezumția aceasta este ingenioasă ; modificarea exponentului reflectă abil trecerea de la două, la trei dimensiuni.

(3) *Care este necunoscuta?* — Aria unui triunghi ; am notat-o cu D.

Cum putem găsi o astfel de necunoscută? *Cum putem obține acest tip de obiect?* — Aria unui triunghi poate fi calculată, dacă se cunosc cele trei laturi, cu ajutorul formulei lui Heron. Aria triunghiului nostru este D. Să notăm cu a, b și c lungimile laturilor și fie $s = (a + b + c)/2$; atunci

$$D^2 = s(s - a)\,(s - b)\,(s - c).$$

(Aceasta este formula lui Heron.) Să notăm pe figură laturile lui D(vezi fig. 2.3).

Perfect! Dar cunoaștem oare laturile a, b și c? — Nu, dar ele fac parte din triunghuri dreptunghice ; dacă am cunoaște catetele acestor triunghiuri dreptunghice (notate pe fig. 2.3 cu p, q și r), am putea exprima pe a, b și c :

$$a^2 = q^2 + r^2 ;\ b^2 = r^2 + p^2 ;\ c^2 = p^2 + q^2.$$

Asta-i foarte bine ; dar mărimile p, q și r sînt oare, ele însele, cunoscute? — Nu, însă ele sînt legate de datele problemei, de ariile A, B și C :

$$\frac{1}{2}\,qr = A ;\ \frac{1}{2}\,rp = B ;\ \frac{1}{2}\,pq = C.$$

Toate acestea sînt adevărate ; dar am ajuns oare la ceva care ne poate fi de folos? — Cred că da. Avem acum 7 necunoscute.

$$D$$
$$a,\ b,\ c$$
$$p,\ q,\ r$$

dar avem și un sistem de 7 ecuații pentru a le determina.

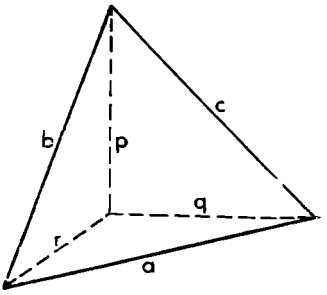


Fig. 2.3. Teorema lui Pitagora în spațiu

(4) Nu există nimic greşit în raţionamentul precedent (3). Noi ne-am atins scopul propus pe care ni-l recomandă Regula lui Descartes [redată, în versiune liberă, în 2.3(3)] : am obţinut un sistem de atîtea ecuaţii — cîte necunoscute. Doar un singur lucru ne-ar putea deranja : numărul 7 pare cam prea mare, să rezolvi 7 ecuaţii cu 7 necunocute pare destul de anevoios. În plus, nici formula lui Heron nu pare prea ispititoare.

Dacă asta ne este impresia, atunci poate că preferăm să luăm totul de la început, şi să pornim altfel.

Care este necunoscuta? — Aria unui triunghi ; am notat-o cu D.

Cum putem găsi o astfel de necunoscută? Cum putem obţine acest tip de obiect? — Procedeul cel mai cunoscut de a calcula aria unui triunghi este

$$D = \frac{ah}{2},$$

unde a este baza, iar h — înălţimea triunghiului a cărui arie este D ; să introducem h în figură (vezi fig. 2.4).

Da, pe a l-am văzut şi mai înainte ; dar ca facem cu h? — Înălţimea h a triunghiului de arie D poate fi calculată — sperăm — dintr-un triunghi convenabil ales. Într-adevăr, să secţionăm tetraedrul cu un plan care trece prin h şi prin vîrful trirectangular. Intersecţia este un triunghi dreptunghic, ipotenuza lui este h, una din catete este p (de care ne-am mai ocupat), iar cealaltă catetă — s-o notăm cu k — este înălţimea perpendiculară pe latura a în triunghiul de arie A. Prin urmare

$$h^2 = k^2 + p^2.$$

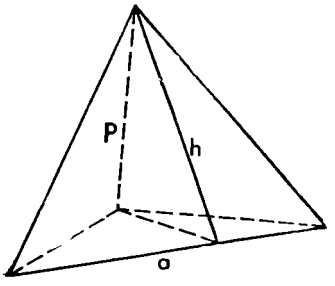


Fig. 2.4. Pornim altfel ...

Foarte bine! Dar ce-i cu k? — Îl putem calcula — într-un fel sau altul. Într-adevăr, să exprimăm în două moduri distincte aria triunghiului în care, aşa cum am spus, k este o înălţime :

$$\frac{1}{2}\, ak = A.$$

Am obţinut oare atîtea ecuaţii — cîte necunoscute? — Mai avem la dispoziţie şi toate ecuaţiile precedente, dar n-avem timp

de pierdut cu număratul. Acum cred că ştim cum trebuie să procedăm. Hai să combinăm pur şi simplu relaţiile pe care le avem în faţă :

$$\begin{aligned} 4D^2 &= a^2h^2 \\ &= a^2(k^2 + p^2) \\ &= 4A^2 + a^2p^2 \\ &= 4A^2 + (r^2 + q^2)p^2 \\ &= 4A^2 + (rp)^2 + (pq)^2 \\ &= 4A^2 + 4B^2 + 4C^2 . \end{aligned}$$

Să scriem unul lîngă altul începutul şi sfîrşitul şi să suprimăm factorul 4 care este inutil. Iată ce obţinem :

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 .$$

Rezultatul este, într-adevăr, cu totul analog teoremei lui Pitagora. Prezumţia aceea cu 3 la exponent era ingenioasă — ei bine, ea s-a dovedit falsă, dar nu-i nimic surprinzător în asta. Surprinzător este însă faptul că ipoteza aceea a fost totuşi atît de apropiată de adevăr.

Ar fi foarte instructiv să comparaţi între ele cele două moduri precedente de a aborda una şi aceeaşi problemă ; ele diferă sub multe aspecte.

Şi, în afară de aceasta, n-aţi putea imagina şi un alt analog al teoremei lui Pitagora ?

2.6. UN EXEMPLU DIN FIZICĂ

Pornim de la următoarea problemă.

O sferă de fier pluteşte pe mercur. Se toarnă apă deasupra mercurului, pînă ce apa acoperă sfera. Sfera se va ridica, va coborî sau va rămîne la aceeaşi adîncime ?

Trebuie să comparăm între ele două situaţii. În ambele cazuri partea de jos a sferei de fier este cufundată în mercur (adică se află sub nivelul suprafeţei mercurului). În schimb, partea de sus a sferei este înconjurată, în primul caz, de aer (sau se află în vid), iar în al doilea caz — de apă. În care situaţie partea de sus (cea de deasupra nivelului mercurului) reprezintă o fracţiune mai mare din volumul total ?

Întrebarea este pur calitativă. Îi putem da însă şi un conţinut cantitativ, care s-o facă mai precisă (şi mai accesibilă tratării pe cale algebrică) : *Să se calculeze, în ambele situaţii, fracţiunea din volumul sferei care se află deasupra nivelului mercurului.*

(1) La întrebarea calitativă putem da un răspuns plauzibil printr-un raţionament pur intuitiv, imaginîndu-ne pur şi simplu o *trecere continuă* de la o situaţie la alta. Să ne imaginăm că fluidul turnat deasupra mercurului şi care înconjură partea de sus a sferei de fier îşi modifică continuu densitatea. La început acest fluid imaginar are densitatea zero (este vorba, deci, de vid). După aceea, densitatea creşte; ea atinge, foarte curînd densitatea aerului, şi după aceea, pe cea a apei. Şi dacă încă nu vedem în ce fel această modificare afectează sfera în imersiune să ne închipuim că *densitatea creşte în continuare*. Cînd densitatea fluidului imaginar atinge densitatea fierului, este clar că sfera trebuie să iasă complet din mercur. Într-adevăr, dacă densitatea ar mai creşte cu încă puţin, sfera ar trebui să urce imediat la suprafaţă şi să iasă cu o porţiune deasupra fluidului imaginar.

Este firesc să presupunem că poziţia sferei în imersiune şi densitatea fluidului imaginar care înconjură sfera variază tot timpul *în aceeaşi direcţie*. Ceea ce ne conduce la concluzia că trecînd de la vid (sau de la aer), la apă, sfera *se va ridica*.

(2) Pentru a răspunde la întrebarea cantitativă, avem nevoie de valorile numerice ale celor trei greutăţi specifice implicate în problemă ele sînt respectiv:

apă	mercur	fier
1,00	13,60	7,84

Este însă mai instructiv să înlocuim aceste date numerice cu litere. Fie

	a	*b*	*c*
greutăţile specifice ale	fluidului de deasupra	fluidului de dedesubt	solidului în imersiune

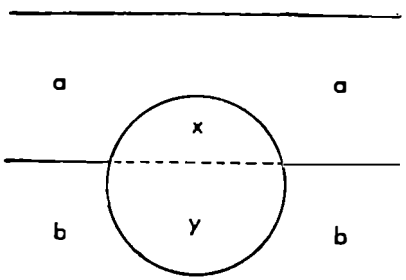


Fig. 2.5. Imersiunea în două fluide

Să notăm cu V volumul total (dat) al solidului în imersiune cu x fracţiunea din V care se află deasupra nivelului de separare al celor două fluide şi cu y fracţiunea care se află sub acest nivel (vezi fig. 2.5). Datele sînt a, b, c şi V; necunoscutele — x şi y. Se înţelege de la sine că

$$a < c < b.$$

Putem exprima volumul total al corpului în imersiune în două moduri:

$$x + y = V.$$

Mai departe însă de acest punct nu putem merge, dacă nu cunoaştem faptele fizice pertinente, legile fizice de care ascultă fenomenul. *Cunoştinţele relevante* pe care trebuie să le avem se reduc, în acest caz, la legea lui Arhimede care, de obicei, se formulează în felul următor: un corp cufundat într-un fluid este împins de fluid cu o forţă verticală egală ca mărime cu greutatea volumului de fluid dislocuit. Sfera de care ne ocupăm dislocuieşte fluid în două straturi. Greutăţile cantităţilor dislocuite sînt respectiv:

ax	şi	by
în stratul de deasupra	şi	în stratul de desubt.

Aceste două forţe verticale trebuie să compenseze împreună greutatea sferei cufundate în fluid şi, de aceea, greutatea aceasta poate fi şi ea exprimată în două moduri:

$$ax + by = cV.$$

Am obţinut în felul acesta un sistem de două ecuaţii pentru cele două necunoscute x şi y. Rezolvînd acest sistem obţinem:

$$x = \frac{b - c}{b - a} V, \qquad y = \frac{c - a}{b - a} V.$$

(3) Să revenim la enunţul iniţial al problemei. În primul caz, dacă deasupra mercurului este vid, atunci

$$a = 0 \qquad b = 13{,}60 \qquad c = 7{,}84,$$

ceea ce dă, pentru fracţiunea din volumul sferei care se află deasupra nivelului mercurului,

$$x = 0{,}423\ V.$$

În cazul al doilea, cînd fluidul de deasupra mercurului este apa,

$$a = 1{,}00 \qquad b = 13{,}60 \qquad c = 7{,}84,$$

de unde

$$x = 0{,}457\ V.$$

şi această din urmă fracţiune este mai mare decît prima, ceea ce concordă cu concluzia raţionamentului nostru intuitiv.

Formula generală (în simbolurile literale) este însă mai interesantă decît orice rezultat numeric particular pe care l-am putea deduce din ea. Deosebit de interesant este faptul că ea confirmă pe deplin raţionamentul nostru intuitiv. Într-adevăr, să menţinem constante valorile b, c şi V şi să facem să crească densitatea a a stratului superior, de la

$$a = 0 \qquad \text{la} \qquad a = c.$$

În aceste condiţii, numitorul $(b - a)$ din expresia lui x scade continuu aşa că x, fracţiunea din V de deasupra nivelului mercurului, creşte continuu de la

$$x = \frac{b - c}{b} V \qquad \text{la} \qquad x = V.$$

2.7. UN EXEMPLU DIN CATEGORIA „AMUZAMENTELOR"

Cum aţi putea face două pătrate din cinci? Fig. 2.6 reprezintă o foaie de hîrtie care are forma de cruce; ea este constituită din cinci pătrate egale. Tăiaţi-o în două în lungul unei linii drepte, apoi tăiaţi din nou una din bucăţi, tot în lungul unei linii drepte, în aşa fel încît cele trei fragmente rezultate, asamblate convenabil, să formeze două pătrate egale, adiacente.

Crucea din fig. 2.6 este o figură foarte simetrică (ea are un centru de simetrie şi patru axe de simetrie). Cele două pătrate adiacente formează un dreptunghi cu lungimea de două ori mai mare decît lăţimea. Se subînţelege că cele trei fragmente în care va fi împărţită crucea trebuie să acopere exact acest dreptunghi, fără să se suprapună.

Am putea oare rezolva o parte a problemei? Evident, aria dreptunghiului căutat este egală cu aria crucii date, aşa că este egală cu $5a^2$, dacă a reprezintă latura unuia din cele cinci pătrate care formează crucea. Dar o dată ce am obţinut aria, înseamnă că putem găsi şi laturile dreptunghiului. Fie x lungimea dreptunghiului; atunci lăţimea acestuia este $x/2$. Exprimînd aria dreptunghiului în două moduri distincte, obţinem

$$x \cdot \frac{x}{2} = 5a^2$$

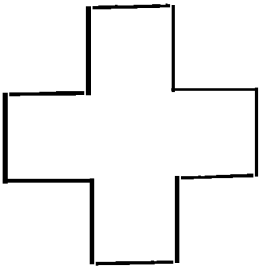


Fig. 2.6. Două din cinci?

sau

$$x^2 = 10a^2$$

din care putem deduce cele două laturi ale dreptunghiului.

Acum dispunem de suficiente informaţii asupra dreptunghiului — îi cunoaştem forma şi dimensiunile — dar problema nu este încă rezolvată: ne mai rămîne deci să determinăm poziţiile celor două tăieturi cu care fragmentăm crucea. Însă o indicaţie în această direcţie putem obţine din însăşi expresia lui x obţinută mai sus, mai ales dacă o scriem sub forma

$$x^2 = 9a^2 + a^2.$$

Cu această indicaţie, las cititorul să găsească singur rezolvarea.

Din modul de rezolvare a „amuzamentului" de mai sus, putem extrage cîteva sugestii utile.

În primul rînd, el arată că algebra poate fi utilă chiar şi atunci cînd ea nu poate rezolva complet problema: ea poate rezolva o parte a problemei, iar rezolvarea acelei părţi poate uşura restul rezolvării.

În al doilea rînd, procedeul pe care l-am folosit este remarcabil prin caracterul lui specific de schemă cu *extindere progresivă*. La început n-am obţinut decît o mică parte a rezolvării: aria dreptunghiului căutat. Am folosit însă această mică parte pentru a obţine o parte mai importantă: laturile dreptunghiului, şi deci informaţia completă cu privire la dreptunghi. Acum încercăm să folosim această parte mai importantă pentru a obţine o parte şi mai importantă, o parte şi mai cuprinzătoare, pe care sperăm s-o putem folosi apoi pentru a obţine rezolvarea completă.

2.8. ALTE EXEMPLE „AMUZANTE"

Problemele de care ne-am ocupat pînă acum în acest capitol au fost din categoria acelor aşa-zise „rezonabile". Înclinăm să spunem că o problemă este rezonabilă dacă soluţia ei este univoc determinată, dacă problema admite o soluţie unică. Or, dacă problema de care ne ocupăm ne preocupă cu adevărat, este firesc să vrem să aflăm (sau să „ghicim") cît mai curînd posibil dacă ea este sau nu rezonabilă. Aşa că, încă de la început, este de dorit să ne punem nouă înşine o serie de întrebări: *Poate fi satisfăcută condiţia? Condiţia este oare suficientă pentru a determina necunoscuta? Nu cumva este insuficientă? Este oare redundantă? Sau poate — incompatibilă, absurdă, contradictorie?*

Aceste întrebări sînt importante[7]. Nu ne angajăm acum într-o discuţie generală despre rolul lor — o amînăm pentru mai tîrziu — dar este oportun să examinăm aici două exemple.

(1) *Un om a mers cinci ore, mai întîi pe drum drept, apoi a urcat o colină, pe urmă a făcut cale-întoarsă şi a venit înapoi la punctul de plecare, mergînd pe acelaşi drum. El a mers cu 4 kilometri pe oră pe drum drept, cu 3 kilometri pe oră la urcuş şi cu 6 kilometri pe oră la coborîş. Să se calculeze distanţa totală străbătută*[8].

Este oare aceasta o problemă rezonabilă? Datele sînt oare *suficiente pentru a determina necunoscuta? Nu cumva sînt insuficiente? Sînt oare redundante?*

Datele par să fie *insuficiente*: s-ar părea că lipseşte o anumită informaţie, absolut necesară, cu privire la mărimea (lungimea) părţii neorizontale a drumului. Dacă am şti cît timp a cheltuit omul ca să urce, sau ca să coboare, n-ar mai fi nici o dificultate. Însă aşa, fără o astfel de informaţie, problema pare nedeterminată.

Totuşi, să încercăm. Fie

x — distanţa totală parcursă

y — lungimea urcuşului.

Parcursul total are patru faze diferite:

orizontală, urcuş, coborîş, orizontală.

Este foarte uşor să exprimăm în două moduri distincte, timpul total cheltuit pentru străbaterea întregului parcurs:

$$\frac{\frac{x}{2}-y}{4}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}+\frac{\frac{x}{2}-y}{4}=5.$$

Nu avem decît o singură ecuaţie pentru două necunoscute — nu-i suficient. Totuşi, dacă strîngem termenii asemenea, constatăm că coeficientul lui y este 0 şi că rămîne

$$\frac{x}{4}=5$$

$$x=20.$$

Aşadar, datele sînt totuşi suficiente pentru a determina pe x, singura necunoscută cerută în enunţul problemei. Prin urmare, la urma urmelor, problema nu este nedeterminată — ne-am înşelat.

---

[7] Vezi *CRP*, „Poate fi satisfăcută condiţia?", p. 154.

[8] Vezi *A Tangled Tale* (O poveste încîlcită) de Lewis Carroll.

(2) Da, ne-am înşelat, asta nu se poate nega, dar este de bănuit că şi autorul şi-a dat osteneala să ne inducă în eroare alegînd cu şiretenie cele trei numere 3, 6 şi 4. Ca să dăm de rostul acestui truc, să înlocuim numerele

3	6	4

cu litere

u	v	w

care reprezintă viteza de mers respectiv la

urcuş	coborîş	orizontală.

Trebuie să citim din nou problema înlocuind numerele iniţiale cu literele pe care tocmai le-am introdus, şi să exprimăm după aceea, în două moduri distincte, timpul total cheltuit pentru străbaterea întregului parcurs, folosind literele corespunzătoare:

$$\frac{\frac{x}{2}-y}{w}+\frac{y}{u}+\frac{y}{v}+\frac{\frac{x}{2}-y}{w}=5$$

sau

$$\frac{x}{w}+\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-\frac{2}{w}\right)y=5.$$

Din această ecuaţie nu putem determina pe x decît dacă coeficientul lui y se anulează. Aşadar, problema *este* nedeterminată, cu excepţia cazului în care

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right).$$

Or, dacă cele trei viteze de mers sînt alese la întîmplare, ele nu satisfac această relaţie, aşa că problema este realmente nedeterminată. Am fost induşi în eroare printr-o stratagemă lipsită de scrupule!

(Putem exprima relaţia critică şi prin formula

$$w=\frac{2uv}{u+v},$$

sau în cuvinte, spunînd că viteza de mers pe porţiunea orizontală este media armonică a vitezelor la urcuş şi la coborîş.)

(3) *Două cercuri exterioare unul altuia sînt situate în interiorul unui al treilea cerc, mai mare. Fiecare din aceste cercuri este tangent la celelalte două şi toate cele trei centre sînt pe o aceeaşi dreaptă. Fiind date r—raza cercului mare, şi t—porţiunea din tangenta comună la cele două*

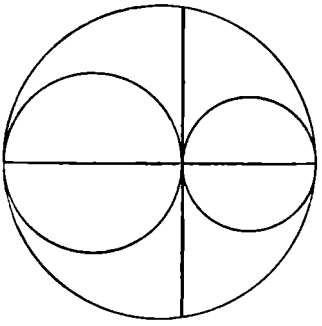


Fig. 2.7. Două date

cercuri mici, în punctul de contact al acestora, cuprinsă în interiorul cercului mare, să se găsească aria interioară cercului mare, dar exterioară cercurilor mici (vezi fig. 2.7).

Este oare aceasta o problemă rezonabilă? Datele sînt oare *suficiente pentru a determina necunoscuta? Nu cumva sînt insuficiente? Sînt oare redundante?*

Problema pare perfect rezonabilă. Pentru a determina configuraţia celor trei cercuri este necesar şi, în acelaşi timp, suficient să cunoaştem razele celor două cercuri mici, şi de aceea, oricare alte două date independente vor fi la fel de bune ca şi razele. Or, cele două valori date, r şi t, sînt, evident, mărimi independente: putem varia una din ele fără a fi nevoiţi s-o modificăm şi pe cealaltă (cu condiţia să nu fie încălcată inegalitatea $t \leqslant 2r$, pe care o presupunem satisfăcută). Da, cele două date r şi t par să fie exact ceea ce ne trebuie — ele nu sînt nici insuficiente, nici redundante.

În consecinţă, să ne apucăm de treabă. Să notăm cu A aria căutată şi cu x şi y razele celor două cercuri mici. Evident

$$A = \pi r^2 - \pi x^2 - \pi y^2$$

$$2r = 2x + 2y.$$

Avem două ecuaţii pentru cele trei necunoscute, A, x şi y: pentru a obţine o a treia ecuaţie, să considerăm triunghiul dreptunghic înscris în cercul mare, a cărui bază trece prin cele trei centre, şi al cărui vîrf opus bazei este una din extremităţile segmentului t. Înălţimea acestui triunghi, coborîtă din vîrful unghiului drept, este $t/2$; această înălţime este medie proporţională între segmentele determinate de ea pe bază (Euclid VI 13):

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2 = 2x \cdot 2y.$$

Avem acum trei ecuaţii. Să scriem din nou ultimele două ecuaţii:

$$(x + y)^2 = r^2$$

$$2xy = \frac{t^2}{8}.$$

Scăzînd una din cealaltă, obţinem $x^2 + y^2$, şi înlocuind această valoare în prima ecuaţie, găsim

$$A = \frac{\pi t^2}{8}.$$

Se constată deci că datele erau totuşi *redundante*: dintre cele două date, t şi r, numai prima este realmente necesară, nu şi a doua. Ne-am înşelat din nou ...

Această curioasă relaţie care stă la baza exemplului analizat mai sus a fost observată de Arhimede; vezi *Operele* lui Arhimede, editate de T. L. Heath, pp. 304—305.

EXEMPLE ŞI COMENTARII LA CAPITOLUL 2

Partea întîi

2.1. Ionel are 3 lei şi 50 bani în monede de 5 bani şi de 10 bani, în total 50 de monede. Cîte monede de 5 şi cîte monede de 10 are Ionel? (Aţi mai întîlnit oare această problemă, într-o formă uşor diferită?

2.2. Generalizaţi problema din 2.4(1) trecînd de la „numere" la „litere" şi considerînd mai multe conducte de umplere şi de golire.

2.3. Imaginaţi o altă interpretare a ecuaţiei stabilite în 2.4(2).

2.4. Găsiţi alte verificări ale soluţiei problemei de zbor din 2.4(3).

2.5. În „problema de amestec" din 2.4(4), înlocuiţi datele numerice

90, 60, 72, 50

cu literele

a, *b*, *c*, *d*.

Citiţi problema după această înlocuire şi stabiliţi ecuaţiile. Le-aţi mai întîlnit undeva?

2.6. Fig. 2.8. (care este înrudită cu fig. 2.1, dar diferă tot uşor de aceasta) reprezintă o altă configuraţie întîlnită frecvent în arhitectura gotică.

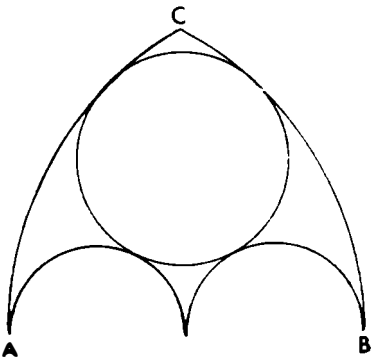


Fig. 2.8. Detaliu de fereastră gotică

Găsiți centrul cercului tangent la cele patru cercuri care formează un „patrulater curbiliniu".

Două arce au raza egală cu AB, centrul unuia este în A, al celuilalt — în B. Cele două semicercuri au raza egală cu $AB/4$, centrele lor sînt pe AB, unul (din semicercuri) începe din punctul A, celălalt — din punctul B, și ambele se termină în punctul median al segmentului AB, unde sînt tangente.

2.7. Realizați pînă la sfîrșit planul de rezolvare elaborat în 2.5(3); el trebuie să vă conducă la aceeași expresie simplă pentru D^2, în funcție de A, B și C, pe care am obținut-o în 2. 5(4), pe o altă cale.

2.8. Comparați între ele căile de rezolvare din 2.5(3) și 2.5(4).(Scoateți în evidență punctele de vedere generale).

2.9.. Calculați volumul V al unui tetraedru care ar cu un vîrf O, trirectangular, cunoscînd cele trei arii A, B și C ale celor trei fețe care se întîlnesc în O.

2.10. *Un analog al teoremei lui Heron.* Calculați volumul V al unui tetraedru care are un vîrf trirectangular, cunoscînd lungimile a, b și c ale laturilor feței opuse vîrfului dat.

(Dacă, în expresia lui V, introducem într-un mod convenabil și simetric cantitatea

$$S^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

rezultatul capătă o formă oarecare similară cu formula lui Heron.)

2.11. *Un alt analog al teoremei lui Pitagora.* Găsiți lungimea d a diagonalei unei cutii (un paralelipiped dreptunghic) cunoscînd p, q și r respectiv lungimea, lățimea și înălțimea cutiei.

2.12. *Încă un analog al teoremei lui Pitagora.* Găsiți lungimea d a diagonalei unei cutii, cunoscînd a, b și c, lungimile diagonalelor celor trei fețe care au un punct comun.

2.13. *Un alt analog al teoremei lui Heron.* Fie V volumul unui tetraedru și a, b, și c lungimile celor trei laturi ale uneia din fețe; presupunînd că fiecare muchie a tetraedrului are lungimea egală cu cea a muchiei opuse, exprimați pe V în funcție de a, b și c.

2.14. Verificați rezultatul din ex. 2.10 și cel din ex. 2.13, examinînd cazul degenerat în care V se anulează.

2.15. Rezolvați problema de amuzament propusă în 2.7 (Laturile x și $x/2$ trebuie să rezulte în urma tăieturilor — cum puteți înscrie un segment de lungime x în interiorul crucii?)

2.16. Fig. 2.9 reprezintă o foaie de hîrtie de o formă deosebită: un dreptunghi care are o gaură dreptunghiulară. Laturile marginii dreptunghiulare exterioare sînt de, respectiv, 9 şi 12 unităţi, iar cele ale marginii interioare de, respectiv, 1 şi 8 unităţi. Ambele margini dreptunghiulare au acelaşi centru, iar laturile lor corespondente sînt paralele. Tăiaţi această foaie în două fragmente în lungul a numai două linii, în aşa fel încît asamblate convenabil, fragmentele să formeze un pătrat.

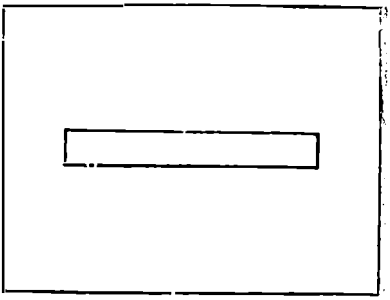


Fig. 2.9. Din două tăieturi — un pătrat

(*a*) *Aţi putea rezolva o parte a problemei?* Cît de mare este latura pătratului căutat?

(*b*) *Consideraţi problema gata rezolvată.* Imaginaţi-vă că foaia a fost deja tăiată în două fragmente, „fragmentul din stînga" şi „fragmentul din dreapta". Ţineţi pe loc fragmentul din stînga şi deplasaţi fragmentul din dreapta în poziţia căutată (în care, împreună cu celălalt fragment, formează un pătrat). Cunoscînd răspunsul la punctul (*a*), de ce tip vă aşteptaţi că va fi deplasarea?

(*c*) *Încercaţi să ghiciţi o parte a soluţiei.* Foaia dată este simetrică în raport cu centrul ei, precum şi în raport cu două axe perpendiculare una pe alta. Care din cele două tipuri de simetrie (cea centrală sau cea axială) vă aşteptaţi că va trebui păstrată cînd veţi tăia foaia dreptunghiulară în lungul celor două linii?

Partea a doua

Unele din problemele care urmează sînt grupate după subiectul care este schiţat printr-o scurtă indicaţie înaintea primului exemplu din grup (*Miscellanea, Geometrie plană, Geometrie în spaţiu* etc.). Unele exemple sînt urmate de numele Newton sau Euler, scrise între paranteze; aceste exemple sînt extrase, respectiv, din următoarele surse:

Universal Arithmetick sau *A Treatise of Arithmetical Composition and Resolution* de Sir Isaac Newton, tradusă din latină de Mr. Ralphson, Londra, 1769. (Exemplele la care se precizează „După Newton" sînt extrase din aceeaşi sursă, dar în formularea sau în datele lor numerice au fost introduse unele modificări.)

Elements of Algebra de Leonhard Euler, Londra, 1797 traducere din limba franceză. (De fapt, iniţial, *Algebra* lui Euler a fost scrisă în germană.)

Isaac Newton (1643—1727) este considerat de mulţi drept cel mai mare om de ştiinţa al tuturor timpurilor. Opera lui cuprinde principiile mecanicii, teoria gravitaţiei universale, calculul diferenţial şi integral, optica teoretică şi experimentală, precum şi o serie de alte teme considerate minore — dar care, fiecare în parte, ar fi suficientă pentru a-i asigura gigantului un loc în istoria ştiinţei. Leonhard Euler (1707—1783) a fost şi el una din marile figuri ale ştiinţei; el a lăsat urme de neşters în aproape toate ramurile matematicii, precum şi în cîteva ramuri ale fizicii; a contribuit mai mult decît oricare altul la dezvoltarea calculului infinitezimal descoperit de Newton şi Leibniz. De remarcat că personalităţi atît de mari ca acestea n-au considerat că ar fi

sub demnitatea lor să explice şi să ilustreze pe larg aplicarea ecuaţiilor la rezolvarea „problemelor şcolăreşti".

2.17. *Miscellanea.* Un catîr şi un măgar transportau samare de cîteva sute de kilograme fiecare. Plîngîndu-se de soartă, măgarul spuse catîrului: „Nu mi-ar trebui decît o sută de kilograme din povara ta, ca să duc în spate de două ori mai mult decît tine". Catîrul îi răspunse: „Da, dar dacă tu mi-ai da o sută de kilograme din povara ta, eu aş fi de trei ori mai împovărat decît tine".

Cîte sute de kilograme poartă fiecare? (Euler)

2.18. Cînd dl. şi d-na Smith s-au urcat în avion, ei aveau împreună 94 kilograme de bagaje; pentru bagaj excedentar, domnul a plătit 30 lei, iar doamna — 40 lei. Dacă dl. Smith ar fi călătorit singur şi ar fi luat cu sine tot bagajul, el ar fi trebuit să plătească 270 lei. Cîte kilograme de bagaj poate transporta o persoană fără să plătească taxe suplimentare?

2.19. Un tată lasă moştenire celor trei fii ai săi 1600 coroane. Testamentul precizează că fiul cel mare trebuie să primească cu 200 coroane mai mult decît cel mijlociu, iar acesta — cu 100 coroane mai mult decît mezinul. Se cere partea fiecăruia (Euler).

2.20. Un tată lasă patru fii care îşi împart moştenirea în felul următor:

Primul ia jumătate din avere, minus 3000 livre.

Al doilea ia o treime, minus 1000 livre.

Al treilea ia exact o pătrime din avere.

Al patrulea ia 600 livre şi o cincime din avere.

Cît era întreaga avere şi care a fost partea fiecăruia? (Euler).

2.21. Murind, un tată lasă mai mulţi copii şi aceştia îşi împart moştenirea în felul următor:

Primul primeşte 100 coroane plus o zecime din ceea ce rămîne.

Al doilea primeşte 200 coroane plus o zecime din ceea ce rămîne.

Al treilea primeşte 300 coroane plus o zecime din ceea ce rămîne.

Al patrulea primeşte 400 coroane plus o zecime din ceea ce rămîne şi aşa mai departe.

La sfîrşit se constată că averea a fost împărţită egal între toţi copiii. Să se afle cît de mare era averea, cîţi copii au fost şi cît a primit fiecare (Euler).

2.22. Trei persoane joacă împreună: în prima partidă, primul pierde la fiecare din ceilalţi dublul sumei pe care o are fiecare din aceştia. În partida următoare, jucătorul al doilea pierde la fiecare din ceilalţi dublul sumei pe care aceştia o aveau în acel moment. În fine, în a treia partidă, primul şi al doilea jucător cîştigă fiecare de la cel de-al treilea exact suma pe care o aveau înainte. După aceea ei se despart şi constată că au toţi aceeaşi sumă, şi anume cîte 24 napoleoni. Să se determine cîţi bani a avut fiecare înainte de a începe jocul (Euler).

2.23. Trei muncitori pot termina o anumită lucrare într-un anumit timp, şi anume: *A* o termină o dată în 3 săptămîni, *B* o termină de trei ori în 8 săptămîni iar *C* — de cinci ori în 12 săptămîni. Se cere timpul în care cei trei o pot termina lucrînd împreună (Newton).

2.24. Fiind date forţele mai multor agenţi, să se determine timpul în care (acţionînd) împreună, ele pot realiza un anumit efect (Newton).

2.25. Cineva cumpără 40 bu. de grîu, 24 bu. de orz şi 20 bu. de ovăz, totul pentru 15 livre şi 12 şilingi.

După aceea, el cumpără aceleaşi grîne, 26 bu. de grîu, 30 bu. de orz şi 50 bu. de ovăz, totul pentru 16 livre.

A treia oară, el cumpără aceleaşi sorturi de grîne, 24 bu. de grîu, 120 bu. de orz şi 100 bu. de ovăz, totul pentru 34 livre[9].

Se cere la cît trebuie preţuit bushelul de fiecare din (cele trei sorturi) grîne (Newton).

2.26. (Continuare) Generalizaţi.

2.27. Dacă 12 boi mănîncă (iarba de pe) $3\frac{1}{3}$ acri de păşune în 4 săptămîni, şi 21 boi mănîncă (iarba de pe) 10 acri de păşune în 9 săptămîni, să se găsească cîţi boi vor mînca (iarba de pe) 24 acri (de păşune) în 18 săptămîni (Newton).

2.28. *O problemă din Egiptul antic.* Să luăm o problemă din Papirusul Rhind, principala noastră sursă de cunoştinţe despre matematica Egiptului antic. În textul original, este vorba de aproximativ o sută de pîini (întregi) care trebuie împărţite între cinci indivizi, dar cea mai mare parte a condiţiei nu este formulată efectiv (sau nu este formulată clar); soluţia este obţinută prin „tatonări": mai întîi o conjectură, apoi o corecţie la prima conjectură[10].

Iată problema egipteană reformulată în abstract şi în terminologia modernă; recomand cititorului să facă un pas mai departe şi s-o pună în ecuaţie. O progresie aritmetică are cinci termeni. Suma tuturor termenilor este egală cu 100, iar suma celor trei termeni mai mari este de 7 ori suma celor doi termeni mai mici. Să se găsească progresia.

2.29. O progresie geometrică are trei termeni. Suma termenilor este 19, iar suma pătratelor termenilor este 113. Să se găsească termenii (Newton).

2.30. O progresie geometrică are patru termeni. Suma celor doi termeni extremi este 13, iar suma termenilor mediani — 4. Să se găsească termenii (Newton).

2.31. Mai mulţi negustori au în comun un capital de 8240 coroane; în plus, fiecare contribuie cu de 40 ori atîtea coroane cîţi parteneri; ei cîştigă cu întreaga sumă

---

[9] Bushel (bu.) — unitate de măsură pentru grîne, egală cu 36,3 litri; 1 livră (= liră sterlină) are 20 şilingi. — *N.T.*

[10] Vezi J. R. Newman, *The World of Mathematics*, vol. I, pp. 173—174.

atîtea procente — cîţi parteneri; împărţind cîştigul, se constată, după ce fiecare a primit de 10 ori atîtea coroane cîţi parteneri, că mai rămîn 224 coroane. Se cere numărul de parteneri (Euler).

2.32. *Geometrie plană.* În interiorul unui pătrat de latură a se găsesc cinci cercuri exterioare unul altuia şi de aceeaşi rază r. Unul din cercuri este concentric cu pătratul şi este tangent la celelalte patru cercuri, fiecare fiind, la rîndul lui, tangent la două laturi ale pătratului (ele se află în cele patru colţuri ale pătratului). Să se exprime r în funcţie de a.

2.33. *Newton — despre punerea în ecuaţie, în cazul problemelor de geometrie.* „Dacă este vorba de un triunghi isoscel înscris într-un cerc şi urmează să se compare laturile şi baza cu diametrul cercului, atunci se poate propune fie să se studieze diametrul pornind de la laturi şi bază [ca] date, fie să se studieze baza pornind de la laturi şi diametru [ca] date, fie, în fine, să se studieze laturile pornind de la bază şi diametru [ca] date; dar orice variantă s-ar propune, se va reduce [problema] la o ecuaţie tolosind aceeaşi ... analiză (= punere în ecuaţie)" (Newton).

Fie d, s şi b, respectiv lungimea diametrului, cea a laturii şi cea a bazei (cele trei laturi ale triunghiului au, deci, lungimile respectiv s, s, şi b) şi se cere să se găsească o ecuaţie între d, s şi b care rezolvă toate cele trei probleme: una în care necunoscuta este d, alta în care se caută b, şi a treia — în care se cere s. (Datele sînt totdeauna în număr de două.)

2.34. (Continuare). Analizaţi critic ecuaţia obţinută ca răspuns la ex. 2.33. (*a*) Oare toate cele trei probleme sînt la fel de uşoare? (*b*) Ecuaţia obţinută dă valori pozitive în cele trei cazuri menţionate (respectiv, pentru d, b şi s) numai în anumite condiţii; oare aceste condiţii reflectă corect situaţia geometrică?

2.35. Punctele G, H, V şi U sînt (în această ordine) cele patru vîrfuri ale unui patrulater. Un inginer topograf vrea să găsească lungimea $UV = x$. El cunoaşte lungimea $GH = l$ şi măsoară patru unghiuri:

$$\sphericalangle GUH = \alpha, \quad \sphericalangle HUV = \beta, \quad \sphericalangle UVG = \gamma, \qquad \sphericalangle GVH = \delta.$$

Exprimaţi x în funcţie de α, β, γ, δ şi l.

(Amintiţi-vă ex. 2.33 şi urmaţi sfatul lui Newton: alegeţi acele „*Data* şi *Quaesita* (= ceea ce se caută = necunoscute!) cu care socotiţi că vă va fi cel mai uşor să scrieţi ecuaţia".)

2.36. Fiind date aria şi perimetrul unui triunghi dreptunghic, să se găsească ipotenuza (Newton).

2.37. Cunoscînd înălţimea, baza şi suma laturilor [celelalte!], să se găsească triunghiul (Newton).

2.38. Avînd laturile unui paralelogram oarecare şi una din diagonale, să se găsească cealaltă diagonală (Newton).

2.39. Triunghiul cu laturile a, a şi b este isoscel. Tăiaţi din el două triunghiuri simetrice faţă de înălţimea perpendiculară pe baza b, în aşa fel încît pentagonul simetric care rămîne să fie *echilateral*. Exprimaţi latura x a pentagonului în funcţie de a şi b.

(Această problemă a fost discutată de Leonardo da Pisa, cunoscut şi sub numele de Fibonacci, cu valorile numerice $a = 10$ şi $b = 12$.)

2.40. Un hexagon este echilateral — toate laturile lui au aceeaşi lungime a. Trei din unghiurile lui sînt unghiuri drepte; ele alternează cu trei unghiuri obtuze. (Dacă hexagonul este $ABCDEF$, unghiurile din vîrfurile A, C şi E sînt drepte, iar cele din vîrfurile B, D şi F — obtuze.) Găsiţi aria hexagonului.

2.41. Un triunghi echilateral este înscris într-un alt triunghi echilateral, mai mare, astfel încît laturile corespondente în cele două triunghiuri sînt perpendiculare. În felul acesta, aria totală a triunghiului mare este împărţită în patru fragmente, fiecare din ele constituind o fracţiune din aria totală. Care anume?

2.42. Împărţiţi un triunghi dat, prin trei tăieturi drepte, în şapte fragmente, dintre care patru să fie triunghiuri (iar celelalte trei pentagoane). Unul din fragmentele triunghiulare este cuprins între trei tăieturi, iar fiecare dintre celelalte trei fragmente triunghiulare este cuprins între o anumită latură a triunghiului dat şi două tăieturi. Alegeţi cele trei tăieturi în aşa fel încît cele patru fragmente triunghiulare să fie congruente (adică să aibă aceeaşi formă şi aceeaşi arie). Ce fracţiune din aria triunghiului dat reprezintă aria unui fragment triunghiular rezultat în urma acestei descompuneri?

(Este avantajos, cred, să se analizeze mai întîi o formă particulară a triunghiului dat, pentru care rezolvarea este deosebit de uşoară.)

2.43. Un punct P este în aşa fel situat în interiorul unui dreptunghi încît distanţa lui pînă la unul din vîrfuri este 5, pînă la vîrful opus este 14, iar pînă la un al treilea vîrf este 10. La ce distanţă de cel de-al patrulea vîrf se află punctul?

2.44. Sînt date distanţele a, b şi c de la un punct din planul unui pătrat pînă la trei vîrfuri ale pătratului; a şi c sînt distanţe pînă la vîrfuri opuse.

(I) Să se găsească latura pătratului, s.

(II) Verificaţi rezultatul în următoarele patru cazuri particulare:

(1) $a = b = c$

(2) $b^2 = 2a^2 = 2c^2$

(3) $a = 0$.

(4) $b = 0$.

2.45. Monede egale (cercuri egale) sînt aranjate într-o reţea regulată care acoperă o masă foarte, foarte mare (planul infinit). Analizăm două reţele.

În prima reţea, fiecare monedă atinge alte patru monede, şi liniile drepte care unesc centrele monedelor în contact împart planul în pătrate egale.

În a doua rețea, fiecare monedă atinge șase alte monede, și liniile drepte care unesc centrele monedelor în contact împart planul în triunghiuri echilaterale egale.

Calculați, pentru fiecare din cele două rețele, fracțiunea (procentul) din plan acoperită de monede (cercuri).

(Prima rețea este reprezentată pe fig. 3.9; a doua — pe fig. 3.8.).

2.46. *Geometrie în spațiu.* În interiorul unui cub (o cutie cubică) cu latura a se află nouă sfere care nu se intersectează (nouă bile împachetate în cutie), toate de aceeași rază r. O sferă este concentrică cu cubul și atinge celelalte opt sfere (bilele sînt împachetate compact), fiecare din acestea, la rîndul ei, fiind tangentă la trei din fețele cubului (ele se află în cele opt colțuri ale cubului). Să se exprime r în funcție de a.

(Sau a în funcție de r: trebuie să construiți cutia, considerînd că vi se dau bilele. Există o problemă analogă în geometria plană (vezi ex. 2.32): i-ați putea oare utiliza rezultatul, sau metoda de rezolvare?)

2.47. Imaginați o problemă de geometrie în spațiu analogă celei din ex. 2.43.

2.48. O piramidă se numește „regulată" dacă baza ei este un poligon regulat, și piciorul înălțimii coincide cu centrul bazei.

Toate cele cinci fețe ale unei piramide regulate cu baza pătrată au aceeași arie. Se dă înălțimea h a piramidei, să se găsească aria totală.

2.49. (Continuare). Există o oarecare analogie între o piramidă regulată și un triunghi isoscel; în orice caz, dacă numărul de fețe laterale ale piramidei este dat, ambele figuri, cea plană și cea în spațiu, depind de două date.

Imaginați alte probleme în legătură cu piramidele regulate.

2.50. Imaginați o problemă de geometrie în spațiu analogă ex. 2.38. (Ex. 2.12 ar putea servi drept „punct de sprijin" spre o generalizare.)

2.51. Găsiți aria totală a tetraedrului considerat în ex. 2.13, cunoscînd a, b și c. (Vedeți vreo analogie?)

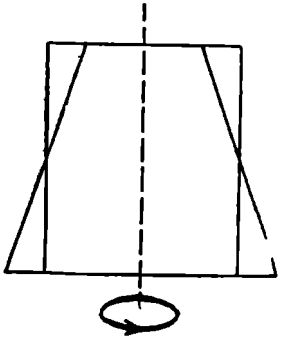


Fig. 2.10. Rotiți-o!

2.52. Dintr-un număr de 12 triunghiuri echilaterale congruente [identice], opt sînt fețele unui octaedru regulat, iar patru sînt fețele unui tetraedru regulat. Calculați raportul dintre volumul octaedrului și volumul tetraedrului.

2.53. Un triunghi care se rotește mai întîi în jurul laturii a, apoi în jurul laturii b și, după aceea, în jurul laturii c, generează trei solide de revoluție. Calculați rapoartele volumelor, și cele ale ariilor totale ale acestor trei solide.

2.54. *O inegalitate.* Un dreptunghi și un trapez isoscel au poziția relativă din fig. 2.10: ele au aceeași axă

(verticală) de simetrie, aceeaşi înălţime h şi aceeaşi arie; dacă $2a$ şi $2b$ sînt respectiv lungimile bazei superioare şi bazei inferioare ale trapezului, atunci baza dreptunghiului are lungimea $a + b$. Rotite în jurul axei comune de simetrie, dreptunghiul descrie un cilindru, iar trapezul — un trunchi de con. Care din aceste două solide are volumul mai mare? (Răspunsul vă poate fi sugerat pe cale geometrică, dar el trebuie demonstrat algebric.)

2.55. *Sferometrul.* Patru puncte A, B, C şi D sînt situate pe suprafaţa unei sfere. Punctele A, B şi C formează un triunghi echilateral de bază a. Perpendiculara din D pe planul ΔABC are lungimea h, şi piciorul ei este în centrul ΔABC.

Cunoscînd a şi h, calculaţi raza sferei, R.

(Această configuraţie geometrică stă la baza construcţiei sferometrului — un instrument cu care se determină curbura unei lentile. La sferometru, A, B şi C sînt extremităţile a trei „picioare" paralele şi fixe, în timp ce extremitatea unui al patrulea „picior", mobil, este adusă pînă în poziţia D cu ajutorul unui dispozitiv cu şurub — tija „piciorului" mobil este filetată; distanţa h este măsurată prin numărul de rotiri ale şurubului.)

2.56. *Graficul timp-deplasare.* În problemele cu mai multe obiecte (puncte materiale) care se deplasează pe un acelaşi traseu, este deseori avantajos să introducem un sistem de coordonate rectangulare în care abscisa reprezintă t, timpul, iar ordonata — s, distanţa măsurată în lungul traseului, începînd de la un punct dinainte fixat. Pentru a ilustra acest procedeu, să revenim la problema pe care am analizat-o în detaliu în 2.4(3).

Măsurăm timpul t şi distanţa s din momentul plecării avionului şi respectiv, de la punctul lui de decolare. În aceste condiţii, după ce avionul a zburat t ore pe traseul „dus", distanţa lui faţă de punctul de plecare este

$$s = (v - w)t.$$

Această ecuaţie, cu v şi w fixe şi cu s şi t variabile, este reprezentată, în sistemul nostru de coordonate, de o dreaptă cu panta $v - w$ (viteza), care trece prin origine [punctul (0, 0), care reprezintă „plecarea" avionului]. Pe drumul de întoarcere, distanţa s şi timpul t sînt legate prin ecuaţia

$$s = -(v + w)(t - T),$$

care reprezintă o dreaptă de pantă $-(v + w)$, ce trece prin punctul $(T, 0)$ (care reprezintă întoarcerea avionului spre punctul de plecare, la momentul prestabilit T).

Intersecţia celor două drepte reprezintă punctul (în spaţiu şi timp) care aparţine simultan, zborului de îndepărtare şi celui de înapoiere, punct în care avionul îşi schimbă direcţia de zbor. În acest punct sînt valabile simultan ambele expresii pentru s, aşa că

$$(v - w)t = -(v + w)(t - T).$$

Această egalitate dă

$$t = \frac{(v + w)T}{2v}$$

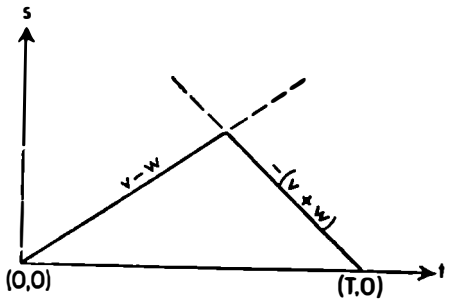


Fig. 2.11. Graficul timp-deplasare

şi prin urmare (folosind oricare din cele două expresii pentru s) se obţine uşor

$$s = \frac{(v^2 - w^2)T}{2v}$$

ca expresie a distanţei punctului extrem atins de avion. Acesta este însă exact rezultatul pe care l-am găsit în 2.4(3) (cu x, în loc de s).

În fig. 2.11 (abstracţie făcînd de porţiunile punctate), zborul avionului este reprezentat de o linie frîntă constituită din două segmente de dreaptă: în punctul a cărui ordonată reprezintă distanţa extremă atinsă de avion, cele două segmente formează un unghi. Linia în ansamblu ne relatează istoria completă a zborului; ea ne arată unde se află avionul într-un moment oarecare, arbitrar ales, precum şi momentul în care avionul a sosit într-un punct oarecare, arbitrar ales; această linie se numeşte — şi denumirea este adecvată — *graficul (diagrama) spaţiu-timp* al zborului (sau, în general, al mişcării considerate).

2.57. Doi curieri călări A şi B, pleacă, dimineaţa, unul spre altul, de la o distanţă de 59 mile. A străbate 7 mile în două ore, iar B — 8 mile în trei ore, însă B îşi începe cursa cu o oră mai tîrziu decît A; să se găsească cîte mile va străbate A înainte de a-l întîlni pe B (Newton).

2.58. (Continuare). Generalizaţi.

2.59. Alec şi Bill locuiesc la extremităţile opuse ale aceleiaşi străzi. Alec are de dus un colet acasă la Bill, iar Bill unul acasă la Alec. Ei pornesc în acelaşi moment; ambii merg cu viteze constante şi se întorc la domiciliu imediat ce au lăsat coletul la destinaţie. Ei se întîlnesc prima dată, venind din direcţii opuse, la o distanţă de a metri de casa lui Alec, şi a doua oară, la o distanţă de b metri de casa lui Bill.

(1) Cît de lungă este strada?

(2) Dacă $a = 300$ şi $b = 400$, care dintre ei merge mai repede?

2.60. Bob, Peter şi Paul călătoresc împreună. Peter şi Paul sînt buni mărşăluitori: fiecare parcurge p mile pe oră. Bob are un picior bolnav şi, de aceea, se serveşte de un mic automobil în care pot lua loc două persoane, dar nu şi trei; automobilul merge cu c mile pe oră. Cei trei prieteni adoptă următorul sistem: ei pleacă o dată, Paul se suie în maşină alături de Bob, iar Peter merge pe jos. După un timp, Bob îl lasă pe Paul să-şi continue drumul pe jos, şi se întoarce să-l ia pe Peter; după aceea, Bob şi Peter călătoresc cu maşina pînă îl ajung din urmă pe Paul. În acel punct, pasagerii se schimbă: Paul urcă în maşină şi Peter pleacă pe jos — exact situaţia de la plecare — şi întregul procedeu va fi repetat de atîtea ori — de cîte se va dovedi necesar.

(1) Cu cîţi kilometri pe oră avansează cei trei prieteni?

(2) Ce fracțiune din durata totală a călătoriei, automobilul transportă numai o persoană?

2.61. (Continuare) Generalizați: Bob, mereu cu piciorul bolnav și la volanul micului său automobil, face același aranjament cu n prieteni, $A, B, C, \ldots, L$ (nu numai cu doi), toți — capabili să mărșăluiască oricît, cu viteza de p kilometri pe oră.

(Desenați graficul spațiu-timp pentru $n = 3$. Verificați cazurile extreme $p = 0$, $p = c$, $n = 1$, $n = \infty$.)

2.62. O piatră cade într-un puț; după zgomotul făcut de piatră cînd lovește fundul, să se determine adîncimea puțului (Newton).

Trebuie să măsurați intervalul de timp T între două momente: momentul în care lăsați piatra să cadă, și cel în care auziți zgomotul. Mai trebuie să cunoașteți,

c — viteza sunetului și

g — accelerația gravitației.

Fiind date T, c și g, găsiți d, adîncimea puțului.

2.63. Să se determine poziția traiectoriei unei comete care se mișcă uniform și rectiliniu, folosind trei observații (Newton).

Fie O — ochiul observatorului, iar A, B și C — pozițiile cometei respectiv la prima, a doua și a treia observație. Din observații, cunoaștem unghiurile

$$\sphericalangle AOB = \omega, \quad \sphericalangle AOC = \omega'$$

și intervalele de timp, t și t', între prima observație și a doua, respectiv între a doua observație și a treia. Din ipoteza că mișcarea este uniformă rezultă

$$\frac{AB}{AC} = \frac{t}{t'}.$$

Cunoscînd ω, ω', t și t', găsiți $\beta = \sphericalangle ABO$.

(Exprimați valoarea unei funcții trigonometrice a unghiului β, de pildă, ctg β, în funcție de ω, ω', t și t'.)

2.64. *Atîtea ecuații — cîte necunoscute.* Găsiți x, y și z din sistemul de trei ecuații

$$\begin{aligned} 3x - y - 2z &= a \\ -2x + 3y - z &= b \\ -x - 2y + 3z &= c \end{aligned}$$

a, b și c fiind date.

(*Poate fi satisfăcută condiția? Condiția este oare suficientă pentru a determina necunoscutele?*)

2.65. *Mai multe ecuații decît necunoscute.* Găsiți trei numere p, q și r astfel încît ecuația

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (px^2 + qx + r)^2$$

să fie o identitate în raport cu variabila x.

(Această problemă implică extragerea „exactă" a rădăcinii pătrate dintr-un polinom de gradul patru dat, operație posibilă în cazul de față, dar nu și în cazul general. De ce — nu?)

2.66. Arătați că nu pot fi găsite șase numere (reale sau complexe) a, b, c, A, B și C, în așa fel încît ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax + by + cz)(Ax + By + Cz)$$

să fie o identitate în raport cu variabilele independente x, y și z.

2.67. *Mai puține ecuații decît necunoscute.* Cineva cumpără porci, capre și oi, în total 100 de capete, și plătește 100 coroane; porcii îl costă $3\frac{1}{2}$ coroane bucata, caprele — $1\frac{1}{3}$ coroane, iar oile — $\frac{1}{2}$ coroane; cîte are din fiecare? (Euler).

Euler rezolvă problema printr-un procedeu numit de el *Regula Caeci* („regula orbului"), în felul următor. Fie x, y și z, numerele de animale cumpărate, respectiv, de porci, de capre și de oi; bineînțeles, x, y și z trebuie să fie numere *întregi* și *pozitive*. Exprimînd mai întîi numărul total de animale, apoi prețul lor total, obținem

$$\begin{aligned} x + \ y + \ z &= 100 \\ 21x + 8y + 3z &= 600, \end{aligned}$$

unde ecuația a doua a fost ușor transformată, ceea ce a adus-o la o formă mai avantajoasă. Dacă eliminăm pe z și rezolvăm în raport cu y ecuația care rezultă, obținem

$$y = 60 - \frac{18x}{5},$$

din care tragem concluzia că

$$\frac{x}{5} = t$$

trebuie să fie un număr întreg.

Continuați rezolvarea.

2.68. Un fabricant de monede (presupunem că el nu „bate" monede false) dispune de trei categorii de argint, prima — de 7 uncii, a doua — de $5\frac{1}{2}$ uncii, și a treia — de $4\frac{1}{2}$ uncii argint fin per marc (un marc are 8 uncii), și vrea să obțină 30 marci de aliaj cu titlul 6 uncii (de argint fin per marc): cîți marci din fiecare categorie trebuie să utilizeze? (Euler; completări — între paranteze.)

Se subînțelege că se caută o soluție în *numere întregi*. În general, dacă condiția admite numai valori întregi ale necunoscutelor, problema se numește *diofantică*.

2.69. Există un număr (întreg) care dă un pătrat dacă îi adăugăm 100, şi un alt pătrat dacă îi adăugăm 168. Care este numărul?

2.70. Colecţia de timbre a lui Bob constă din trei clasoare. Două zecimi din timbrele lui sînt în primul clasor, cîteva şeptimi — în al doilea clasor, iar clasorul al treilea conţine 303 timbre. Cîte timbre are Bob? (Condiţia este oare suficientă pentru a determina necunoscuta?)

2.71. Un anumit sort de pixuri era oferit la preţul de 50 cenţi bucata în magazinul de peste drum de şcoală, dar n-a găsit mulţi cumpărători. Cînd însă magazinul a redus preţul, întregul stoc rămas a fost repede vîndut cu 31,93 dolari. Care a fost noul preţ? (Condiţia este oare suficientă pentru a determina necunoscuta?)

2.72. *Regulile lui Descartes.* Lucrarea marelui filozof şi matematician René Descartes, citată în 2.1, prezintă o deosebită importanţă pentru studiul nostru.

Textul *Regulilor* — aşa cum a fost găsit în manuscrisele lui Descartes — este neterminat şi a fost publicat postum. Descartes proiectase să scrie 36 paragrafe, dar textul nu conţine, de fapt, decît 18 paragrafe, într-o formă mai mult sau mai puţin definitivă, şi rezumatul altor trei paragrafe: restul probabil că n-a fost niciodată scris. Primele 12 paragrafe se ocupă de operaţiile mintale folositoare în rezolvarea problemelor, următoarele 12 paragrafe discută problemele care „pot fi perfect înţelese", iar ultimele 12 paragrafe urmau să se ocupe de problemele care „nu pot fi perfect înţelese"[11].

Fiecare paragraf începe cu o „Regulă", cu o recomandare concisă făcută cititorului, iar paragraful ca atare justifică, explică, exemplifică sau dezvoltă cu mai multe detalii ideea rezumată în Regulă. Noi vom semnala pasajele citate din paragraful care urmează după o anumită regulă, dînd numărul acelei Reguli[12].

Cuvintele lui Descartes vor constitui pentru noi un îndreptar preţios, dar cititorul ar jigni pur şi simplu memoria părintelui „îndoielii carteziene" dacă ar accepta ceva din cele spuse de el, pur şi simplu pe considerentul că „aşa a spus Descartes". În fapt, cititorul n-ar trebui să accepte „de-a gata" nici ceea ce spune autorul de faţă, nici vreun alt autor, oricare ar fi el, şi n-ar trebui să se încreadă prea mult nici măcar în propriile sale impresii de prim moment. După ce-şi va pleca cu onestitate urechea la cele spuse de autor, cititorul n-ar trebui să accepte decît acele propoziţii pe care izbuteşte să le înţeleagă foarte clar prin propriile sale eforturi, sau de care este pe deplin convins pe baza propriei sale experienţe bine sedimentate. Numai procedînd în felul acesta, el va acţiona în spiritul *Regulilor* lui Descartes.

---

[11] Regula XII, p. 60. O problemă este dintre cele care „pot fi înţelese perfect", sau dintre cele care „nu pot fi înţelese perfect", după cum poate fi, sau nu poate fi redusă imediat la o problemă pur matematică — aceasta pare să fie diferenţa cea mai notabilă dintre cele două categorii de probleme.

[12] Aşa cum am făcut la nota 11. G. Pólya citează ediţia curentă, *Oeuvres de Descartes*, publicată de Charles Adam şi Paul Tannery, care, în vol. X, pp. 359—469, conţine originalul latin al *Regulilor* (*Regulae ad directionem ingenii*). Celelalte citate din lucrările lui Descartes se referă la aceeaşi ediţie, dar în note se specifică şi volumul. Paginile indicate în versiunea română a lucrării lui Pólya se referă la traducerea română a *Regulilor*.

2.73. *Degajați problema.* Citățm din Descartes: *Trebuie să abstragem* [problema] *de orice concepție superfluă, să o aducem la (forma) cea mai simplă*[13]. Această recomandare este aplicabilă la toate problemele, de orice tip ar fi ele și de orice grad de dificultate. Să vorbim însă mai concret. Să considerăm un tip curent de problemă „școlărească", o problemă „cu viteze" referitoare la mișcare [cum a fost cea discutată în 2.4(3)]. Obiectul în mișcare pe care îl descrie problema poate fi o persoană, un automobil, un tren, sau un avion, însă, de fapt, natura lui nu are, practic, nici o importanță: rezolvînd problema la acest nivel elementar, noi, efectiv, tratăm obiectul drept un punct material care se mișcă uniform în lungul unui drum rectiliniu. O astfel de simplificare poate fi perfect rezonabilă în unele cazuri, în altele — poate fi ridicolă. Este însă în afară de orice îndoială că un anumit grad de *simplificare* sau de *abstractizare* a situației este inevitabil, cînd reducem o problemă referitoare la obiecte reale, la o problemă matematică, și aceasta fiindcă — evident — o problemă matematică operează exclusiv cu abstracții; de obiectele reale ea nu se ocupă decît indirect, grație unei operații prealabile de trecere de la concret la abstract.

Inginerii și fizicienii, în problemele cu care au ei de-a face, trebuie să reflecteze foarte serios pentru a stabili corect cît de departe se poate merge cu abstractizarea și simplificarea; care anume detalii pot fi neglijate; ce efecte minore pot fi ignorate. Ei au de evitat două pericole diametral opuse: pe de o parte, trebuie să nu facă rezolvarea matematică mult prea dificilă, iar pe de altă parte, trebuie să nu simplifice lucrurile mai mult decît o permite situația fizică. Noi, aici, rezolvînd probleme „școlărești" din cele mai elementare, luăm, de fapt, un foarte util prim contact cu această dilemă permanentă, ne facem o oarecare idee despre natura și aspectele ei. Într-adevăr, una din primele dificultăți pe care trebuie să le depășească începătorul este tocmai obișnuirea cu un anumit grad de simplificare, și dacă despre această dificultate nu se vorbește niciodată deschis, lucrurile pot deveni mult mai grave.

Tot în legătură cu aceasta, mai există o dificultate. Problemele propuse în manualele școlare presupun, în mod tacit, anumite simplificări; de pildă, toate „vitezele" considerate în manualele elementare sînt constante, deși „vitezele" reale (a unui mobil, a unui proces...) pot fi variabile. Începătorul trebuie să se obișnuiască cu aceste presupuneri tacite, trebuie să învețe să *interpreteze* corect anumite formulări abreviate convenționale; și acesta este un punct care trebuie discutat deschis, măcar din cînd în cînd.

(Există și un alt aspect al abstractizării și simplificării inerente tratării matematice, un aspect care este atît de important încît nu se poate să nu-l menționăm, dar care este atît de departe de firul principal al investigației noastre, încît va trebui să-l consemnăm numai foarte pe scurt: precizia cu care efectuăm calculul numeric al necunoscutei trebuie legată exclusiv de gradul de simplificare matematică adoptat, neglijînd complet detaliile care mai intră în formularea inițială, nematematică, a problemei. Dacă calculăm cu mai multe, sau cu mai puține zecimale decît ne îndreptățesc datele, putem greși — „prin exces" sau „prin lipsă". Ce-i drept, la nivelul elementar de predare, nu se ivesc

[13] Regula XIII, p. 61.

prea multe ocazii de a ilustra acest aspect important, dar măcar pe cele care totuşi se ivesc n-ar trebui să le ratăm.)

Pentru o ilustrare instructivă şi nu dintre cele mai evidente a cîtorva din aspectele discutate aici, vezi articolul autorului citat în Bibliografie, la nr. 18.

2.74. *Cunoştinţe relevante. Mobilizarea şi organizarea lor.* Evident, nu putem transpune în ecuaţii o problemă de fizică, dacă nu cunoaştem (sau, mai bine zis, dacă nu presupunem că cunoaştem) faptele (legile) fizice pertinente. De pildă, n-am fi putut rezolva problema tratată în 2.6 dacă n-am fi cunoscut legea lui Arhimede.

Cînd transpunem în ecuaţii o problemă de geometrie, ne folosim, bineînţeles, de propoziţiile (relaţiile, teoremele) de geometrie corespunzătoare. Putem aplica, de pildă, teorema lui Pitagora, sau proporţionalitatea laturilor în triunghiuri asemenea, sau formulele pentru arii sau pentru volume şi aşa mai departe.

Aşadar, dacă nu avem cunoştinţele relevante pentru cazul dat, este sigur că nu vom putea transpune problema în ecuaţii. Dar chiar dacă am dobîndit, cîndva, asemenea cunoştinţe, s-ar putea ca ele să nu ne fie prezente în minte exact în momentul în care avem nevoie de ele; sau, dacă — mai mult sau mai puţin întîmplător — le avem totuşi clare în minte, s-ar putea să nu ne dăm seama imediat de utilitatea lor pentru scopul pe care-l urmărim. Din toate acestea putem degaja clar un fapt care trebuie să ne fie cît se poate de evident: nu este suficient să avem într-o stare latentă cunoştinţele relevante pentru cazul dat; trebuie să ni le reamintim în momentul cînd avem nevoie de ele, trebuie să ni le redeşteptăm în minte, să le *mobilizăm*, să le facem utilizabile pentru scopul urmărit, să le adaptăm problemei pe care ne-am propus-o, să le *organizăm*.

Pe măsură ce rezolvarea progresează, viziunea noastră asupra problemei se schimbă necontenit: pe desen apar noi şi noi linii ajutătoare, în ecuaţii apar noi şi noi necunoscute auxiliare, în structura de ansamblu a problemei sînt introduse noi şi noi elemente mobilizate din memorie, pînă ce, în cele din urmă, figura este saturată, avem exact atîtea ecuaţii — cîte necunoscute, elementele prezente iniţial şi cele chemate succesiv în ajutor se contopesc într-un tot organic. [O ilustrare elocventă este cea din 2.5(3).]

2.75. *Independenţă şi compatibilitate.* Descartes ne recomandă să construim atîtea ecuaţii — cîte necunoscute are problema[14]. Fie n — numărul de necunoscute şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ necunoscutele însele; putem scrie atunci sistemul de ecuaţii căutat sub forma:

$$\begin{aligned} r_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ r_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ r_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

unde $r_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reprezintă un polinom în $x_1, x_2, \ldots, x_n$, iar membrii din stînga celorlalte ecuaţii trebuie interpretaţi în mod analog. Descartes ne recomandă în continuare să reducem acest sistem la o singură ecuaţie finală[15]. Operaţia aceasta este posibilă „în general" (de regulă, în cazurile normale, ...), şi tot „în general", sistemul admite

[14] Regula XIX, p. 92.
[15] Regula XXI, p. 92.

o soluție (un sistem de valori numerice, reale sau complexe, pentru necunoscutele x_1, x_2, ..., x_n, care satisfac simultan cele n ecuații) și nu admite decît un număr finit de soluții (numărul acesta depinde de gradul ecuației finale).

Există însă și cazuri care fac excepție (anormale); nu le putem studia aici în toată generalitatea, dar să analizăm totuși un exemplu simplu.

Să considerăm un sistem de trei ecuații liniare cu trei necunoscute:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0. \end{aligned}$$

În acest sistem, necunoscutele sînt x, y, z, iar cele 12 simboluri a_1, b_1, ... d_3 reprezintă numere reale date. Presupunem că a_1, b_1 și c_1 nu sînt toate egale cu 0, și tot așa presupunem și despre a_2, b_2, c_2 și a_3, b_3, c_3. Cu aceste ipoteze, fiecare din cele trei ecuații reprezintă cîte un plan — dacă considerăm că x, y și z sînt coordonate rectangulare în spațiu; așadar, sistemul nostru de ecuații este reprezentat de o configurație formată din trei plane.

În legătură cu sistemul dat de trei ecuații liniare, distingem mai multe cazuri.

(1) Nu există nici o soluție, adică — nici un sistem de trei numere reale x, y, z care să satisfacă simultan cele trei ecuații. În acest caz spunem că ecuațiile sînt *incompatibile* (între ele), și că sistemul lor este *incompatibil* sau *autocontradictoriu*.

(2) Există o infinitate de soluții; spunem atunci că sistemul este *nedeterminat*. Acesta va fi cazul în care orice triplet de numere x, y, z care satisface două dintre ecuații o satisface și pe a treia, caz în care spunem că ecuația a treia *nu este independentă* de celelalte două.

(3) Nu există decît o singură soluție: ecuațiile sînt *independente*, iar sistemul este *compatibil* sau *determinat*.

Reprezentați-vă în spațiu configurațiile cu trei plane, corespunzătoare celor trei cazuri, și descrieți-le.

2.76. *Soluția unică. O anticipare.* Dacă o problemă de șah, sau una de enigmistică, are mai multe soluții, nu numai una singură, o considerăm imperfectă. În general, se pare că avem o preferință „firească" pentru problemele cu soluție unică — numai ele ni se par „rezonabile", numai ele ni se par „perfecte". Se pare că și Descartes împărtășea această preferință; el spunea: „Pentru ca o chestiune [= problemă] să fie perfectă, voim ca ea să fie în întregime determinată, astfel încît să nu se caute nimic mai mult decît se poate deduce din datele ei"[16].

Soluția problemei noastre este oare unică? *Condiția este oare suficientă pentru a determina necunoscuta?* Deseori ne punem aceste întrebări foarte de timpuriu (și este recomandabil să facem așa) cînd rezolvăm o problemă. Autointerogîndu-ne însă în felul acesta încă de la început, nu pretindem cu tot dinadinsul, sau nu ne așteptăm realmente că am putea da imediat un răspuns definitiv care va fi dat abia de rezolvarea completă;

[16] Regula XIII, p. 61.

tot ceea ce urmărim este un răspuns preliminar, o *anticipare*, o intuire a situației, o conjectură (care ar putea face mai profundă viziunea noastră asupra problemei). Nu rareori acest răspuns preliminar se dovedește corect, dar, cînd și cînd, se mai întîmplă să cădem în cîte o capcană, așa cum se vede din exemplele din 2.8[17].

În treacăt fie spus, se poate ca necunoscuta să fie obținută ca rădăcină a unei ecuații de gradul n cu n rădăcini distincte, unde $n > 1$, și totuși soluția să fie unică — dacă condiția impune ca necunoscuta să aibă o valoare reală, sau una pozitivă, sau una întreagă, iar ecuația de care este vorba nu admite decît o singură rădăcină de tipul cerut.

2.77. *De ce — probleme școlărești?* Cred că-i voi șoca pe unii (sper însă că nu pe mulți) afirmînd că cea mai importantă sarcină globală a predării matematicii în școala medie constă în a-i învăța pe elevi să „pună în ecuație" ca să rezolve probleme „școlărești". Există însă un argument puternic în sprijinul acestui punct de vedere.

Cînd elevul rezolvă o problemă școlărească punînd-o în ecuație el *traduce* o situație reală în termeni matematici: el are ocazia să constate efectiv că noțiunile matematice pot fi corelate cu faptele reale, dar că aceste relații de legătură trebuie elaborate cu multă grijă. Este prima ocazie de a constata acest fapt de bază, pe care i-o oferă programul de învățămînt. Această primă ocazie s-ar putea să fie și ultima pentru elevul care nu va folosi matematica în viitoarea lui profesiune. Dar și viitorii ingineri și oameni de știință, care vor folosi curent matematica în profesiunea lor, o vor folosi în principal pentru a traduce situații reale în concepte matematice. Într-adevăr, de pildă un inginer cîștigă, poate, mai mulți bani decît un matematician, așa că ar putea eventual angaja un matematician care să-i rezolve problemele matematice de care are nevoie; așadar, un viitor inginier nu are neapărat nevoie să studieze matematica ca să învețe *cum să rezolve* probleme. Există însă o operație specific inginerească pe care inginerul n-o poate lăsa complet în seama matematicianului: inginerul trebuie să cunoască el însuși suficientă matematică pentru a ști cum *să transpună în formă matematică* problemele sale de specialitate. Și tocmai de aceea, cînd viitorul inginer învață în școala medie să „pună în ecuație" ca să rezolve probleme școlărești, el ia de fapt un prim contact cu principala utilizare profesională a matematicii, și are ocazia să-și însușească un comportament care îi va fi esențial în profesiune.

2.78. *Alte probleme.* Imaginați cîteva probleme asemănătoare cu cele propuse în acest capitol, dar diferite ca conținut — în special probleme pe care dv. înșivă le-ați putea rezolva.

---

[17] Pentru alte exemple de acest tip, vezi *MRP*, vol. I, pp. 224—226 și problemele 1—12, pp. 235—237.

CAPITOLUL 3

Recurența

3.1. POVESTEA UNEI MICI DESCOPERIRI

Despre micul Gauss, cel care avea să devină, mai tîrziu, marele matematician Carl Friedrich Gauss, circulă o mică istorioară, devenită de acum tradițională. Mie îmi place în mod deosebit următoarea variantă, pe care am auzit-o pe cînd eram eu însumi copil, și mărturisesc că nu m-a interesat niciodată să aflu dacă povestea este sau nu autentică.

„Asta s-a întîmplat pe vremea cînd micuțul Gauss mai era încă la școala primară. Într-o zi, învățătorul dă copiilor o problemă dificilă: să adune numerele 1, 2, 3 și așa mai departe, pînă la 20. Învățătorul se aștepta să aibă cîteva clipe de liniște, pînă ce copiii vor reuși să facă această lungă adunare. De aceea, el a fost neplăcut surprins cînd micul Gauss s-a ridicat din bancă aproape imediat, cînd ceilalți nici nu începuseră bine să lucreze, și punîndu-și tăblița pe catedră îi spune: «Gata». Învățătorul nici nu s-a uitat la tăbliță, într-atît era de convins că răspunsul nu poate fi decît greșit; dar s-a hotărît să-l pedepsească sever pentru neseriozitatea lui. A așteptat pînă ce toți elevii și-au pus tăblițele peste cea a micului Gauss, și după aceea, a luat-o și s-a uitat la ea. Și care nu i-a fost mirarea, găsind pe tăbliță un singur număr — și tocmai numărul corect! Care era acel număr, și cum l-a găsit micul Gauss?"

Bineînțeles, exact cum a procedat micuțul Gauss nu știm, și nu vom fi niciodată în stare s-o aflăm. Nimic însă nu ne împiedică să ne imaginăm ceva care să pară rezonabil. La urma urmelor, micul

Gauss nu era decît un copil — un copil excepţional de inteligent şi de precoce, dar nu mai mult decît un copil. Probabil însă că lui îi era mai uşor, mai firesc, decît altor copii de vîrsta lui să sesizeze miezul problemei, să-şi concentreze atenţia asupra elementului esenţial. Pur şi simplu, el şi-a reprezentat mai clar şi mai net, decît au făcut-o ceilalţi, *ce anume se cerea :* să se calculeze suma

1
2
3
ş.a.m.d.
.
.
.
20

El trebuie că a văzut problema altfel, mai complet, decît ceilalţi ; poate — cu cîteva variante succesive, ca în secvenţa de diagrame *A*, *B*, *C*, *D* şi *E* din fig. 3.1. Enunţul iniţial al problemei pune în evidenţă începutul seriei de numere care trebuie adunate (*A*). Dar noi îi putem pune în evidenţă şi sfîrşitul ei (*B*) sau, şi mai bine, îi putem pune în evidenţă simultan, *atît* începutul, *cît şi* sfîrşitul, (*C*). În acel moment, atenţia ne poate fi atrasă de cele două numere extreme, primul şi ultimul din serie, şi putem sesiza că între aceste două numere există o anumită relaţie (*D*). Şi atunci „apare" ideea (*E*) : Asta-i! — numerele egal depărtate de extreme au aceeaşi sumă, oricare ar fi perechea de numere :

$$1 + 20 = 2 + 19 = \ldots = 10 + 11 = 21$$

şi, prin urmare, suma întregii serii este

$$10 \times 21 = 210.$$

Pe calea aceasta să fi mers, oare, micul Gauss? Departe de mine gîndul de a pretinde aşa ceva. Tot ceea ce vreau să spun este doar că ar fi firesc să se rezolve problema cam în felul acesta. În fapt, noi cum am rezolvat-o? În final, am sesizat situaţia (*E*), „am văzut adevărul clar şi

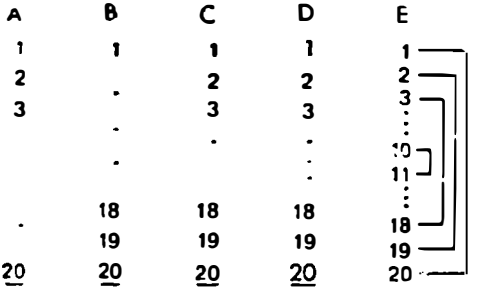


Fig. 3.1. Cinci faze ale unei descoperiri

distinct" — cum ar spune Descartes, am văzut un procedeu convenabil, uşor de pus în practică şi foarte adecvat, de a efectua sumarea cerută. Dar cum am ajuns la această etapă finală? La început, am ezitat între două modalităţi opuse (A şi B) de a concepe problema, pe care am reuşit, în cele din urmă, să le contopim într-o viziune de ansamblu mai bine echilibrată (C). Antagonismul iniţial s-a rezolvat într-o armonie fericită, şi trecerea (D) la ideea finală a devenit practic imediată. Dar tot aceasta să fi fost şi ideea finală a micului Gauss? Şi să fi ajuns el la ea trecînd prin aceleaşi etape? Poate că el a sărit cîteva etape; poate, chiar, că le-a sărit pe toate. Să fi trecut oare micul Gauss direct la concluzia finală? La asemenea întrebări nu putem răspunde. De obicei, o idee „strălucită" apare după o perioadă mai lungă sau mai scurtă de ezitări şi nesiguranţă. Aşa s-a întîmplat în cazul nostru, şi ceva asemănător s-ar fi putut să se întîmple şi în mintea micuţului Gauss.

Să încercăm acum să generalizăm. Pornind de la problema pe care tocmai am rezolvat-o şi înlocuind valoarea particulară 20 cu un număr întreg pozitiv oarecare — să-l notăm cu n — ajungem la următoarea problemă: *Să se găsească suma S a primilor n întregi pozitivi.*

Aşadar, căutăm suma

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Ideea dezvoltată mai sus (şi care s-ar putea foarte bine să fi fost şi cea a micului Gauss) constă în a grupa termenii în perechi: un termen situat la o anumită distanţă faţă de începutul seriei face pereche cu termenul situat la aceeaşi distanţă faţă de sfîrşitul seriei. Cu puţină obişnuinţă în mînuirea operaţiilor algebrice, ajungem uşor la următoarea modificare a acestei scheme.

Scriem suma de două ori — a doua oară, inversînd ordinea termenilor:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

În scrierea de mai sus, termenii asociaţi în perechi prin metoda precedentă de rezolvare apar aliniaţi convenabil pe coloană — ei sînt scrişi unul sub altul. Adunînd cele două ecuaţii obţinem

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$
$$2S = n(n+1)$$
$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aceasta este formula generală. Pentru $n = 20$, ea dă tocmai rezultatul obţinut de micul Gauss — şi este şi normal să fie aşa.

Iată o problemă asemănătoare cu cea rezolvată în paragraful precedent: *Să se găsească suma primelor n pătrate.*

Să notăm cu S suma căutată (nu ne mai considerăm legaţi de notaţiile precedente), aşa că de data aceasta

$$S = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2.$$

Calculul acestei sume nu este chiar evident. Însă prin însăşi natura noastră, ne simţim tentaţi să repetăm procedeul care ne-a reuşit perfect mai înainte, într-o situaţie similară; şi astfel, amintindu-ne cum am procedat în paragraful precedent, am putea încerca să scriem suma de două ori, inversînd a doua oară ordinea termenilor:

$$S = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2$$
$$S = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 9 + 4 + 1$$

Din nefericire, adunarea acestor două ecuaţii, care a reuşit atît de bine, în cazul precedent, de data aceasta nu ne duce nicăieri: tentativa noastră eşuează; am întreprins-o mai mult din optimism, decît dintr-o înţelegere reală a situaţiei, şi imitarea servilă a schemei prestabilite a fost — hai, s-o mărturisim — stupidă. (Ea s-a datorat, în bună parte, unei doze exagerate de inerţie mintală: gîndirea noastră s-a încăpăţînat să meargă pe un acelaşi făgaş cu toate că el s-ar fi cuvenit să fie modificat pentru a ţine seama de intervenţia noilor circumstanţe.) Dar nici chiar o astfel de tentativă eronat concepută nu trebuie considerată total inutilă; ea ne poate duce la o evaluare mai lucidă a problemei propuse: da, problema de acum pare să fie mai dificilă decît cea din paragraful precedent.

Şi iată acum o cale de rezolvare. Pornim de la un caz particular al binecunoscutei formule:

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n - 1$$

din care rezultă că

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Această formulă este valabilă pentru orice valoare a lui n; să o scriem succesiv pentru $n = 1, 2, 3, \ldots, n$:

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$
$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Privind aceste n ecuaţii, ce operaţie se impune ca evidentă? Să le adunăm! Mulţumită unor simplificări care, pur şi simplu, sar în ochi, membrul din stînga al ecuaţiei rezultante va fi foarte simplu. În partea dreaptă avem de adunat trei coloane. Adunarea primei coloane face să apară S, suma pătratelor pe care o căutăm — asta-i foarte bine! Ultima coloană constă din n unităţi — sumarea ei este foarte uşoară. Adunarea coloanei din mijloc face să apară suma primelor n numere — dar suma aceasta o ştim din paragraful precedent. Obţinem:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3S + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

şi în această ecuaţie, totul, cu excepţia lui S, este cunoscut (vreau să spun — este exprimat în funcţie de n), aşa că ecuaţia ne permite să-l determinăm pe S. Într-adevăr, după cîteva operaţii algebrice de rutină, găsim

$$2(n^3 + 3n^2 + 3n) = 6S + 3(n^2 + n) + 2n,$$

$$S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6},$$

şi, în cele din urmă

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Vă place, oare, această rezolvare?

Aş fi teribil de fericit dacă cititorul ar răspunde negativ, cu condiţia însă ca el să explice în mod rezonabil de ce rezolvarea precedentă nu-l satisface. Ce „nu merge" în această rezolvare?

Rezolvarea este, fără îndoială, corectă. Mai mult, ea este eficientă, clară şi scurtă. Să ne amintim că problema părea dificilă — n-ar fi fost rezonabil să ne aşteptăm la o rezolvare „mai" clară şi „mai" scurtă. După cîte îmi dau eu seama, nu există decît o singură obiecţie valabilă: soluţia apare cumva *din senin*, de nicăieri, ca un iepure scos dintr-o pălărie. Comparaţi rezolvarea de aici cu cea din paragraful precedent. Acolo, ne putem reprezenta, într-o oarecare măsură, cum s-a ajuns la descoperirea rezolvării, puteam învăţa cîte ceva despre căile care duc la descoperire, la sfîrşit puteam chiar nutri o oarecare speranţă că, într-o bună zi, vom reuşi şi singuri să descoperim o rezolvare analogă. Or, expunerea din paragraful de faţă nu ne dă nici o indicaţie despre sorgintea descoperirii, ne pune în braţe, pur

şi simplu, ecuaţia iniţială din care decurge totul, dar nu ne dă nici o indicaţie despre modul în care am fi putut găsi şi singuri această ecuaţie. Şi tocmai aceasta dezamăgeşte; ceea ce urmărim aici este să învăţăm să rezolvăm probleme — ce-am putea învăţa din procedeul de rezolvare prezentat mai sus?[1]

3.3. TREBUIE, TOTUŞI, SĂ-L APLICĂM NOI ÎNŞINE

Şi totuşi, din rezolvarea precedentă *putem* învăţa ceva important în legătură cu rezolvarea problemelor. Este adevărat, prezentarea n-a făcut prea multă lumină: ea n-a dezvăluit sorgintea descoperirii, aşa că rezolvarea ni s-a părut un fel de truc, un artificiu de calcul — un procedeu ingenios, dar artificial. Vrem să ştim ce se ascunde în spatele lui? Să încercăm *să-l aplicăm* noi înşine, şi poate că vom afla. Procedeul a reuşit atît de bine, încît pur şi simplu nu ne putem permite să nu încercăm să-l aplicăm.

Începem prin a generaliza. Vom aborda cele două probleme precedente (din 3.1 şi 3.2) dintr-un acelaşi punct de vedere, şi anume ne vom ocupa de suma puterilor k ale primelor n numere naturale:

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

În paragraful precedent am găsit că

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

iar, mai înainte, că

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

la care putem adăuga şi cazul-limită evident, dar poate nu lipsit de interes,

$$S_0 = n.$$

Pornind de la cazurile particulare $k = 0$, 1 şi 2, ne putem pune problema generală: să exprimăm într-un mod analog suma S_k. Trecînd în revistă aceste cazuri particulare, putem chiar face supoziţia (conjectura) — nu lipsită de verosimilitate — că S_k poate fi exprimat ca un polinom de gradul $(k+1)$ în n.

---

[1] Vezi *MRP*, vol. II, paragrafele „Deux ex machina" şi „Justificarea euristică", pp. 171—173.

Este firesc să încercăm şi în cazul general trucul care ne-a reuşit atît de bine în cazul $k = 2$. Dar să examinăm mai întîi cazul particular următor, $k = 3$. Ceea ce avem de făcut este să imităm cele spuse în 3.2, la nivelul imediat superior — operaţia aceasta nu poate fi prea dificilă.

Efectiv, începem prin a aplica formula binomului pentru exponentul imediat superior, exponentul 4:

$$(n + 1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,$$

de unde

$$(n + 1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Această formulă este valabilă pentru orice valoare a lui n; s-o scriem succesiv pentru $n = 1, 2, 3, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
2^4 - 1^4 &= 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\
3^4 - 2^4 &= 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\
4^4 - 3^4 &= 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n + 1)^4 - n^4 &= 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.
\end{aligned}$$

Ca şi mai înainte, adunăm aceste n ecuaţii. Şi de data aceasta, în membrul din stînga au loc o serie de simplificări evidente. În partea dreaptă, sînt de adunat patru coloane, şi fiecare coloană pune în evidenţă o sumă de puteri ale primelor n numere întregi. Într-adevăr, fiecare coloană introduce cîte un caz particular al sumei S_k:

$$(n + 1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0.$$

Dar, conform celor de mai înainte, ştim să exprimăm pe S_2, S_1 şi S_0 în funcţie de n. Folosind acele expresii, transformăm ecuaţia noastră în

$$(n + 1)^4 - 1 = 4S_3 + 6\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + 4\frac{n(n + 1)}{2} + n,$$

unde, cu excepţia lui S_3, totul este exprimat în funcţie de n. Tot ce ne mai rămîne acum de făcut, pentru a determina pe S_3, sînt cîteva operaţii algebrice de rutină:

$$\begin{aligned}
4S_3 &= (n + 1)^4 - (n + 1) - 2n(n + 1) - n(n + 1)(2n + 1) \\
&= (n + 1)[n^3 \quad + 3n^2 + 3n - 2n - n(2n + 1)]
\end{aligned}$$

$$S_3 = \left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]^2.$$

Am ajuns deci la rezultatul căutat; mai mult, însăşi calea pe care am mers pare să fie instructivă: după ce am folosit trucul a doua oară, putem întrevedea o schemă generală. Să ne amintim dictonul unui renumit pedagog: „O metodă este un truc (un artificiu) pe care-l putem aplica de două ori"[2].

3.4. RECURENŢA

Care a fost trăsătura cea mai frapantă a procedeului folosit de noi în 3.3? Pentru a-l obţine pe S_3, am făcut apel la valorile S_2, S_1 şi S_0 determinate anterior. Acesta este mecanismul „trucului" folosit în 3.2, cînd am obţinut suma S_2, recurgînd la sumele S_1 şi S_0 determinate anterior.

De altfel, am fi putut folosi aceeaşi schemă şi pentru a-l deduce pe S_1, obţinut de noi în 3.1 printr-o metodă cu totul diferită. Din formula arhicunoscută

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

rezultă:

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

Scriem succesiv cazurile particulare:

$$\begin{aligned} 2^2 - 1^2 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ 3^2 - 2^2 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 4^2 - 3^2 &= 2 \cdot 3 + 1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ (n + 1)^2 - n^2 &= 2n \quad + 1. \end{aligned}$$

Adunînd totul, obţinem

$$(n + 1)^2 - 1 = 2S_1 + S_0.$$

Dar $S_0 = n$, aşa că

$$S_1 = \frac{(n + 1)^2 - 1 - n}{2} = \frac{n(n + 1)}{2},$$

care este tocmai rezultatul final din 3.1.

După ce am rulat cu succes schema în cazurile particulare $k = 1$, ,2 şi 3, o putem aplica acum fără ezitare la cazul general al sumei S_k.

---

[2] Vezi *CRP*, „Profesorul de matematică tradiţional", p. 167.

De data aceasta avem nevoie de formula binomului pentru puterea $(k+1)$:

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + \binom{k+1}{1} n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \ldots + 1$$

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = (k+1)\, n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \ldots + 1.$$

Scriem unul sub altul cazurile particulare:

$$2^{k+1} - 1^{k+1} = (k+1)1^k + \binom{k+1}{2} 1^{k-1} + \ldots + 1$$

$$3^{k+1} - 2^{k+1} = (k+1)2^k + \binom{k+1}{2} 2^{k-1} + \ldots + 1$$

$$4^{k+1} - 3^{k+1} = (k+1)3^k + \binom{k+1}{2} 3^{k-1} + \ldots + 1$$

. . . . . .

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = (k+1)\, n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \ldots + 1.$$

Adunînd totul obţinem:

$$(n+1)^{k+1} - 1 = (k+1)S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \ldots + S_0.$$

Din această ecuaţie putem determina (adică putem exprima în funcţie de n) pe S_k, cu condiţia să fi determinat anterior pe S_{k-1}, S_{k-2}, ..., S_1 şi S_0. De exemplu, de vreme ce am obţinut mai înainte expresii pentru S_0, S_1, S_2 şi S_3, putem deduce imediat o expresie pentru S_4, prin operaţii algebrice de rutină. Iar după ce-l obţinem pe S_4, putem trece la S_5 şi aşa mai departe[3].

Prin urmare, imitînd „trucul" din 3.2 care, la un moment dat, ni se părea „căzut din cer" sau, apărut „din senin", am ajuns la o schemă care merită să fie formulată şi memorată în vederea unor eventuale aplicaţii viitoare. Cînd avem de-a face cu un şir perfect ordonat (cum este S_0, S_1, $S_2, \ldots, S_k, \ldots$), există şansa de a putea evalua unul cîte unul toţi termenii şirului. Pentru a reuşi, avem nevoie de două lucruri.

[3] Datorăm această metodă lui Pascal; vezi *Oeuvres de Blaise Pascal*, editate de L. Brunschvicg şi P. Boutroux, vol. 3, pp. 341–367.

În primul rînd, trebuie să cunoaştem de undeva termenul iniţial al şirului (în cazul dat, evaluarea lui S_0 era imediată).

În al doilea rînd, trebuie să existe o anumită relaţie care să lege termenul general al şirului, de termenii precedenţi (S_k este legat de S_0, $S_1, \ldots, S_{k-1}$ prin ecuaţia finală din paragraful de faţă, ecuaţie care ne-a fost prefigurată de „trucul" din 3.2).

În aceste condiţii, putem găsi termenii şirului unul după altul, succesiv, sau — cum se spune — *prin recurenţă*, adică „mergînd înapoi" sau recurgînd de fiecare dată la termenii precedenţi. Iată deci, în ce constă schema — foarte importantă — a *recurenţei*.

3.5. ABRACADABRA

Cuvîntul „abracadabra" înseamnă ceva de genul „absurditate complicată". Astăzi folosim cuvîntul acesta cu oarecare dispreţ insolent, dar a fost o vreme cînd el era cuvînt magic, era gravat pe amulete în configuraţii misterioase (de genul celei din fig. 3.2), şi oamenii credeau că un asemenea talisman îl fereşte pe purtător de boli şi de tot felul de nenorociri.

În cîte feluri putem citi cuvîntul „abracadabra" pe fig. 3.2? Se subînţelege că începem totdeauna de la *A*-ul cel mai de sus (cel din vîrful „nordic") şi că citim de sus în jos, trecînd de fiecare dată la litera cea mai apropiată (cea de la „sud-est" sau de la „sud-vest"), pînă ce ajungem la ultimul *A* (cel din colţul „sudic").

Întrebarea este destul de ciudată. Dar ea poate deveni realmente interesantă dacă sesizăm în ea ceva familiar, o situaţie cunoscută din viaţa de toate zilele. Nu vă aminteşte ea hoinăreala, pe jos, sau la volanul unui automobil, pe străzile unui oraş? Închipuiţi-vă un oraş format din cvartale perfect pătrate, în care jumătate din străzi sînt orientate de la nord-vest spre sud-est, iar restul străzilor (sau bulevarde) le intersectează pe primele şi sînt orientate de la nord-est spre sud-vest. Citirea cuvîntului magic din fig. 3.2

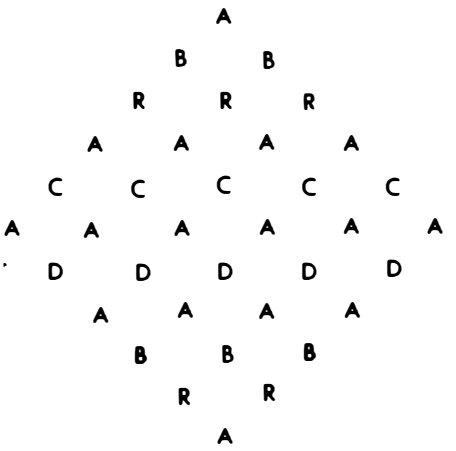


Fig. 3.2. Un cuvînt magic

corespunde unui traseu în zigzag printr-o asemenea rețea de străzi. Cînd parcurgem traseul în zigzag pus în evidență în fig. 3.3, de la *A*-ul inițial pînă la *A*-ul final, trecem de-a lungul a 10 cvartale (socotindu-le numai pe cele de pe o parte a străzii, de pildă, de pe partea stîngă, în direcția de mers). Există multe alte trasee lungi de 10 cvartale, între aceste două puncte extreme ale rețelei date de străzi, dar nici unul care să fie mai scurt. *Să se găsească numărul de trasee distincte, de lungime minimă, prin această rețea, între două puncte date* — iată problema generală, realmente interesantă, care se ascunde sub întrebarea aceea curioasă în legătură cu cuvîntul magic din fig. 3.2.

O formulare generală poate prezenta diferite avantaje. Uneori ea sugerează o cale de abordare a rezolvării, și tocmai așa se întîmplă în cazul nostru. *Dacă nu putem rezolva problema propusă* referitoare la fig. 3.2 (și este probabil că n-o putem rezolva), să *încercăm să rezolvăm mai întîi o problemă înrudită, dar mai simplă.* Or, tocmai

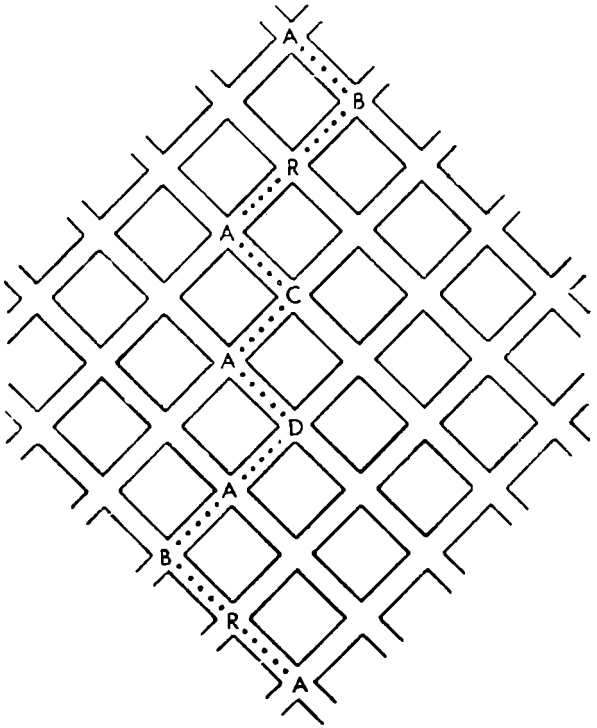


Fig. 3.3. Traseul în zigzag are lungimea minimă posibilă

aici ne poate veni în ajutor formularea generală: ea ne sugerează să încercăm cazurile mai simple cuprinse în acea formulare. Într-adevăr, dacă cele două colţuri date sînt suficient de apropiate unul de altul (mai apropiate decît extremele notate cu A în fig. 3.3), este uşor de numărat direct traseele distincte dintre ele: le putem desena unul după altul şi putem face totalul. Să urmăm această sugestie, şi s-o realizăm sistematic. Pornim din punctul A şi mergem în jos. Ne ocupăm mai întîi de punctele la care putem ajunge străbătînd un cvartal, apoi pe cele pînă la care avem de mers de-a lungul a două cvartale, pe urmă pe cele la distanţă de trei, patru sau mai multe cvartale. Le trecem în revistă pe rînd şi numărăm, pentru fiecare punct, traseele în zigzag de lungime minimă care unesc punctul considerat cu punctul A. În fig. 3.4 sînt notate cîteva numere obţinute în felul acesta (ar fi fost însă bine ca cititorul să fi obţinut singur aceste numere şi chiar cîteva în plus — dacă n-aţi făcut-o, încercaţi măcar să le verificaţi pe cele din figură). Examinaţi cu atenţie aceste numere — remarcaţi vreo particularitate?

Dacă aveţi suficiente cunoştinţe anterioare, puteţi remarca multe lucruri. Dar cel puţin o relaţie interesantă puteţi sesiza chiar dacă n-aţi mai văzut niciodată reţeaua de numere înfăţişată în fig. 3.4: orice număr din fig. 3.4, care nu este numărul 1, este suma altor două numere din reţea, şi anume este suma „vecinilor" lui de la nord-vest şi nord-est. De pildă

$$4 = 1 + 3, \qquad 6 = 3 + 3.$$

Putem descoperi această lege direct, pe cale de observaţie, aşa cum un naturalist descoperă prin observaţie legile ştiinţei sale. Dar după ce am descoperit-o, trebuie să ne întrebăm: De ce se întîmplă aşa? Care este motivul?

Motivul este destul de simplu. Să considerăm trei colţuri („noduri") din reţeaua noastră, şi anume punctele X, Y, şi Z, a căror poziţie relativă este cea marcată pe fig. 3.4: X este vecinul de la nord-vest al punctului Z, iar Y — vecinul de la nord-est. Dacă vrem să ajungem la Z venind de la A pe un traseu de lungime minimă, *trebuie* să trecem fie prin X, fie prin Y. După ce am ajuns în X, de acolo putem trece în Z numai

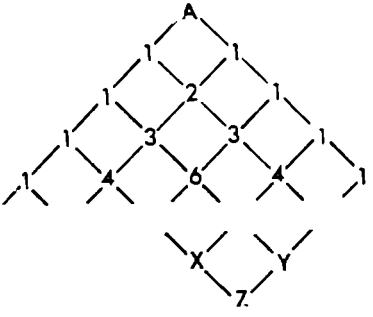


Fig. 3.4. Numărăm traseele în zigzag de lungime minimă

într-un singur mod, şi aceeaşi afirmaţie este valabilă şi pentru trecerea de la *Y* la *Z*. Prin urmare, *numărul total de trasee minime de la A la Z* este suma a doi termeni: el *este egal cu numărul de trasee minime de la A la X, plus numărul de trasee minime de la A la Y*. Constatarea aceasta explică exhaustiv observaţia făcută examinînd fig. 3.4 şi, în acelaşi timp, demonstrează legea generală.

După ce am clarificat acest punct esenţial, putem extinde reţeaua de numere din fig. 3.4, făcînd nişte simple adunări, pînă ce obţinem reţeaua mai largă din fig. 3.5, al cărui vîrf „sud" ne dă răspunsul căutat: cuvîntul magic din fig. 3.2 poate fi citit în exact 252 moduri distincte.

3.6. TRIUNGHIUL LUI PASCAL

Probabil că cititorul a recunoscut de acum numerele şi configuraţia lor specifică, examinate de noi în paragraful precedent. Numerele din fig. 3.4 sînt *coeficienţii binomiali*, iar dispunerea lor sub formă de tabel triunghiular se numeşte curent *triunghiul lui Pascal*. (Pascal însuşi îl numea „triunghi aritmetic".) La triunghiul din fig. 3.4 pot fi adăugate noi şi noi linii şi el poate fi extins, efectiv, oricît de mult. Reţeaua din fig. 3.5 este, de fapt, o porţiune pătrată „tăiată" dintr-un triunghi mai mare.

Unii dintre coeficienţii binomiali şi dispunerea lor într-un tabel triunghiular apar şi în scrierile altor autori, anterioare lucrării lui Pascal *Traité du triangle arithmétique*. Meritele lui Pascal în această chestiune sînt însă cu totul suficiente pentru a justifica folosirea numelui lui.

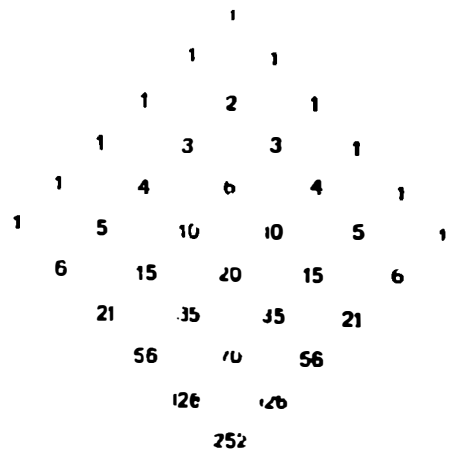


Fig. 3.5. Un pătrat „tăiat" dintr-un triunghi

(1) Trebuie să introducem o *notaţie* adecvată pentru numerele conţinute în triunghiul lui Pascal; pasul acesta este de cea mai mare importanţă. Pentru noi, fiecare număr asociat unui punct din acest triunghi are o semnificaţie geometrică: el indică numărul de trasee distincte, în zigzag, de lungime minimă, de la vîrful triunghiului pînă la punctul respectiv. Fiecare din aceste trasee trece de-a

lungul unui acelaşi număr de cvartale — să spunem, de-a lungul a n cvartale. Mai mult, toate aceste trasee concordă între ele şi în ceea ce priveşte numărul de cvartale străbătute mergînd spre sud-vest şi numărul de cvartale străbătute mergînd spre sud-est. Fie l şi , respectiv, r aceste numere (l înseamnă deplasări spre stînga, iar r — spre dreapta; bineînţeles, şi într-un caz şi în celălalt, direcţia generală este de sus în jos). Evident,

$$n = l + r.$$

Dacă dăm două dintre cele trei numere n, l şi r, al treilea este complet determinat, şi tot aşa este şi punctul la care ele se referă. (De fapt, l şi r sînt coordonatele rectangulare ale punctului faţă de un sistem cu originea în vîrful triunghiului lui Pascal; una din axe este orientată spre sud-vest, cealaltă spre sud-est). De pildă, pentru A-ul final al traseului din fig. 3.3,

$$l = 5,\ r = 5,\ n = 10,$$

iar pentru al doilea B de pe acelaşi traseu,

$$l = 5,\ r = 3,\ n = 8.$$

Vom nota cu $\binom{n}{r}$ (notaţia aceasta o datorăm lui Euler)[4] numărul de trasee minime de la vîrful triunghiului lui Pascal pînă la punctul specificat prin numărul n (numărul total de cvartale) şi numărul r (cvartalele străbătute mergînd spre dreapta). De exemplu, în fig. 3.5,

$$\binom{8}{3} = 56,\quad \binom{10}{5} = 252.$$

Simbolurile pentru numerele conţinute în fig. 3.4 au fost grupate în mod corespunzător, în fig. 3.6. Simbolurile cu acelaşi număr „superior" (cu acelaşi n) se aliniază pe orizontală (în lungul „bazei" de ordinul n — este vorba de baza unui triunghi dreptunghic). Simbolurile cu

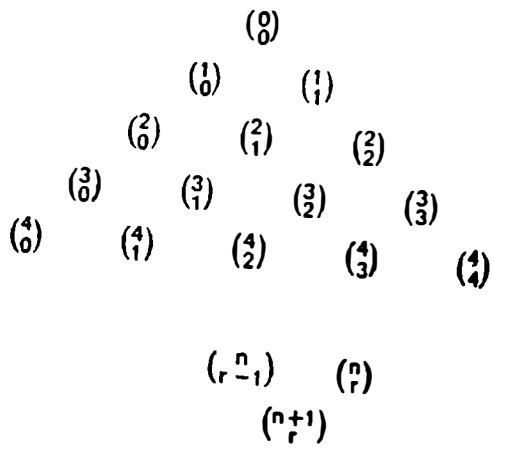


Fig. 3.6. Triunghiul lui Pascal, cu simbolurile combinatoricii

[4] În manualele elementare se foloseşte simbolul C_n^r — „Combinări de n elemente luate cîte r". — *N.T.*

același număr „inferior" (cu același r) se aliniază oblic (în lungul „bulevardului" numărul r). „Bulevardul al cincilea"[5] constituie una din laturile pătratului din fig. 3.5 — latura opusă este constituită de „bulevardul zero" (i-am putea spune însă și altfel, „bulevard mărginaș"[5], sau bordură sau cum preferăm). Pe fig. 3.4 este scoasă în evidență „baza de ordinul 4".

(2) Pe lîngă aspectul lui geometric, triunghiul lui Pascal prezintă și un aspect legat de proprietăți numerice și de calcul. Toate numerele din lungul frontierelor (strada zero, bulevardul zero și punctul lor comun de plecare) sînt egale cu 1 [este cu totul evident că de la punctul de plecare pînă la colțurile („nodurile") de pe aceste străzi mărginașe nu există decît un singur traseu de lungime minimă]. Prin urmare

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Această relație se numește — și denumirea este adecvată — *condiția la limită* a triunghiului lui Pascal.

Orice număr din interiorul triunghiului lui Pascal este situat pe un anumit rînd orizontal, sau — am mai folosit termenul — pe o anumită „bază". Un număr oarecare de pe baza $(n + 1)$ se calculează „mergînd înapoi" — sau „recurgînd" — la cele două numere vecine de pe baza n:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

(vezi fig. 3.6). Este deci potrivit să numim această ecuație — *formula de recurență a triunghiului lui Pascal.*

Din punctul de vedere al proprietăților de calcul, numerele $\binom{n}{r}$ sînt determinate (sau, dacă vreți, sînt definite) de formula de recurență și de condiția la limită a triunghiului lui Pascal.

3.7. INDUCȚIA MATEMATICĂ

Cînd calculăm un număr din triunghiul lui Pascal folosind formula de recurență, trebuie să ne bazăm pe cunoașterea prealabilă a două numere de pe „baza" precedentă. Ar fi însă de dorit să dispunem de o schemă de calcul care să fie independentă de orice cu-

[5] În original, The fifth Avenue și, respectiv, Riverside Drive — mari artere de circulație din New York. — *N.T.*

noştinţe prealabile. Ei bine, există o binecunoscută formulă — o vom numi *formula explicită* a coeficienţilor binomiali — care permite un asemenea calcul independent:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r}.$$

Tratatul lui Pascal conţine formula explicită (exprimată însă în cuvinte, nu în notaţia noastră modernă). Pascal nu spune însă cum a descoperit-o, iar noi nu vom specula prea mult despre modul în care ar fi putut s-o descopere. [Poate că mai întîi el a ghicit-o, pur şi simplu, din observaţii — se întîmplă deseori să găsim asemenea formule prin observaţii directe (vezi remarca de la rezolvarea ex. 3.39).] În schimb, Pascal dă o demonstraţie cu totul remarcabilă a formulei explicite şi aş vrea să ne concentrăm acum toată atenţia asupra metodei lui de demonstrare[6]. Avem nevoie însă de o observaţie preliminară. Luată ca atare, formula explicită nu este aplicabilă în cazul $r = 0$. Vom adopta însă regula că, dacă $r = 0$, formula trebuie interpretată în sensul că

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Aplicînd formula pentru $r = n$ se obţine

$$\binom{n}{n} = \frac{n\,(n-1)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\ldots(n-1)n} = 1,$$

care este rezultatul corect. Prin urmare, tot ce ne mai rămîne de făcut este să demonstrăm formula pentru $0 < r < n$, adică în interiorul triunghiului lui Pascal, acolo unde putem folosi formula de recurenţă. În continuare îl vom cita pe Pascal — cu cîteva modificări neesenţiale dintre care unele vor fi incluse între paranteze drepte [ ].

Deşi această propoziţie [formula explicită] conţine infinit de multe cazuri, voi da o demonstraţie foarte scurtă, care presupune [valabile] două leme.

Prima lemă afirmă că propoziţia este adevărată pentru prima bază [linie], fapt care este evident. [Formula explicită este valabilă pentru $n = 1$ fiindcă, în acest caz, singurele valori posibile pentru r, $r = 0$ şi $r = 1$ intră în observaţia preliminară].

---

[6] Vezi *Operele* lui Pascal, *loc. cit.*, nota de subsol 3, pp. 445—464, în special pp. 456—457. Prezentarea care urmează se prevalează de notaţia modernă şi adaptează unele detalii mai puţin importante.

Lema a doua afirmă următoarele: dacă propoziția se dovedește valabilă pentru o bază oarecare [pentru o valoare oarecare a lui n], atunci ea este în mod necesar valabilă și pentru baza imediat următoare [pentru $n + 1$].

Vedem deci că propoziția este, în mod necesar, valabilă pentru toate valorile n. Căci ea este valabilă pentru $n = 1$, în virtutea primei leme; prin urmare [ea este valabilă și] pentru $n = 2$, în virtutea lemei a doua ; prin urmare [ea este valabilă și] pentru $n = 3$, în virtutea aceleeași leme și așa mai departe, *ad infinitum*.

Așa că nu ne mai rămîne decît să demonstrăm lema a doua.

Conform enunțului lemei a doua, presupunem că formula explicită este valabilă pentru baza (linia) n, adică pentru o anumită valoare n și pentru toate valorile r compatibile cu ea (pentru $r = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$). Aceasta înseamnă, în particular, că pe lîngă formula

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (r-1) \cdot r}$$

avem (dacă $r \geqslant 1$) și formula

$$\binom{n}{r-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \ldots (r-1)}.$$

Adunînd aceste două ecuații și folosind formula de recurență, obținem, ca o consecință necesară

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \ldots (r-1)}\left[\frac{n-r+1}{r} + 1\right]$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \ldots (r-1)} \cdot \frac{n+1}{r}$$

$$= \frac{(n+1)n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}.$$

Cu alte cuvinte, valabilitatea formulei explicite pentru o anumită valoare n implică valabilitatea ei pentru $(n + 1)$. Este exact ceea ce afirma lema a doua — așadar, am demonstrat-o.

Cuvintele lui Pascal citate aici au o importanță istorică, fiindcă demonstrația dată de el constituie primul exemplu de aplicare a unei scheme fundamentale de raționament, care se numește în mod obișnuit, *inducție matematică*.

Această schemă de raţionament merită să fie aprofundată şi studiată mai în amănunt[7]. Dacă este introdus neglijent, fără unele precauţii elementare, raţionamentul prin inducţie matematică poate descumpăni pe începător; într-adevăr, el poate părea un fel de truc diabolic.

Ştiţi, desigur, că diavolul este primejdios: îi dai un deget, şi el îţi ia toată mîna; or, lema a doua a lui Pascal face exact aşa: admiţînd prima lemă, nu i-am dat decît un deget, cazul $n = 1$. Însă după aceea, lema a doua îl ia singură şi pe al doilea (cazul $n = 2$), apoi — pe al treilea ($n = 3$), pe urmă — pe al patrulea şi aşa mai departe, pînă ce le ia, în cele din urmă, pe toate, şi aceasta, chiar dacă — prin cine ştie ce minune — am avea o infinitate de degete.

3.8. DESCOPERIRI ÎN PERSPECTIVĂ

După analiza din cele trei paragrafe precedente, avem acum la dispoziţie trei interpretări, trei moduri distincte de a aborda numerele din triunghiul lui Pascal, coeficienţii binomiali.

(1) *Interpretarea geometrică.* Un coeficient binomial este numărul de drumuri distincte, minime, între două noduri ale unei reţele de străzi.

(2) *Abordarea formală*, adică exclusiv prin calcul. Coeficienţii binomiali pot fi definiţi prin formula lor de recurenţă şi prin condiţia la limită.

(3) *Formula explicită.* Am demonstrat această formulă în 3.7, folosind metoda lui Pascal.

Denumirea numerelor de care ne ocupăm ne mai aminteşte o cale.

(4) *Teorema binomului.* Pentru orice x (fix sau variabil) şi pentru orice întreg nenegativ, n, are loc identitatea

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^n.$$

Pentru o demonstraţie, vezi ex. 3.1.

Există şi alte moduri de a aborda numerele din triunghiul lui Pascal, numere care joacă un rol important în foarte multe probleme interesante şi se bucură de foarte multe proprietăţi interesante. „Acest tabel de numere are proprietăţi eminente şi admirabile" — scria Jacques Bernoulli în a sa *Ars Conjectandi* (Basel, 1713; vezi Partea a doua, cap. III, p. 88). „Noi tocmai ce am arătat că în el stă ascunsă

[7] *CRP*, „Inducţia şi inducţia matematică, pp. 120—126, *MRP*, vol. I, pp. 135—148.

esența combinatoricii [vezi ex. 3.22 — 3.7], dar cei care sînt familiarizați mai de aproape cu geometria știu, de asemenea, că în el sînt ascunse secrete capitale din toată matematică". Timpurile s-au schimbat, și multe lucruri, „ascunse" pe vremea lui Bernoulli, sînt astăzi complet clare. Cu toate acestea, cititorului căruia îi place exercițiul instructiv și poate chiar captivant, i se oferă aici o excelentă ocazie: examinînd numerele din triunghiul lui Pascal și coroborîndu-și observațiile cu una, sau cu alta, sau chiar simultan cu mai multe dintre modalitățile de abordare a acestor numere, el poate încerca, cu reale șanse de succes, să descopere ceva nou. Sînt atîtea și atîtea posibilități — unele s-ar putea să-i fie favorabile.

Și fiindcă vorbim de posibilități — în primele patru paragrafe ale capitolului am atins un alt subiect (suma aceloraşi puteri ale primelor n numere întregi). Apoi, am făcut cunoștință cu două scheme generale importante (recurența și inducția matematică), pe care ar trebui să le aplicăm și la alte exemple, dacă vrem să le înțelegem bine. Așa că perspectivele sînt și mai multe.

3.9. OBSERVAM, GENERALIZAM, DEMONSTRAM ȘI REDEMONSTRAM

Să ne întoarcem la punctul de plecare și să-l examinăm din nou.

(1) Am pornit de la cuvîntul magic din fig. 3.2 și fig. 3.3 sau, mai bine zis, de la o problemă în legătură cu acest cuvînt. Care era necunoscuta? Necunoscuta era numărul de trasee minime în zigzag existente în acea rețea de străzi, de la primul A la ultimul A, adică de la colțul nordic al pătratului la colțul lui sudic. Un asemenea traseu trebuie să intersecteze undeva diagonala orizontală a pătratului. Însă de-a lungul diagonalei orizontale există șase puncte de intersecție posibile (șase intersecții de străzi — șirul format din 6 de A din fig. 3.2). În problema noastră există, prin urmare, șase categorii distincte de trasee în zigzag — cîte trasee sînt în fiecare categorie? Iată o *nouă problemă.*

S-o formulăm însă mai precis. Alegem, pe diagonala orizontală, un anumit punct de intersecție, de pildă al treilea, numărînd de la stînga ($l = 3$, $r = 2$, $n = 5$ — cu notațiile din 3.6). Un traseu care trece prin acest punct de intersecție constă din două porțiuni: o parte „de sus" (superioară) care pornește din colțul nordic al pătratului și se termină în punctul ales, și o parte „de jos" (inferioară) care pornește din punctul ales și se termină în colțul sudic (vezi

fig. 3.3). Am găsit mai înainte (vezi fig. 3.5) numărul de părţi „superioare" distincte; el este

$$\binom{5}{2} = 10.$$

Numărul de părţi „inferioare" distincte este tot acesta. Însă oricare dintre porţiunile superioare poate fi „combinată" cu oricare dintre porţiunile inferioare, obţinîndu-se de fiecare dată un traseu complet [aşa cum sugerează fig. 3.7 (III)]. Prin urmare, numărul de asemenea trasee complete este

$$\binom{5}{2}^2 = 100.$$

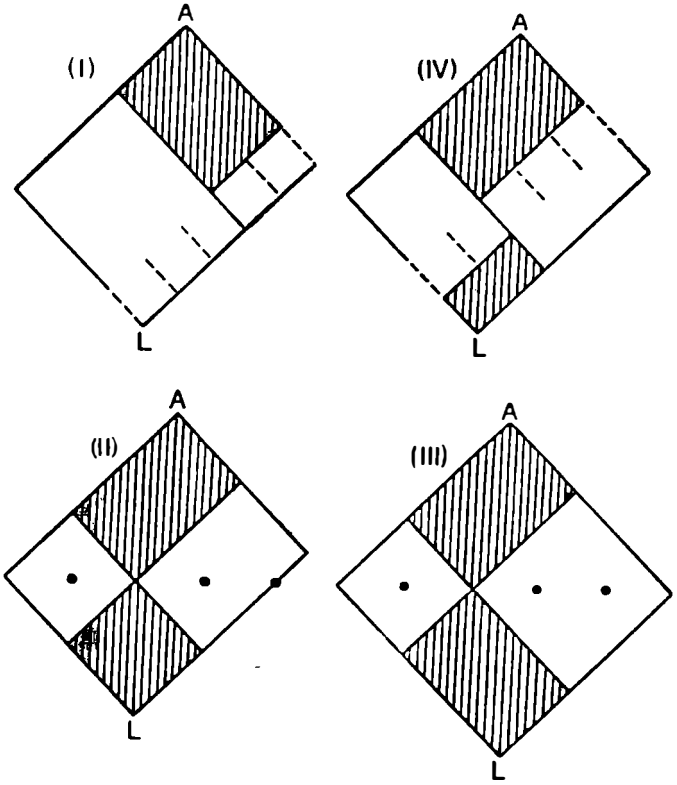


Fig. 3.7. Sugestii

Numărul de trasee în zigzag care intersectează diagonala orizontală în oricare alt punct dat poate fi calculat, evident, în mod analog. Am găsit, prin urmare, o altă soluţie a problemei iniţiale: cuvîntul magic din fig. 3.2 poate fi citit în exact

$$1 + 25 + 100 + 100 + 25 + 1$$

moduri diferite. Această sumă trebuie să coincidă cu rezultatul găsit la sfîrşitul lui 3.5; şi într-adevăr, ea este egală cu 252.

(2) *Generalizare.* O latură a pătratului considerat în fig. 3.3 constă din 5 cvartale. Generalizînd (adică trecînd de la 5 la n) găsim că

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

„Suma pătratelor numerelor de pe baza a n-a a triunghiului lui Pascal este egală cu numărul de la mijlocul bazei a $2n$-a". Raţionamentul de la punctul (1) demonstrează esenţialul acestei propoziţii generale. Este adevărat că am considerat acolo cazul particular $n = 5$ (ba chiar, mai mult, am considerat un punct anumit de pe baza a 5-a) însă cazul particular considerat nu are nici o proprietate aparte (şi nici o particularitate înşelătoare). Aşadar raţionamentul nostru este valabil în general. Ar fi totuşi un exerciţiu util pentru cititor, să repete raţionamentul, cu atenţie sporită la generalitatea lui — trebuie să spună n, în loc de cinci[8].

(3) *Un alt mod de abordare.* Şi totuşi, rezultatul are în el ceva surprinzător. Poate că dacă l-am putea obţine şi pe o altă cale, l-am înţelege mai bine.

Trecînd în revistă diferitele moduri de abordare enumerate în 3.8, am putea încerca să stabilim o legătură între rezultatul obţinut de noi şi formula binomului. Şi într-adevăr, o asemenea legătură există:

$$\begin{aligned}(1 + x)^{2n} &= \ldots + \binom{2n}{n} x^n + \ldots \\ &= (1 + x)^n (1 + x)^n \\ &= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^n\right] \times \\ &\times \left[\binom{n}{n} + \ldots + \binom{n}{2} x^{n-2} + \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{0} x^n\right].\end{aligned}$$

[8] Avem aici ceea ce se numeşte un caz particular *reprezentativ*; vezi *MRP*, vol. I, ex. 10, p. 41.

Să ne concentrăm atenţia asupra coeficientului lui x^n. În membrul din dreapta de pe primul rînd, coeficientul lui x^n este membrul din dreapta al expresiei generale date în (2) pentru care căutăm acum o nouă demonstraţie. Să ne ocupăm de produsul celor doi factori scrişi desfăşurat pe ultimele două rînduri; scriind aceşti factori, am făcut uz de simetria coeficienţilor binomiali

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Or, în acest produs, coeficientul lui x^n este, în mod evident, tocmai membrul din stînga al expresiei din (2) pe care ne-am propus s-o demonstrăm. Şi am şi demonstrat-o: coeficientul lui x^n trebuie să fie acelaşi în ambele cazuri, fiindcă ceea ce avem aici este o identitate în x.

EXEMPLE ŞI COMENTARII LA CAPITOLUL 3

Partea întîi

Exemplele şi comentariile din această primă parte se referă la primele patru paragrafe.

3.1. Demonstraţi teorema binomului enunţată în 3.8(4) (şi folosită în 3.4).

(Folosiţi inducţia matematică. Care dintre primele trei moduri de abordare consemnate în 3.8 vi se pare mai potrivit pentru scopul propus aici?)

3.2. *Un caz particular echivalent cu cazul general.* Identitatea afirmată în 3.8(4) şi demonstrată în ex. 3.1 rezultă ca un caz particular ($a = 1$, $b = x$) din identitatea mai generală

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n.$$

Demonstraţi că, şi invers, identitatea generală decurge din acel caz particular[9].

3.3. În primele trei paragrafe ale acestui capitol am calculat suma S_k (definită în 3.3) pentru $k = 1, 2, 3$; cazul $k = 0$ este evident. Compararea acestor expresii ne poate conduce la teorema generală: *S_k este un polinom în n de gradul $(k+1)$, şi coeficientul termenului de gradul cel mai mare este $1/(k+1)$.*

---

[9] O asemenea echivalenţă între particular şi general poate oarecum descumpăni pe filozof sau pe începător, însă, de fapt, ea este foarte curentă în matematică; vezi *MRP*, vol. I, ex. 3 şi 4 pp. 39—40.

Această teoremă care afirmă că

$$S_k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \dots$$

(unde punctele înlocuiesc termenii de grad mai mic în n) a jucat un rol important în istoria calculului integral.

Demostrați teorema; folosiți inducția matematică.

3.4. Putem „ghici" (= conjectura) o expresie pentru S_4 calculînd raportul S_4/S_2 pentru cîteva valori mici ale lui n. Într-adevăr, pentru

$$n = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5,$$

obținem

$$\frac{S_4}{S_2} = 1, \quad \frac{17}{5}, \quad 7, \quad \frac{59}{5}, \quad \frac{89}{5};$$

din considerente de uniformitate, vom scrie valorile S_4/S_2 astfel:

$$\frac{5}{5}, \quad \frac{17}{5}, \quad \frac{35}{5}, \quad \frac{59}{5}, \quad \frac{89}{5}.$$

Numărătorii sînt aproape niște multipli ai lui 6; într-adevăr, acești numărători sînt

$$6 \cdot 1 - 1, \quad 6 \cdot 3 - 1, \quad 6 \cdot 6 - 1, \quad 6 \cdot 15 - 1.$$

În continuare, trebuie să recunoașteți numerele

$$1, \qquad 3, \qquad 6, \qquad 10, \qquad 15.$$

Dacă ați reușit să construiți o expresie pentru S_4, demonstrați-o, independent de 3.4, prin inducție matematică[10].

3.5. Calculați suma S_4, independent de ex. 3.4 prin metoda indicată în 3.4.

3.6. Arătați că

$$\begin{aligned} n &= S_0 \\ n^2 &= 2S_1 - S_0 \\ n^3 &= 3S_2 - 3S_1 + S_0 \\ n^4 &= 4S_3 - 6S_2 + 4S_1 - S_0. \end{aligned}$$

și, în general, că

$$n^k = \binom{k}{1} S_{k-1} - \binom{k}{2} S_{k-2} + \binom{k}{3} S_{k-3} - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} S_0.$$

(Această expresie este apropiată, dar diferită totuși de formula principală din 3.4.)

---

[10] Pentru o discuție mai amplă a unui caz cu totul analog dar mai simplu, vezi *MRP*, vol. I, pp. 135–137.

3.7. Arătați că

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1 \\ 2S_1^2 &= 2S_2 \\ 4S_1^3 &= 3S_3 + S_2 \\ 8S_1^4 &= 4S_4 + 4S_3 \end{aligned}$$

și, în general, că pentru $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$2^{k-1}S_1^k = \binom{k}{1}S_{2k-1} + \binom{k}{3}S_{2k-3} + \binom{k}{5}S_{2k-5} + \ldots.$$

Ultimul termen al membrului din dreapta este S_k sau kS_{k+1}, după cum k este impar sau par.

(Egalitatea este analogă celei din ex. 3.6, în care, de fapt, putem înlocui pe n^k cu S_0^k).

3.8. Arătați că

$$\begin{aligned} 3S_2S_1 &= 3S_3 \\ 6S_2S_1 &= 5S_4 + S_2 \\ 12S_2S_1^2 &= 7S_5 + 5S_4 \\ 24S_2S_1^3 &= 9S_6 + 14S_5 + S_4 \end{aligned}$$

și, în general, că pentru $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$3 \cdot 2^{k-1}S_2S_1^{k-1} = \left[\binom{k}{0} + 2\binom{k}{1}\right]S_{2k} + \left[\binom{k}{2} + 2\binom{k}{3}\right]S_{2k-2} + \ldots$$

ultimul termen din partea dreaptă fiind $(k+2)S_{k+1}$ sau S_k, după cum k este impar sau par.

3.9. Arătați că

$$\begin{aligned} S_3 &= S_1^3 \\ S_5 &= S_1^3(4S_1 - 1)/3 \\ S_7 &= S_1^3(6S_1^2 - 4S_1 + 1)/3 \end{aligned}$$

și, în general, că S_{2k-1} este un polinom în $S_1 = n(n+1)/2$, de grad k, și divizibil cu S_1^2 atunci cînd $2k - 1 \geqslant 3$. (Această propoziție generalizează rezultatul obținut în 3.3).

3.10. Arătați că

$$\begin{aligned} S_4 &= S_2(6S_1 - 1)/5 \\ S_6 &= S_2(12S_1^2 - 6S_1 + 1)/7 \\ S_8 &= S_2(40S_1^3 - 40S_1^2 + 18S_1 - 3)/15 \end{aligned}$$

și, în general, că S_{2k}/S_2 este un polinom în S_1 de gradul $k - 1$. (Această propoziție generalizează un rezultat întîlnit cu ocazia rezolvării ex. 3.4.)

3.11. Introducem notația

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = S_k(n)$$

care este mai explicită (sau mai adecvată) decît cea introdusă în 3.3; k reprezintă un întreg nenegativ, iar n — un întreg pozitiv.

Să extindem domeniul lui n (dar *nu* și pe cel al lui k): vom considera că $S_k(x)$ reprezintă un polinom în x, de gradul $(k+1)$, care coincide cu $S_k(n)$ pentru $x = 1, 2, 3, \ldots$; de exemplu

$$S_3(x) = \frac{x^2(x+1)^2}{4}.$$

Demonstrați că pentru $k \geqslant 1$ (*nu* însă și pentru $k = 0$)

$$S_k(-x-1) = (-1)^{k-1} S_k(x).$$

3.12. Calculați $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$, suma primelor n numere impare. (Enumerați cît puteți mai multe moduri de abordare.).

3.13. Calculați $1 + 9 + 25 + \ldots + (2n-1)^2$.

3.14. Calculați $1 + 27 + 125 + \ldots + (2n-1)^3$.

3.15. (Continuare) Generalizați.

3.16. Calculați $2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + (3n-1)^2$.

3.17. (Continuare) Generalizați.

3.18. Găsiți o expresie simplă pentru

$$1 \cdot 2 + (1+2)\,3 + (1+2+3)\,4 + \ldots + [1 + 2 + \ldots + (n-1)]\,n.$$

(Bineînțeles, puteți încerca să folosiți unele elemente convenabile din toată analiza de pînă acum. Ce credeți că are șansele cele mai bune să se dovedească utile: rezultatele sau metoda?)

3.19. Considerați următoarele $\dfrac{n(n-1)}{2}$ diferențe

$$\begin{array}{l} 2-1, \\ 3-1,\ 3-2 \\ 4-1,\ 4-2,\ 4-3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n-1,\ n-2,\ n-3,\ \ldots,\ n-(n-1) \end{array}$$

și calculați (*a*) suma lor, (*b*) produsul lor, și (*c*) suma pătratelor lor.

3.20. Definim E_1, E_2, E_3, ... prin identitatea

$$x^n - E_1 x^{n-1} + E_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n E_n = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n).$$

Arătați că

$$E_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$E_2 = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$$

$$E_3 = \frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2}{48}$$

$$E_4 = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n\,(n+1)(15n^3+15n^2-10n-8)}{5760}$$

și, în general, că E_k [care, de fapt, ar trebui notat $E_k(n)$, fiindcă depinde de n] este un polinom de gradul $2k$ în n.

[Gîndiți-vă — o anumită teoremă din algebră v-ar putea fi de foarte mare ajutor; E_k este așa-numita funcție simetrică elementară de rang k a primilor n întregi, a căror sumă a puterilor k este $S_k = S_k(n)$. Verificați că $E_k(k) = k$!]

3.21. *Două forme de inducție matematică.* O propoziție A tipică pentru cele demonstrabile prin inducție matematică este o propoziție care are o infinitate de cazuri A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ...; în fapt, o asemenea propoziție A este echivalentă cu afirmarea simultană a tuturor propozițiilor A_1, A_2, A_3, ... De exemplu, dacă A este teorema binomului, atunci A_n afirmă valabilitatea identității

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

(vezi ex. 3.1); iar teorema binomului afirmă că această identitate este adevărată pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Să considerăm următoarele trei afirmații despre șirul de propoziții A_1, A_2, A_3, ...

(I) A_1 este adevărată.

(IIa) A_n implică A_{n+1}.

(IIb) $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ și A_n luate împreună implică A_{n+1}.

Putem distinge acum două procedee.

(a) Din (I) și din (II*a*) putem ajunge la concluzia că A_n este adevărată în general, pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$; urmîndu-l pe Pascal, am fundamentat această concluzie în 3.7.

(b) Din (I) și din (II*b*) putem ajunge la concluzia că A_n este adevărată în general, pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$; așa am procedat cînd am rezolvat ex. 3.3.

Simțiți însă, probabil, că dintre cele două procedee (*a*) și (*b*) este mai mult de formă decît de fond. Ați putea oare să vă precizați această impresie și să propuneți un raționament clar?

Partea a doua

3.22. Zece băieți — Bernie, Ricky, Abe, Charlie, Al, Dick, Alex, Bill, Roy și Artie — pleacă împreună să-și petreacă sfîrșitul de săptămînă în mijlocul naturii. Seara, așezîndu-și tabăra, ei se împart în două echipe de cîte cinci: o echipă ridică cortul, iar cealaltă pregătește cina. În cîte moduri diferite se poate realiza o asemenea împărțire în două echipe? (Nu știți vreun cuvînt magic care v-ar putea ajuta)?

3.23. Demonstrați că o mulțime formată din n indivizi cuprinde $\binom{n}{r}$ submulțimi distincte de cîte r indivizi. [Într-un limbaj mai consacrat: numărul combinărilor de n obiecte luate cîte r este $\binom{n}{r}$.]

3.24. Într-un plan sînt date n puncte „într-o poziție generală (oarecare)", ceea ce înseamnă că printre ele nu există trei puncte care să fie situate pe o aceeași dreaptă. Cîte drepte puteți trasa unind punctele două cîte două? Cîte triunghiuri puteți forma alegîndu-le vîrfurile printre punctele date?

3.25. (Continuare). Formulați o problemă analogă în spațiu și rezolvați-o.

3.26. Calculați numărul de diagonale ale unui poligon convex cu n laturi.

3.27. Calculați numărul de intersecții ale diagonalelor unui poligon convex cu n laturi. Luați în considerare numai punctele de intersecție din interiorul poligonului și presupuneți că poligonul este „general", așa că nu există trei diagonale care să aibă un punct comun.

3.28. Un poliedru are șase fețe. (Putem considera că poliedrul este neregulat, așa că printre fețele lui nu există două care să fie congruente, adică identice.) Fețele trebuie colorate — una în roșu, două în albastru, și trei în maro. În cîte moduri diferite o putem face?

3.29. Un poliedru are n fețe (printre care nu există însă două care să fie congruente). Dintre aceste fețe, r trebuie colorate în roșu, s în albastru și t în maro închis; presupunem că $r + s + t = n$. În cîte moduri o putem face?

3.30. (Continuare) Generalizați.

Partea a treia

La rezolvarea unora dintre problemele care urmează, cititorul este bine să ia în considerare mai multe moduri de abordare, și să aleagă judicios între ele (vezi 3.8; interpretarea combinatorie a coeficienților binomiali, cf. ex. 3.28, oferă o modalitate în plus). Importanța abordării aceleiași probleme din mai multe direcții a fost subliniată de Leibniz. Iată o traducere liberă a uneia din remarcile sale: „comparînd două expresii diferite ale unei aceleiași cantități, puteți găsi o necunoscută; comparînd două deduceri diferite ale unui aceluiași rezultat, puteți găsi o nouă metodă".

3.31. Demonstrați în cît mai multe moduri că

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

3.32. Să considerăm suma numerelor situate pe o bază a triunghiului lui Pascal:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+1 &= 2 \\ 1+2+1 &= 4 \\ 1+3+3+1 &= 8. \end{aligned}$$

Valorile sumei numerelor de pe bazele succesive par să sugereze o teoremă generală. Ați putea-o intui? Și după aceea, ați putea-o demonstra? Iar după ce ați demonstrat-o, ați mai putea găsi și o altă demonstrație?

3.33. Remarcați că

$$\begin{aligned} 1-1 &= 0 \\ 1-2+1 &= 0 \\ 1-3+3-1 &= 0 \\ 1-4+6-4+1 &= 0 \end{aligned}$$

Generalizați, demonstrați și redemonstrați (pe altă cale).

3.34. Să considerăm suma primelor șase numere de pe al treilea „bulevard" al triunghiului lui Pascal:

$$1+4+10+20+35+56 = 126.$$

Regăsiți această sumă (număr) în triunghiul lui Pascal; încercați să sesizați situații analoge; generalizați; demonstrați și demonstrați din nou.

3.35. Adunați cele 36 numere din fig. 3.5; încercați să regăsiți suma lor în triunghiul lui Pascal; formulați o teoremă generală și demonstrați-o. (Adunarea atîtor numere este o „treabă" plicticoasă — dacă o faceți însă cu un pic de dibăcie, îi puteți sesiza ușor ideea esențială.)

3.36. Încercați să identificați și să localizați în triunghiul lui Pascal numerele implicate în următoarea relație

$$1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 126.$$

Sesizați (sau amintiți-vă) situații analoge; generalizați; demonstrați și demonstrați din nou.

3.37. Încercați să identificați și să localizați în triunghiul lui Pascal numerele implicate în următoarea relație:

$$6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 1 \cdot 21 = 126.$$

Sesizați (sau amintiți-vă) situații analoge; generalizați; demonstrați și demonstrați din nou.

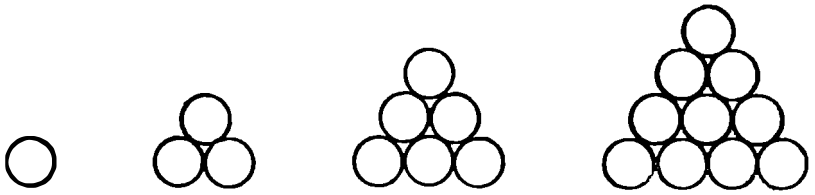


Fig. 3.8. Primele patru numere triunghiulare

3.38. În fig. 3.8 sînt înfăţişate primele patru figuri dintr-un şir infinit în care fiecare figură este o grupare de cercuri egale într-o configuraţie de triunghi echilateral. Fiecare cerc care nu este situat pe marginea grupării respective este tangent la cele şase cercuri care îl înconjură. În figura a n-a există n cercuri de-a lungul fiecărei laturi a grupării triunghiulare, şi numărul total de cercuri din această a n-a figură se numeşte al n-lea *număr triunghiular*. Exprimaţi al n-lea număr triunghiular în funcţie de n, şi găsiţi-i poziţia în triunghiul lui Pascal.

3.39. Înlocuiţi în fig. 3.8 fiecare cerc cu o sferă (o bilă) care are cercul dat drept linie ecuatorială. Fixaţi zece bile grupate ca în fig. 3.8 pe un plan orizontal, aranjaţi deasupra lor alte şase bile (ele se intercalează perfect în interstiţii) formînd un al doilea strat, adăugaţi deasupra lor trei bile formînd al treilea strat, iar sus de tot plasaţi, în fine, încă o bilă. Această configuraţie formată din

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

de bile este asociată unui tetraedru regulat, aşa cum fiecare din grupările de cercuri reprezentate pe fig. 3.8 era asociat unui anumit triunghi echilateral: 20 este al patrulea *număr piramidal*. Exprimaţi al n-lea *număr piramidal* în funcţie de n şi găsiţi-i poziţia în triunghiul lui Pascal.

3.40. Puteţi construi o stivă piramidală de bile şi într-un alt mod: începeţi cu un strat format din n^2 bile aranjate în pătrat ca în fig. 3.9, plasaţi deasupra un al doilea strat format din $(n-1)^2$ bile, apoi altul din $(n-2)^2$ bile etc., şi în fine, în vîrf — o singură bilă. Cîte bile va conţine stiva?

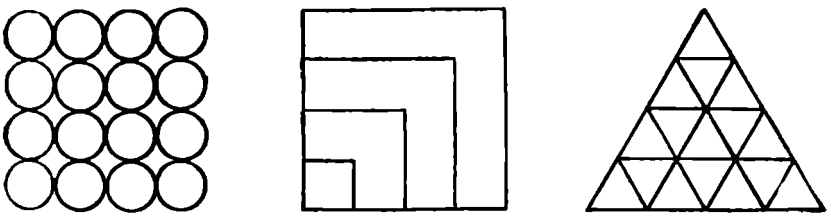


Fig. 3.9. Al patrulea număr pătratic

3.41. Interpretați produsul

$$\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\binom{n_3}{r_3}\cdots\cdots\binom{n_k}{r_k}$$

ca fiind numărul de trasee cuprinse într-o anumită mulțime de trasee în zigzag printr-o rețea de străzi.

3.42. Toate traseele minime de la vîrful triunghiului lui Pascal pînă la punctul specificat prin n (numărul total de cvartale) și r (cvartalele străbătute spre dreapta și în jos) au un punct comun cu dreapta de simetrie a triunghiului lui Pascal (dreapta de la „primul" A la „ultimul" A, în fig. 3.3), și anume punctul lor comun de plecare, vîrful triunghiului. În această mulțime de trasee, considerați submulțimea acelor trasee care *nu* mai au și alt punct comun cu linia de simetrie, și calculați numărul lor, N.

Pentru a înțelege mai bine esența acestei probleme, examinați cîteva cazuri particulare simple:

pentru	$r = 0,$	$n,$	$\frac{n}{2}$ (n-par)
	$N = 1,$	$1,$	0

Rezolvare. Va fi suficient să considerăm cazul $r > \frac{n}{2}$; adică să presupunem că extremitatea inferioară comună a traseelor de care este vorba se află în semiplanul din dreapta axei de simetrie. Există $\binom{n}{r}$ trasee în întreaga mulțime, pe care o vom împărți în trei submulțimi care *nu* se suprapun.

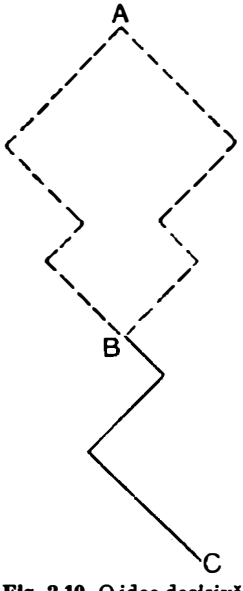


Fig. 3.10. O idee decisivă

(1) Submulțimea definită mai sus și căreia trebuie să-i găsim numărul N de elemente (trasee). Un traseu al mulțimii care *nu* aparține acestei submulțimi are, pe lîngă punctul A, și un alt punct situat pe axa de simetrie.

(2) Traseele care încep cu un cvartal străbătut în jos și spre stînga; un asemenea traseu *trebuie* să intersecteze undeva linia de simetrie fiindcă extremitatea lui se află în celălalt semiplan. Numărul de trasee din această submulțime este, evident, $\binom{n-1}{r}$.

(3) Traseele care nu aparțin nici lui (1), nici lui (2); ele încep cu un cvartal străbătut în jos și spre dreapta însă, după aceea, ating undeva linia de simetrie.

Demonstrați că există tot atît de multe trasee în submulțimea (2), ca în submulțimea (3) (fig. 3.10 sugerează ideea

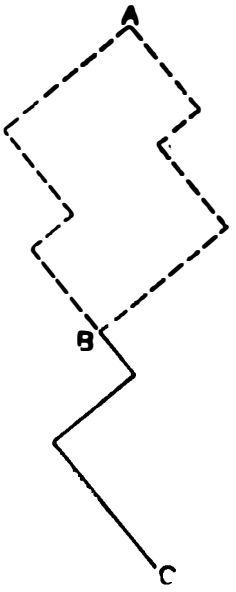


Fig. 3.11. O variantă a ideii decisive

decisivă că între aceste submulțimi există o corespondență biunivocă) și demonstrați, ca o consecință, că

$$N_a = \frac{|2r - n|}{n} \binom{n}{r}.$$

3.43. (Continuare). Numărul total de trasee minime de la vîrf, la bază a n-a, care au în comun cu linia de simetrie numai punctul inițial, este $\binom{2m}{m}$, dacă $n = 2m$ este par, și $2\binom{2m}{m}$, dacă $n = 2m + 1$ este impar.

3.44. *Coeficienții trinomiali.* Fig. 3.12 reprezintă un fragment dintr-o rețea triunghiulară infinită de numere definite prin două condiții.

(1) *Condiția la limită.* Fiecare linie orizontală, sau „bază" (acest termen a mai fost folosit, cu aceeași accepție, în 3.6), începe cu perechea de numere 0, 1 și se termină cu perechea 1, 0. (Baza *a* n-a este formată din $2n + 3$ numere, așa că această condiție la limită lasă nedefinite $2n - 1$ numere de pe baza a n-a, unde $n = 1, 2, 3, \ldots$)

(2) *Formula de recurență.* Orice număr de pe baza $(n + 1)$ care n-a fost definit de condiția (1) se calculează ca sumă a trei numere de pe baza a n-a — suma „vecinilor" de la nord-vest, nord și nord-est. (De exemplu, $45 = 10 + 16 + 19$.)

Calculați numerele de pe baza a 7-a. (Cu trei excepții, toate aceste numere sînt divizibile cu 7.)

3.45. (Continuare). Arătați că numerele de pe baza n-a, începînd cu 1 și terminînd cu 1, sînt coeficienții dezvoltării trinomului $(1 + x + x^2)^n$ după puterile lui x. (De aici — denumirea de „coeficienți trinomiali".)

3.46. (Continuare). Explicați simetria fig. 3.12 față de mediana ei verticală.

					0	1	0					
				0	1	1	1	0				
			0	1	2	3	2	1	0			
		0	1	3	6	7	6	3	1	0		
	0	1	4	10	16	19	16	10	4	1	0	
0	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1	0

Fig.3.12. Coeficienții trinomiali

3.47. (Continuare). Remarcați că

$$1+1+1 = 3$$
$$1+2+3+2+1 = 9$$
$$1+3+6+7+6+3+1 = 27$$

Generalizați și demonstrați.

3.48. (Continuare). Remarcați că

$$1-1+1 = 1$$
$$1-2+3-2+1 = 1$$
$$1-3-6-7+6-3+1 = 1$$

Generalizați și demonstrați.

3.49. (Continuare). Remarcați că valoarea sumei

$$1^3+2^3+3^3+2^3+1^3 = 19$$

este un coeficient trinomial. Generalizați și demonstrați.

3.50. (Continuare). Găsiți linii în fig. 3.12 care coincid cu linii din triunghiul lui Pascal.

3.51. *Triunghiul armonic al lui Leibniz.* Fig. 3.13 reprezintă o porțiune din această mai puțin cunoscută, dar remarcabilă rețea de numere. Ea are proprietăți care sînt — ca să spunem așa — „analogele prin contrast" ale proprietăților triunghiului lui Pascal. Acesta din urmă conține numere întregi, cel de acum (atît cît se vede în figură) — inverse de numere întregi. În triunghiul lui Pascal, fiecare număr este suma vecinilor lui de la nord-vest și nord-est. În triunghiul lui Leibniz fiecare număr este suma vecinilor lui de la sud-vest și sud-est; de pildă:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6};\quad \frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12};\quad \frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}.$$

Aceasta este *formula de recurență* a triunghiului lui Leibniz. Acest triunghi are și o *condiție la limită*; numerele de pe frontiera nord-vestică („bulevardul zero") sînt inversele întregilor succesivi, 1/1, 1/2, 1/3, ... (Condiția la limită a triunghiului lui Pascal este de altă natură: valorile sînt prestabilite de-a lungul întregii frontiere, *atît* de-a lungul „bulevardului zero" *cît și* de-a lungul „străzii zero".)

Pornind de la valorile la limită date, toate celelalte valori se obțin prin adunare — în cazul triunghiului lui Pascal, dar prin scădere — în cazul de față; în fig. 3.13 există cîteva locuri goale (lacune) care pot fi completate imediat cu ajutorul formulei de recurență, de exemplu

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{20}=\frac{1}{5} \text{ și } \frac{1}{7}-\frac{1}{8}=\frac{1}{56}.$$

Folosind condiția la limită și formula de recurență, continuați tabelul din fig. 3.13 pînă la baza a 8-a, inclusiv.

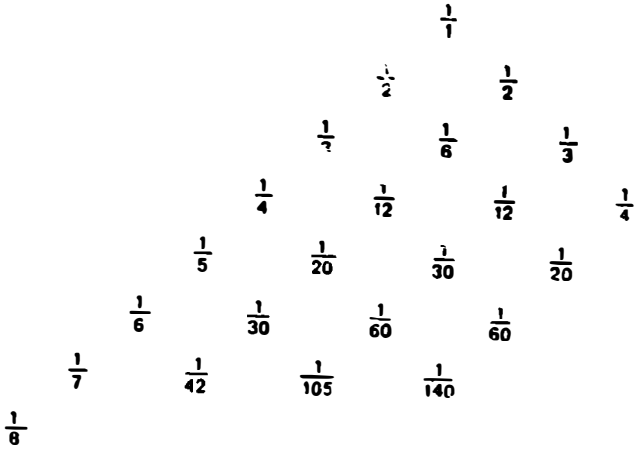


Fig. 3.13. Un fragment din triunghiul armonic al lui Leibniz

† **3.52.** *Pascal și Leibniz.* Încercați să sesizați o legătură între numerele corespondente din cele două triunghiuri, și după aceea, demonstrați-o.

† **3.53.** Demonstrați[11] că

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \dots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \frac{1}{280} + \dots$$

. . . . . .

(Găsiți pozițiile acestor numere în triunghiul armonic.)

3.54. Calculați suma

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \dots$$

și generalizați. (Cunoașteți vreo problemă analogă?)

---

[11] Pentru a nu pune în dificultate pe cititorii care n-au avut ocazia să-și însușească cunoștințe precise despre seriile infinite (limite, convergență, ...) rezolvarea acestei probleme, precum și rezolvările problemelor similare de pe paginile următoare nu vor insista asupra anumitor detalii de rigurozitate. Însă cititorii cu cunoștințe mai complete ar fi bine să restabilească detaliile de această natură omise aici (în majoritatea cazurilor, ele sînt simple).

† **3.55.** Calculaţi sumele seriilor

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\dots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\dots$$

. . . . . .

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot \dots\cdot (r-1)r}+\frac{1}{2\cdot 3\dots r(r+1)}+\frac{1}{3\cdot 4\dots (r+1)(r+2)}+\dots$$

Partea a patra

Cîteva din problemele din această parte sînt legate de ex. 3.61, iar unele dintre celelalte — de ex. 3.70.

† **3.56.** *Serii de puteri.* Fracţia zecimală 3,14159... care reprezintă numărul π este, de fapt, o „serie infinită"

$$3+1\left(\frac{1}{10}\right)+4\left(\frac{1}{10}\right)^2+1\left(\frac{1}{10}\right)^3+5\left(\frac{1}{10}\right)^4+9\left(\frac{1}{10}\right)^5+\dots$$

Înlocuind pe $\frac{1}{10}$ cu *variabila* x, cifrele succesive

$$3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 9,\dots$$

cu *coeficienţi constanţi*

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\dots$$

obţinem *o serie de puteri*

(1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots.$$

Nu sîntem suficient de pregătiţi pentru a ne ocupa aici de convergenţa seriilor de puteri şi de alte subiecte importante legate de această proprietate, aşa că ne vom limita la operaţii formale asupra acestor serii (vezi însă şi nota de subsol de la ex. 3.53). Înmulţirea seriei de puteri de mai sus cu o constantă c dă

$$ca_0+ca_1x+ca_2x^2+ca_3x^3+\dots.$$

Adunarea seriei de puteri (1) cu o altă serie

(2) $$b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$$

dă

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + \dots$$

iar produsul celor două serii de puteri (1) și (2) este

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \dots .$$

Cele două serii de puteri (1) și (2) sînt egale dacă și numai dacă

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \dots,\ a_n = b_n,\ \dots .$$

Un polinom oarecare poate fi considerat o serie de puteri în care o infinitate de coeficienți (și anume — toți coeficienții începînd de la un anumit rang) sînt nuli. De exemplu, polinomul $3x - x^3$ trebuie considerat drept un caz particular al seriei de puteri (1) în care

$$a_0 = 0,\ a_1 = 3, a_2 = 0,\ a_3 = -1 \text{ și } a_n = 0 \text{ pentru } n \geqslant 4.$$

Convingeți-vă, verificînd efectiv, că toate regulile de mai sus sînt, într-adevăr, valabile în cazul polinoamelor.

† **3.57.** Calculați produsul

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots).$$

† **3.58.** Calculați coeficientul lui x^n în produsul

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots)\,(1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots)$$

† **3.59.** O anumită lacună în rezolvarea ex. 3.57 vă poate sugera să examinați seriile

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots$$

$$1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \dots$$

Cunoașteți suma vreuneia din aceste serii? Ați putea calcula sumele celorlalte?

† **3.60.** Dați o altă demonstrație a rezultatului ex. 3.37.

† **3.61.** *Teorema binomului pentru exponenți fracționari și negativi.* Într-o scrisoare din 24 octombrie 1676 adresată secretarului lui Royal Society, Newton povestește cum a descoperit teorema (generală) a binomului; el răspundea, prin această scrisoare, lui Leibniz care îl întrebase care este metoda lui (a lui Newton) de „a face descoperiri"[13]. New-

[13] Cf. J. R. Newman, *The World of Mathematics*, vol. 1, pp. 519—524.

ton s-a ocupat de ariile de sub anumite curbe; el era puternic influențat de ideile lui Wallis cu privire la operațiile de interpolare; în cele din urmă, el a ajuns la o conjectură: *Dezvoltarea*

$$(1 + x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

este valabilă nu numai pentru valori întregi, pozitive, ale exponentului a, ci și pentru valori fracționare și negative, în fapt, pentru orice valori numerice ale lui a[18].

Newton ne prezintă o demonstrație formală a acestei conjecturi și se bazează mai curînd pe exemple și pe o analogie. El a studiat chestiunea, am putea spune, ca un fizician — „experimental" sau „inductiv". Pentru a înțelege punctul lui de vedere, vom încerca să reconstituim cîteva din etapele care l-au convins de veridicitatea conjecturii sale, pe care, pentru concizie, o vom numi „conjectura *N*".

Dacă a este un întreg nenegativ, coeficientul lui x^{a+1} se anulează în membrul din dreapta al seriei produse, și la fel se întîmplă cu toți coeficienții următori (datorită prezenței unui factor 0 la numărător): seria se termină. Dacă însă valoarea lui a nu face parte din șirul 0, 1, 2, 3, ..., seria nu se termină, ci se continuă la infinit. De exemplu, pentru $a = \frac{1}{2}$, dezvoltarea de verificat devine

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots .$$

Newton nu pare să fi fost descumpănit de infinitatea de termeni nenuli. El cunoștea foarte bine analogia, pe care o menționează în altă parte, dintre seriile de puteri și fracțiile zecimale (v. ex. 3.56). Or, unele fracții zecimale au un număr fixat de termeni $\left(\text{cum se întîmplă cu cele care reprezintă pe } \frac{1}{2} \text{ și pe } \frac{3}{5}\right)$, iar altele — nu (de pildă, cele care reprezintă pe $\frac{1}{3}$ și pe $\frac{7}{11}$).

Seria de mai sus reprezintă, oare, corect pe $(1 + x)^{1/2}$? Pentru a expune această chestiune, Newton înmulțește seria cu ea însăși; *rezultatul* trebuie să fie

$$(1 + x)^{1/2}(1 + x)^{1/2} = 1 + x.$$

---

[18] Astăzi știm că asupra lui x trebuie totuși impusă o anumită restricție, dar nu ne vom ocupa de ea aici — pur și simplu, o vom neglija. O asemenea neglijare concordă cu punctul de vedere al lui Newton — fiindcă pe vremea lui convergența unei serii nu fusese încă definită explicit — precum și cu punctul de vedere adoptat de noi în nota de subsol de la p. 110.

Pentru a verifica această identitate, calculați coeficienții lui x, x^2, x^3 și x^4 în produsul de serii (ex. 3.56).

† **3.62.** Calculați coeficienții lui x, x^2, x^3 și x^4 în pătratul seriei

$$1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \dots$$

care este dezvoltarea lui $(1 + x)^{1/3}$ conform conjecturii N. Conform aceleiași conjecturi, rezultatul trebuie să fie dezvoltarea lui $(1 + x)^{2/3}$. Verificați!

† **3.63.** (Continuare). Calculați coeficienții lui x, x^2, x^3 și x^4 în cubul seriei date. Încercați să prevedeți rezultatul, iar după aceea, verificați-vă previziunea.

† **3.64.** Dezvoltați $(1 + x)^{-1}$ conform conjecturii N. N-aveți nimic de comentat?

3.65 *Extindem domeniul.* În 3.6 am definit simbolul $\binom{n}{r}$ pentru n și r — întregi nenegativi, care verifică inegalitatea $r \leqslant n$. Acum vom extinde domeniul lui n (dar *nu* și pe cel al lui r, cf. ex. 3.11): introducem:

$$\binom{x}{a} = 1, \quad \binom{x}{r} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}$$

pentru $r = 0, 1, 2, 3, \dots$ și x — un număr arbitrar. Această definiție implică:

(I) $\binom{x}{r}$ este un polinom în x, de grad r, pentru $r = 0, 1, 2, 3, \dots$.

(II) $\binom{x}{r} = (-1)^r \binom{r-1-x}{r}$.

(III) Dacă n și r sînt întregi nenegativi și $r > n$, $\binom{n}{r} = 0$.

(IV) Conjectura N poate fi scrisă sub forma

$$(1 + x)^a = \binom{a}{0} + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \dots + \binom{a}{n} x^n + \dots$$

(I), (III) și (IV) sînt evidente; demonstrați (II).

† **3.66.** Generalizați ex. 3.64; analizați dacă toate rezultatele parțiale de la ex. 3.59 concordă cu conjectura N.

† **3.67.** Aplicați încă o dată procedeul folosit pînă acum de trei ori (3.9, ex. 3.36 și ex. 3.60): admițînd conjectura N, calculați pe două căi diferite coeficientul lui x^r în dezvoltarea lui

$$(1 + x)^a(1 + x)^b = (1 + x)^{a+b}.$$

† **3.68.** Încercați să apreciați gradul de încredere pe care îl putem acorda rezultatului ex. 3.67; este oare un rezultat demonstrat? Este un rezultat numai în parte demonstrat?

Dacă îl considerăm pe deplin corect, am putea oare demonstra, cu ajutorul lui conjectura N? Sau, am putea oare demonstra măcar o parte a conjecturii N?

† **3.69.** Încercați să recunoașteți coeficienții dezvoltării

$$(1 - 4x)^{-1/2} = 1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + \dots$$

și să exprimați termenul general într-o formă bine cunoscută (care să facă evident faptul că coeficienții sînt numere întregi).

† **3.70.** *Metoda coeficienților nedeterminați.* Să se dezvolte în serie de puteri raportul a două serii de puteri date.

Trebuie să dezvoltăm după puterile variabilei x raportul

$$\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots}$$

unde coeficienții $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$ sînt numere date; presupunem că $a_0 \neq 0$. (Această presupunere, pe care n-am menționat-o în enunțul laconic de mai sus al problemei, este esențială.)

Ni se cere să prezentăm raportul dat sub forma

$$\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots} = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots .$$

Coeficienții $u_0, u_1, u_2, \dots$ nu sînt încă determinați în momentul în care îi introducem (de aici și denumirea metodei pe care sîntem pe cale s-o aplicăm), dar sperăm că în final îi vom determina; de fapt, determinarea lor este tocmai ceea ce ne cere problema; coeficienții $u_0, u_1, u_2, \dots$ sînt necunoscutele problemei noastre (care are, așa cum vedem, o infinitate de necunoscute).

Scriem din nou relația dintre cele trei serii de puteri (dintre care două sînt date, iar a treia ni se cere s-o găsim) sub forma:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)\ (u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots ,$$

ceea ce ne permite să examinăm situația în condiții mai familiare (ex. 3.56): scriind egalitatea între coeficienții aceleiași puteri ale lui x din cei doi membri, obținem un sistem de ecuații:

$$\begin{aligned}
a_0u_0 &= b_0 \\
a_1u_0 + a_0u_1 &= b_1 \\
a_2u_0 + a_1u_1 + a_0u_2 &= b_2 \\
a_3u_0 + a_2u_1 + a_1u_2 + a_0u_3 &= b_3 \\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Acest sistem de ecuaţii are o structură familiară: este un sistem recurent, adică un sistem care poate fi rezolvat prin recurenţă. Obţinem prima necunoscută, u_0, din prima ecuaţie, iar după ce am găsit necunoscutele $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, calculăm necunoscuta imediat următoare, u_n, din prima ecuaţie rămasă încă neutilizată.

Exprimaţi u_0, u_1, u_2 şi u_3 în funcţie de a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2 şi b_3.

(Rezolvarea precedentă poate fi utilizată, în mod avantajos, în calitate de schemă. Reţineţi etapele tipice:

— introducem ca necunoscute coeficienţii unei serii de puteri;

— construim un sistem de ecuaţii, comparînd între ei coeficienţii aceloraşi puteri din cei doi membri ai unei relaţii între serii de puteri;

— calculăm necunoscutele prin recurenţă.

Aceste etape caracterizează schema, sau metoda, numită a „coeficienţilor nedeterminaţi", care conduce la unele din cele mai remarcabile şi mai utile sisteme de ecuaţii rezolvabile prin recurenţă.)

† **3.71.** Să considerăm produsul de puteri

$$a_i^{\alpha_i} a_j^{\alpha_j} a_k^{\alpha_k} b_l^{\beta_l} b_m^{\beta_m}$$

în care, prin definiţie,

$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k + \beta_l + \beta_m$	este *gradul* (produsului),
$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$	este *gradul în* a,
$\beta_l + \beta_m$	este *gradul în* b,
$i\alpha_i + j\alpha_j + k\alpha_k + l\beta_l + m\beta_m$	este *ponderea* (produsului).

Bineînţeles, definiţiile introduse rămîn valabile oricare ar fi numărul de a şi de b care intervine în produs, nu numai pentru exact trei factori de tip a şi exact doi factori de tip b.

Examinaţi expresiile pentru u_0, u_1, u_2 şi u_3 pe care le-aţi obţinut rezolvînd ex. 3.70 şi eplicaţi regularităţile observate.

† **3.72.** Dezvoltaţi raportul

$$\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots}{1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots}$$

(Rezultatul este foarte simplu — l-aţi putea utiliza?)

† **3.73.** Dezvoltaţi raportul

$$\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots}{1 - x}$$

(Rezultatul este foarte simplu — l-aţi putea utiliza?)

† **3.74.** Dezvoltați raportul

$$\frac{1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{15} + \frac{x^3}{105} + \ldots + \frac{x^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)} + \ldots}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + \ldots + \frac{x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} + \ldots}$$

(Calculați cîțiva termeni și încercați să ghiciți termenul general.)

† **3.75.** *Inversa unei serii de puteri.* Fiind dată seria de puteri a unei funcții, să se găsească seria de puteri a funcției inverse.

Cu alte cuvinte: fiind dată dezvoltarea lui x după puterile lui y, să se dezvolte y după puterile lui x.

Mai precis: fiind dată relația

$$x = a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n + \ldots$$

și presupunînd că $a_1 \neq 0$, să se găsească dezvoltarea

$$y = u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots.$$

Vom aplica schema din ex. 3.70. În dezvoltarea dată a lui x după puterile lui y, înlocuim pe y cu dezvoltarea lui (căutată) în serie de puteri:

$$\begin{aligned} x = {} & a_1(u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots) \\ & + a_2(u_1^2 x^2 + 2u_1 u_2 x^3 + \ldots) \\ & + a_3(u_1^3 x^3 + \ldots) \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Egalînd coeficienții acelorași puteri ale lui x din cei doi membri ai acestei relații, obținem un sistem de ecuații pentru $u_1, u_2, u_3, \ldots$:

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 u_1 \\ 0 &= a_1 u_2 + a_2 u_1^2 \\ 0 &= a_1 u_3 + 2a_2 u_1 u_2 + a_3 u_1^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

și sistemul astfel obținut este recursiv (cu toate că nu este liniar.)

Exprimați u_1, u_2, u_3, u_4 și u_5 în funcție de a_1, a_2, a_3, a_4 și a_5.

† **3.76.** Examinați gradul și ponderea expresiilor pe care le-ați obținut ca răspuns la ex. 3.75.

† **3.77.** Fiind dat

$$x = y + y^2 + y^3 + \ldots + y^n + \ldots$$

dezvoltați pe y după puterile lui x.

(Rezultatul este foarte simplu — l-ați putea utiliza?)

† **3.78.** Fiind dat

$$4x = 2y - 3y^2 + 4y^3 - 5y^4 + \dots$$

dezvoltaţi pe y după puterile lui x. (Încercaţi să ghiciţi forma termenului general şi, după aceea, încercaţi s-o explicaţi.)

† **3.79.** Fiind dat

$$x = y + ay^2$$

dezvoltaţi pe y după puterile lui x. (Rezultatul poate fi folosit pentru a lămuri un detaliu al situaţiei generale considerate în ex. 3.75.)

† **3.80.** Fiind dat

$$x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \dots + \frac{y^n}{n!} + \dots$$

dezvoltaţi pe y după puterile lui x.

† **3.81.** *Ecuaţii diferenţiale.* Să se dezvolte după puterile lui x funcţia y care satisface *ecuaţia diferenţială*

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

şi *condiţia iniţială*

$$\text{pentru } x = 0, \quad y = 1.$$

Aplicînd schema de la ex. 3.70, introducem

$$y = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_3 x^3 + \dots,$$

unde coeficienţii u_0, u_1, u_2, ... rămîn să fie determinaţi. Ecuaţia diferenţială cere ca

$$u_1 + 2u_2 x + 3u_3 x^2 + 4u_4 x^3 + \dots =$$
$$= u_0^2 + 2u_0 u_1 x + (2u_0 u_2 + u_1^2 + 1)\, x^2 + \dots$$

Comparînd coeficienţii aceloraşi puteri din cei doi membri ai acestei relaţii, obţinem sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0^2 \\ 2u_2 &= 2u_0 u_1 \\ 3u_3 &= 2u_0 u_2 + u_1^2 + 1 \\ 4u_4 &= 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Din acest sistem putem găsi pe u_1, u_2, u_3, ... prin recurenţă, fiindcă condiţia iniţială dă

$$u_0 = 1.$$

Calculaţi valorile numerice ale lui u_1, u_2, u_3 şi u_4.

(Rezolvarea ecuațiilor diferențiale prin metoda coeficienților nedeterminați — ilustrată în acest exemplu — este de mare importanță atît teoretică, cît și practică.)

† **3.82.** (Continuare). Demonstrați că pentru $n \geqslant 3$, $u_n > 1$.

† **3.83.** Dezvoltați după puterile lui x funcția y care satisface ecuația diferențială

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

și condițiile inițiale

$$\text{pentru } x = 0, \quad y = 1 \quad \text{și} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

† **3.84.** Calculați coeficientul lui x^{100} în dezvoltarea în serie de puteri a funcției

$$(1 - x)^{-1}(1 - x^5)^{-1}(1 - x^{10})^{-1}(1 - x^{25})^{-1}(1 - x^{50})^{-1}.$$

Este aproape neîndoielnic că pentru a rezolva problema propusă, va trebui s-o generalizăm și să căutăm căi și procedee de a calcula coeficientul general (cel al lui x^n) în dezvoltarea considerată. Este de asemenea de recomandat să examinăm problemele analoge, mai simple, implicate de problema propusă. Cîteva clipe de reflecție asupra acestor rînduri ne pot sugera, în cele din urmă, un plan: să introducem *mai multe* serii de puteri cu coeficienți „nedeterminați". Introducem, așadar

$$(1 - x)^{-1} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots$$
$$(1 - x)^{-1}(1 - x^5)^{-1} = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + \ldots$$
$$(1 - x)^{-1}(1 - x^5)^{-1}(1 - x^{10})^{-1} = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots$$
$$(1 - x)^{-1}(1 - x^5)^{-1}(1 - x^{10})^{-1}(1 - x^{25})^{-1} = D_0 + D_1x + D_2x^2 + \ldots$$

și, în fine,

$$(1 - x)^{-1}(1 - x^5)^{-1}(1 - x^{10})^{-1}(1 - x^{25})^{-1}(1 - x^{50})^{-1} = E_0 + E_1x + E_2x^2 + \ldots + E_nx^n + \ldots.$$

Cu această notație, problema propusă cere să se calculeze E_{100}. Însă în locul acelei singure necunoscute inițiale, E_{100}, am introdus infinit de multe noi necunoscute: trebuie să găsim pe A_n, B_n, C_n, D_n și E_n, pentru $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Da — dar pentru unele din aceste necunoscute rezultatul este bine cunoscut sau evident.

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_n = \ldots = 1$$
$$B_0 = C_0 = D_0 = E_0 = 1.$$

Mai mult, necunoscutele introduse nu sînt necorelate:

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots)(1 - x^5)$$

de unde conchidem, examinînd coeficientul lui x^n, că

$$A_n = B_n - B_{n-5}.$$

Găsiți relații analoge și intermediare prin care necunoscuta E_{100} este legată de valorile deja cunoscute. În cele din urmă trebuie să obțineți o valoare numerică pentru E_{100}.

† **385.** Calculați derivata a n-a, $y^{(n)}$, a funcției $y = x^{-1}\ln x$. Prin derivare directă și transformări algebrice, obținem, succesiv

$$y' = -x^{-2}\ln x + x^{-2}$$
$$y'' = 2x^{-3}\ln x - 3x^{-3}$$
$$y''' = -6x^{-4}\ln x + 11x^{-4}$$

și din aceste (sau — din mai multe) cazuri, putem ghici că derivata a n-a pe care o căutăm este de forma

$$y^{(n)} = (-1)^n n!x^{-n-1}\ln x + (-1)^{n-1}c_n x^{-n-1},$$

unde c_n este un număr întreg care depinde de n (dar este independent de x). Demonstrați această formulă și exprimați pe c_n în funcție de n.

3.86. Găsiți o expresie compactă pentru

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

(Cunoașteți vreo problemă înrudită? I-ați putea folosi rezultatul — sau măcar metoda de rezolvare?)

3.87. Găsiți o expresie compactă pentru

$$1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2x^{n-1} + \ldots$$

(Cunoașteți vreo problemă înrudită? I-ați putea folosi rezultatul — sau măcar metoda de rezolvare?)

3.88. (Continuare) Generalizați.

3.89. Fiind dat

$$a_{n+1} = a_n \frac{n + \alpha}{n + 1 + \beta}$$

pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$ și $\alpha \neq \beta$, demonstrați că

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{a_n(n + \alpha) - a_1(1 + \beta)}{\alpha - \beta}.$$

3.90. Calculați

$$\frac{p}{q} + \frac{p}{q}\frac{p+1}{q+1} + \frac{p}{q}\frac{p+1}{q+1}\frac{p+2}{q+2} + \ldots + \frac{p}{q}\frac{p+1}{q+1}\frac{p+2}{q+2}\cdots\frac{p+n-1}{q+n-1}.$$

3.91. *În legătură cu numărul* π. Considerăm cercul unitar (raza lui = 1) ; să circumscriem și înscriem în el un poligon regulat cu n laturi ; fie C_n (circumscris) și respectiv I_n (înscris) perimetrele acestor două poligoane.

Introducem notațiile abreviate

$$\frac{a+b}{2} = A(a, b),\ \sqrt{ab} = G(a, b),\ \frac{2ab}{a+b} = H(a, b)$$

(care reprezintă respectiv mediile aritmetică, geometrică și armonică).

(1) Calculați C_4, I_4, C_6, I_6.

(2) Demonstrați că

$$C_{2n} = H(C_n, I_n), \qquad I_{2n} = G(I_n, C_{2n}).$$

(Ceea ce înseamnă că pornind de la C_6, I_6 putem calcula șirul de numere

$$C_6, I_6;\quad C_{12}, I_{12};\quad C_{24}, I_{24};\quad C_{48}, I_{48};\quad \ldots$$

prin recurență, mergînd oricît de departe dorim, așa că putem încadra numărul π între două limite numerice, a căror diferență poate fi făcută arbitrar de mică. Calculînd primele zece numere ale șirului, adică considerînd poligoane cu 96 de laturi, Arhimede a găsit că

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

(Vezi *Operele* lui Arhimede, editate de T. L. Heath, Dover, pp. 91—98.)

3.92. *Alte probleme.* Imaginați cîteva probleme înrudite cu cele propuse în acest capitol, dar diferite de acestea — în special probleme pe care dv. înșivă le-ați putea rezolva.

CAPITOLUL 4

Superpoziţia

4.1. INTERPOLAREA

Pentru a ajunge la formularea finală a problemei de care urmează să ne ocupăm, este nevoie să parcurgem cîteva etape.

(1) Ni se dau n abscise diferite

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$$

şi cele n ordonate corespunzătoare

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,$$

prin urmare ni se dau n puncte diferite

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3),\ \ldots,\ (x_n,\ y_n).$$

Ni se cere să găsim o funcţie $f(x)$ ale cărei valori în abscisele date să fie tocmai ordonatele corespunzătoare:

$$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2,\ f(x_3) = y_3,\ \ldots,\ f(x_n) = y_n.$$

Cu alte cuvinte, ni se cere să găsim o curbă, de ecuaţie $y = f(x)$, care să treacă prin cele n puncte date (vezi fig. 4.1). Aceasta este problema *interpolării*. Să explorăm mai întîi fundalul acestei probleme; o asemenea investigaţie s-ar putea să ne mărească interesul pentru problemă şi prin aceasta, şansele de a o rezolva.

(2) Problema interpolării se poate pune ori de cîte ori analizăm o cantitate (mărime) y care depinde de o altă cantitate x. Să luăm un caz mai concret: fie x — temperatura şi y — lungimea unei tije omogene, menţinute la o temperatură constantă. Fiecărei temperaturi x îi corespunde o anumită lungime y a tijei — acesta este sensul pe care îl subînţelegem cînd spunem că y *depinde* de x, sau că y este o *funcţie* de x, sau cînd scriem $y = f(x)$. Studiind experimental dependenţa lui y de x, fizicianul încălzeşte tija la diferite temperaturi

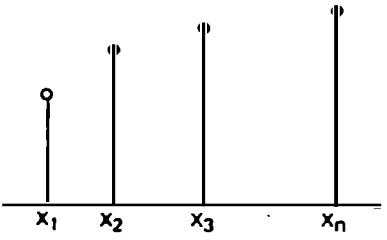


Fig. 4.1. Interpolarea

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_n$$

şi măsurînd lungimea tijei la fiecare din aceste temperaturi, găseşte valorile

$$y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots,\ y_n.$$

Dar, bineînţeles, fizicianul ar vrea să ştie care este lungimea y şi la unele temperaturi x pe care n-a avut încă posibilitatea să le observe direct. Cu alte cuvinte, fizicianul ar vrea ca, pe baza celor n observaţii, să reconstituie, în întregime, funcţia $y = f(x)$, în întreg intervalul de variaţie al variabilei independente x — şi în felul acesta, el îşi pune problema interpolării.

(3) Să reţinem — ca o paranteză — că problema fizicianului este, de fapt, mai complicată. Valorile pe care le-a obţinut el, $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ nu sînt „valorile adevărate" ale cantităţilor măsurate, ci sînt nişte valori afectate de inevitabile erori de măsurare. De aceea, curba pe care o caută el nu trebuie să treacă neapărat *prin* punctele date — ea poate să treacă şi *prin apropierea lor.*

În afară de aceasta, se obişnuieşte să se distingă două cazuri: abscisa pînă acum neobservată, x, pentru care fizicianul vrea să găsească ordonata corespunzătoare, y, se poate afla *în intervalul* dintre valorile extreme observate (x_1 şi x_n, în fig. 4.1), sau se poate afla *în afara* acestui interval, în primul caz se vorbeşte, prin convenţie, de *interpolare*, iar în celălalt — de *extrapolare.* (Se consideră, de regulă, că în operaţia de interpolare se poate avea mai multă încredere decît în cea de extrapolare.)

Dar să facem abstracţie, deocamdată, de această distincţie şi de celelalte observaţii din acest subparagraf; să închidem paranteza şi să ne întoarcem la punctul de vedere din (1) şi (2).

(4) Problema pusă în subparagraful (1) este extrem de nedeterminată: există nenumărat de multe şi de variate curbe care trec prin n puncte date. Luate ca atare, cele n observaţii de care dispune fizicianul nu-l îndrituiesc în nici un fel să prefere vreuna din aceste curbe, faţă de celelalte; iar dacă se hotărăşte totuşi să traseze o anumită curbă, el trebuie să aibă pentru această alegere o justificare *dinafara* celor n observaţii — în ce-ar putea consta o astfel de justificare?

În felul acesta, problema interpolării ridică (fapt care-i sporeşte considerabil interesul) o întrebare generală: ce (sau cine) anume sugerează, sau justifică, trecerea de la observaţii date şi de la o anumită reprezentare mintală a situaţiei de ansamblu, la o formulare matematică? Aceasta este o întrebare majoră de ordin filozofic, numai că, deoarece este destul de puţin probabil că la întrebările filozofice majore s-ar putea răspunde satisfăcător[1], vom prefera să ne ocupăm de un alt aspect al problemei interpolării.

(5) Ar părea foarte firesc să modificăm problema formulată în (1) şi să ne propunem să găsim curba *cea mai simplă* care trece prin cele n puncte date. Această modificare lasă însă problema nedeterminată, şi chiar vagă, fiindcă „simplitatea" este greu de admis drept o calitate obiectivă: în mod inerent, evaluăm gradul de simplitate în funcţie de preferinţele noastre personale, de punctul nostru de vedere, de pregătirea generală, şi chiar în funcţie de anumite idei înrădăcinate sau „obişnuinţe" ale intelectului.

Totuşi, în cazul problemei noastre, putem da termenului „simplu" o interpretare care pare acceptabilă şi conduce la o formulare determinată şi utilizabilă în practică. În primul rînd, să considerăm drept operaţii de calcul „cele mai simple", operaţiile de adunare, scădere şi înmulţire. După aceea, să considerăm drept funcţii „cele mai simple", acele funcţii ale căror valori pot fi calculate exclusiv prin operaţiile de calcul „cele mai simple" (cele definite ca atare mai sus). Dacă acceptăm aceste două puncte, automat trebuie să considerăm că funcţiile „cele mai simple" sînt polinoamele; un polinom este o funcţie de forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

[1] Autorul exagerează întru cîtva dificultatea răspunsului: în fapt, *forma* funcţiei $f(x)$ care trebuie căutată este *impusă* de însuşi fenomenul studiat; trebuie însă ca „reprezentarea mintală" de care vorbeşte autorul să reflecte *adecvat* realitatea obiectivă, ceea ce nu este de loc uşor de realizat şi, de cele mai multe ori, constituie performanţa cea mai de preţ a fizicianului. Aici însă se face abstracţie de natura fenomenului reprezentat de $f(x)$ şi se studiază o problemă *strict matematică* (vezi sfîrşitul lui 4.1); uneori, problema astfel formulată reflectă corect un anumit fenomen fizic (vezi ex. 4.16), dar mult mai de preţ, pentru fizician, decît formula *interpolării polinomiale* (vezi 4.3) este *schema superpoziţiei* (vezi 4.4) care se dovedeşte eficientă în studierea a foarte numeroase şi variate tipuri de fenomene fizice. — *N.T.*

Valoarea lui poate fi calculată cu ajutorul celor trei operații de calcul, definite drept „cele mai simple", din coeficienții numerici dați, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ și din valoarea variabilei independente, x. Dacă presupunem că $a_n \neq 0$, gradul polinomului este n.

În fine, să considerăm că, dintre două polinoame de grade diferite, polinomul „mai simplu" este cel de grad mai mic. Dacă acceptăm și acest punct, atunci problema trasării prin n puncte a curbei care, prin definiție, este „cea mai simplă posibilă", devine o problemă determinată, problema *interpolării polinomiale*, pe care o formulăm în modul următor:

Fiind date n numere diferite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *și alte n numere oarecare* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *să se găsească polinomul* $f(x)$ *de grad minim care satisface următoarele n condiții:*

$$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2, \ldots,\ f(x_n) = y_n.$$

4.2. O SITUAȚIE SPECIALĂ

Dacă nu vedem nici o altă cale de abordare a problemei propuse, putem încerca să variem datele. De pildă, putem păstra fixă una din ordonatele date, în timp ce pe celelalte le facem să scadă; în felul acesta putem da peste o situație specială care pare mai accesibilă. Nu avem nevoie să ne atingem și de abscisele date, acceptăm oricare n numere diferite

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_n$$

dar alegem un sistem de ordonate deosebit de simplu:

$$0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0$$

(Toate ordonatele dispar — adică sînt nule — cu excepția celei care corespunde abscisei x_2; vezi fig. 4.2).

Alegînd astfel ordonatele, dispunem, încă de la început, de o informație foarte interesantă: polinomul care ia aceste valori se anulează în $(n - 1)$ puncte date, adică admite $(n - 1)$ rădăcini distincte, $x_1, x_3, \ldots, x_n$, și, în consecință, trebuie să fie divizibil cu fiecare din următorii $(n - 1)$ factori:

$$x - x_1,\ x - x_3,\ x - x_4, \ldots, x - x_n.$$

Prin urmare, el trebuie să fie divizibil și cu produsul acestor $(n - 1)$ factori și deci este de grad cel puțin

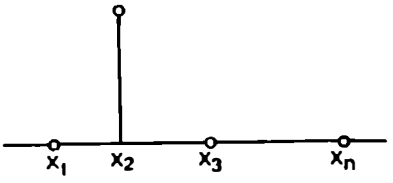


Fig. 4.2. O situație specială

$(n - 1)$. Dacă polinomul este efectiv de gradul minim posibil, el trebuie să fie de forma

$$f(x) = C(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \ldots (x - x_n),$$

unde C este o anumită constantă.

Am utilizat toate datele? — A mai rămas să ţinem seama de ordonata care corespunde abscisei x_2:

$$f(x_2) = C(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \ldots (x_2 - x_n) = 1.$$

Calculăm pe C din această ecuaţie, înlocuim valoarea obţinută pentru C în expresia lui $f(x)$ şi, în felul acesta, găsim că:

$$f(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \ldots (x_2 - x_n)}.$$

Evident, acest polinom $f(x)$ ia valorile cerute în toate abscisele date. Am reuşit să rezolvăm problema interpolării polinomiale într-un caz particular, într-o situaţie specială.

4.3. COMBINĂM CAZURI PARTICULARE PENTRU A REZOLVA CAZUL GENERAL

Am avut noroc că am dat peste un caz particular atît de uşor de rezolvat. Ca să ne meritäm norocul, se cuvine să încercăm acum să utilizăm cît mai bine soluţia obţinută.

Modificînd puţin soluţia obţinută, putem trata un caz particular ceva mai larg: absciselor date

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ \ldots, \ x_n$$

le vom asocia ordonatele

$$0, \ y_2, \ 0, \ \ldots, \ 0.$$

Pentru a obţine polinomul care ia aceste valori, trebuie să înmulţim expresia obţinută în 4.2 cu un factor care este evident:

$$y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \ldots (x_2 - x_n)}.$$

În această expresie, abscisa x_2 joacă un rol special, distinct de rolul comun atribuit tuturor celorlalte abscise. Însă abscisa x_2 ca atare nu are în ea nimic special: putem să atribuim acest rol special oricărei alte abscise. Astfel, dacă absciselor

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ldots, x_n$$

le facem să le corespundă, pe rînd, valorile de pe unul din rîndurile următoare

$$\begin{array}{cccc} y_1, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\ 0, & y_2, & 0, & \ldots, 0 \\ 0, & 0, & y_3, & \ldots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, y_n \end{array}$$

putem scrie, de fiecare dată, o expresie a polinomului de grad $(n-1)$ care ia valorile de pe acea linie, pentru abscisele corespunzătoare.

Am schiţat aici rezolvarea în n cazuri particulare, diferite, ale problemei noastre. Nu le-am putea, oare, combina în aşa fel încît să obţinem soluţia cazului general? Desigur că o putem face, şi anume adunînd pur şi simplu cele n expresii schiţate mai sus:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots(x_1-x_n)} + \\ & + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_n)} + \\ & + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\ldots(x_3-x_n)} + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\ldots(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

este un polinom de grad cel mult $(n-1)$ care satisface condiţiile

$$f(x_i) = y_i \quad \text{pentru } i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

aşa cum ne putem da seama dintr-o privire, dacă i-am înţeles structura expresiei.

(Aveţi vreo întrebare?)

4.4. SCHEMA

Rezolvarea precedentă a problemei interpolării, rezolvare pe care o datorăm lui Lagrange are un plan general extrem de sugestiv. *L-aţi mai întîlnit undeva?*

(1) Cititorul cunoaşte, probabil, iar cele precedente poate că i-au reamintit, demonstraţia curentă a unei binecunoscute teoreme din

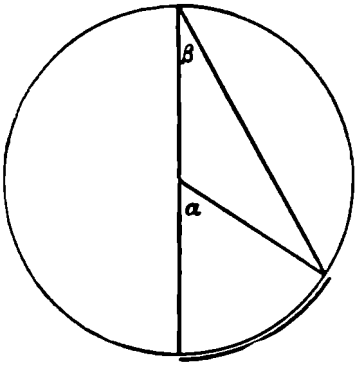


Fig. 4.3. O situaţie specială

geometria plană: „într-un cerc, unghiul la centru este dublul oricărui unghi înscris care subîntinde acelaşi arc". (În fig. 4.3 şi fig. 4.4, arcul este scos în evidenţă printr-o linie dublă.) Demonstraţia se bazează pe două observaţii şi se realizează în două etape (cf. Euclid III 20).

(2) Există o *situaţie specială* [un *caz particular* al acestei probleme] care este mai uşor de rezolvat: dacă una din laturile unghiului înscris este un diametru (vezi fig. 4.3), unghiul la centru, α, este — în mod evident — suma a două unghiuri dintr-un triunghi isoscel; aceste două unghiuri sînt egale între ele, iar unul din ele este tocmai unghiul înscris, β. Ceea ce demonstrează relaţia căutată

$$\alpha = 2\beta$$

în situaţia specială din fig.4.3.

(3) De data aceasta, nu mai avem în faţă situaţia specială din fig. 4.3. Dar putem trasa noi înşine un diametru (linia punctată din fig. 4.4) prin vîrful unghiului înscris, şi atunci pe figură se realizează de două ori acea situaţie specială. Fie

$$\alpha' = 2\beta' \text{ şi } \alpha'' = 2\beta''$$

egalităţile care exprimă relaţia între unghiuri în aceste situaţii speciale (vezi fig. 4.3). Aceste egalităţi au fost stabilite ferm, fără să rămînă nici un dubiu, pe baza consideraţiilor din (2). Unghiurile α şi β, adică unghiul la centru şi respectiv, unghiul înscris, de care este vorba în teoremă, pot fi exprimate sub formă de sumă sau de diferenţă, după cum avem de-a face cu unul sau cu altul din cazurile reprezentate în fig. 4.4:

$$\alpha = \alpha' + \alpha'', \quad \beta = \beta' + \beta'' \quad \text{sau} \quad \alpha = \alpha' - \alpha'', \quad \beta = \beta' - \beta''.$$

Adunînd sau scăzînd acum cele două egalităţi stabilite anterior, obţinem:

$$\alpha' + \alpha'' = 2(\beta' + \beta'') \text{ şi respectiv } \alpha' - \alpha'' = 2(\beta' - \beta''),$$

ceea ce demonstrează teorema propusă

$$\alpha = 2\beta$$

în cazul cel mai general.

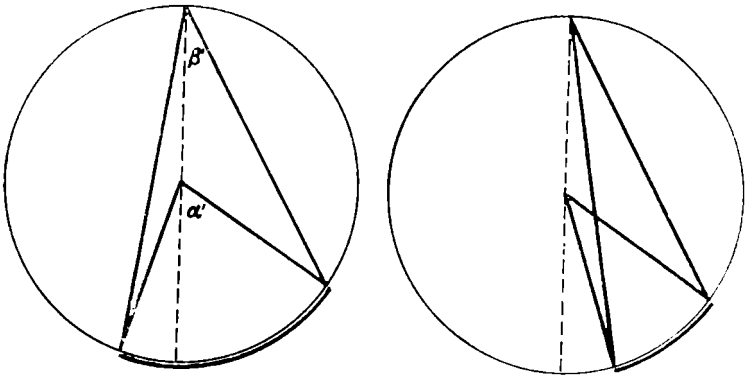


Fig. 4.4. Cazul general

(4) Să comparăm între ele cele două probleme discutate în acest capitol: problema „de aflat" — din algebră — tratată în 4.1, 4.2 şi 4.3 şi problema „de demonstrat" — din geometria plană — tratată în subparagrafele (1), (2) şi (3) ale paragrafului de faţă. Deşi aceste probleme diferă sub multe aspecte, rezolvările lor urmează o aceeaşi *schemă*. În ambele exemple, rezultatul a fost atins în două etape.

Mai întîi, cu un pic de noroc, am reuşit să „dibuim" un caz deosebit de uşor de tratat, o *situaţie specială*, şi să dăm o rezolvare perfect adecvată, dar limitată, la această situaţie specială [vezi 4.2 şi 4.4 (2), fig. 4.2 şi fig. 4.3].

După aceea, *combinînd cazuri particulare* la care este aplicabilă rezolvarea limitată, am obţinut rezolvarea completă, neîngrădită de nimic, aplicabilă în *cazul general* [vezi 4.3 şi 4.4(3)].

Să introducem doi termeni care scot în evidenţă anumite particularităţi ale acestei scheme.

Prima etapă s-a ocupat de un caz particular care era nu numai deosebit de accesibil, dar şi deosebit de util; îl putem numi — *caz particular călăuzitor:* el ne „călăuzeşte" pe calea care duce la rezolvarea generală[2].

A doua etapă a combinat cazuri particulare cu ajutorul unei anumite operaţii algebrice specifice. În 4.3, cele n soluţii particulare, după ce au fost înmulţite cu constante date, au fost adunate — pentru a forma soluţia generală. În 4.4(3), am adunat sau am scăzut ecuaţiile referitoare la situaţia specială — pentru a obţine demonstraţia generală. Să numim operaţia algebrică folosită în 4.3 [în 4.3 generalitatea este

[2] Vezi *MRP*, vol. I, ex. 7, 8 şi 9, p. 40.

mai largă decît în 4.4(3)] *combinație liniară sau superpoziție.* (Mai mult despre această noțiune — în ex. 4.11.)

Vom folosi termenii introduși pentru a contura schema: *Pornind de la o situație specială călăuzitoare, obținem soluția generală printr-o superpoziție de cazuri particulare.*

Comentarii suplimentare și o serie de alte exemple vor permite cititorului să-și completeze această schiță. În continuare însă el poate încerca să „rupă chingile" schiței și să lărgească sfera de aplicabilitate a schemei.

EXEMPLE ȘI COMENTARII LA CAPITOLUL 4

Partea întîi

4.1. Pentru a demonstra formula $Bh/3$ pentru volumul unei piramide (B este baza, h — înălțimea) putem considera cazul tetraedrului (care este o piramidă cu baza triunghiulară) drept caz particular călăuzitor și putem utiliza apoi superpoziția. Cum?

4.2. Dacă $f(x)$ este un polinom de grad k, există un polinom $F(x)$ de grad $(k+1)$, astfel încît, pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = F(n).$$

Pentru a demonstra această teoremă, putem considera rezultatul din ex. 3.3 drept caz particular călăuzitor și putem utiliza apoi superpoziția. Cum?

4.3. (Continuare). Există însă și o altă cale: putem considera rezultatul ex. 3.34 drept caz particular călăuzitor și în felul acesta, folosind tot superpoziția, putem da o altă demonstrație. Cum?

4.4. Fiind dați coeficienții $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$, să se găsească numerele $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k$, astfel încît ecuația

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k = b_0\binom{x}{k} + b_1\binom{x}{k-1} + \ldots + b_k\binom{x}{0}$$

să fie o identitate în x (notațiile din ex. 3.65).

Arătați că această problemă nu admite decît o singură soluție.

4.5. Aplicînd metoda de la ex. 4.3, dați o nouă deducere a expresiei S_3 obținută în 3.3.

4.6. Aplicînd rezultatul ex. 4.3 (teorema enunțată în ex. 4.2) dați o nouă deducere a expresiei S_3 obținută în 3.3.

4.7. Ce dă ex. 4.3 pentru problema propusă în ex.3.3?

4.8. O întrebare în legătură cu 4.1: Ce puteţi spune despre cazul particular $n = 2$? Dacă sînt date numai două puncte, ar fi firesc să spunem că linia (curba) „cea mai simplă" care trece prin ele este linia dreaptă, care este complet determinată de punctele date. Dar ar fi oare aceasta în acord cu punctul de vedere la care am ajuns în cele din urmă în 4.1(5)?

4.9. O întrebare în legătură cu 4.2: Ce puteţi spune despre cazul particular în care

$$y_i = 0 \text{ pentru } i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

adică în care toate ordonatele date sînt nule?

4.10. O întrebare în legătură cu 4.3: Polinomul $f(x)$ obţinut satisface oare toate clauzele condiţiei? Gradul lui este oare cel minim posibil?

4.11. *Combinaţia liniară sau superpoziţia.* Fie

$$V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$$

n obiecte matematice de o anumită natură bine definită (ele aparţin unei anumite mulţimi, bine definite), astfel încît *combinaţia lor liniară*

$$c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + \ldots + c_nV_n$$

formată cu ajutorul oricăror n numere

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$$

este de aceeaşi natură (aparţine aceleiaşi mulţimi).

Iată două exemple.

(*a*) $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ sînt polinoame de grad care nu depăşeşte un anumit număr dat, d; combinaţia lor liniară este şi ea un polinom de grad nu mai mare decît d.

(*b*) $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ sînt vectori paraleli cu un plan dat; combinaţia lor liniară („adunarea" înseamnă aici adunare vectorială) este şi ea un vector paralel cu planul dat.

Exemplul (*a*) joacă un anumit rol în 4.3. În legătură cu 4.4(3), să observăm că adunarea şi scăderea sînt cazuri particulare de combinaţie liniară ($n = 2$, $c_1 = c_2 = 1$ şi, respectiv, $c_1 = -c_2 = 1$).

Exemplul (b) este sugestiv; obiectele care pot fi combinate liniar conform legilor „obişnuite" ale algebrei se numesc „vectori", iar mulţimea lor se numeşte, în algebra abstractă, „spaţiu vectorial".

Combinaţiile liniare (spaţiile vectoriale) joacă un rol important în multe ramuri ale matematicii superioare. Noi însă nu putem examina aici decît cîteva exemple destul de elementare (ex. 4.12, 4.13, 4.14 şi 4.15).

În cele ce urmează, vom folosi cei doi termeni „combinaţie liniară" şi „superpoziţie" cu acelaşi sens, dar mai frecvent vom folosi termenul al doilea. Termenul „superpoziţie" este folosit curent în fizică (în special, în teoria undelor). Nu vom împrumuta însă din

tizică decît un singur exemplu, ex. 4.16, care este suficient de simplu pentru noi, dar în acelaşi timp — important sub mai multe aspecte.

† **4.12.** *Ecuaţii diferenţiale liniare, omogene cu coeficienţi constanţi.*
O astfel de ecuaţie este de forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere date şi se numesc *coeficienţii* ecuaţiei; n este *ordinul* ecuaţiei: y este o funcţie de variabilă independentă x; $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ reprezintă, aşa cum se obişnuieşte, derivatele succesive ale lui y. O funcţie y care satisface ecuaţia se numeşte o *soluţie* sau o „integrală" a ecuaţiei.

(*a*) Demonstraţi că o combinaţie liniară de soluţii este, şi ea, o soluţie.

(*b*) Demonstraţi că există o soluţie particulară de forma specială

$$y = e^{rx},$$

unde r este un număr convenabil ales.

(*c*) Combinaţi soluţii particulare de forma specială (*b*) pentru a obţine o soluţie pe cît posibil mai generală.

† **4.13.** Găsiţi o funcţie y care satisface ecuaţia diferenţială

$$y'' = -y$$

şi condiţiile iniţiale

$$y = 1, \; y' = 0 \text{ pentru } x = 0.$$

4.14. *Ecuaţii cu diferenţe finite liniare omogene cu coeficienţi constanţi.*
O astfel de ecuaţie este de forma

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \ldots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere date şi se numesc *coeficienţii* ecuaţiei; n este ordinul ecuaţiei; un şir infinit de numere

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$$

care satisface ecuaţia pentru $k = 0, 1, 2, \ldots$ se numeşte o *soluţie*.

(Putem considera pe y_x drept o funcţie de variabilă independentă x. Pe de altă parte, putem considera ecuaţia propusă drept o formulă de recurenţă, adică o regulă constantă cu ajutorul căreia putem calcula orice termen y_{k+n} al şirului, din termenii precedenţi

$$y_{k+n-1}, y_{k+n-2}, \ldots, y_k, \text{ sau pe } y_k, \text{ din } y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_{k-n}.)$$

(*a*) Demonstrați că o combinație liniară de soluții este, și ea o soluție.

(*b*) Demonstrați că există o soluție particulară de forma specială

$$y_k = r^k,$$

unde r este un număr convenabil ales.

(*c*) Combinați soluții particulare de forma specială (*b*) pentru a obține o soluție pe cît posibil mai generală.

4.15. *Șirul numerelor lui Fibonacci*

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ldots$$

este definit de ecuația cu diferențe finite (formula de recurență)

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

valabilă pentru $k = 2,\ 3,\ 4,\ldots$ și de condițiile inițiale

$$y_0 = 0,\quad y_1 = 1.$$

Exprimați termenul y_k în funcție de k.

4.16. *Superpoziție de mișcări.* Galilei, după ce a găsit legea căderii corpurilor și legea inerției, a combinat aceste legi pentru a descoperi care este traiectoria (curba) descrisă de un proiectil. Cititorul care reușește să-și dea seama cît de mult îl ajută notațiile moderne poate retrăi, într-un anumit fel, această descoperire a lui Galilei.

Fie x și y două coordonate rectangulare într-un plan vertical; axa x este orizontală, iar axa y este orientată în sus. Un proiectil (un punct material) se mișcă (fără frecare) în acest plan, pornind din origine la momentul $t = 0$; t este timpul. Viteza inițială a proiectilului este v; direcția ei inițială face un unghi α cu direcția pozitivă a axei x. Mișcării reale a proiectilului îi putem asocia trei mișcări virtuale care încep din același punct și în același moment.

(*a*) Un punct material greu care pornește din repaus și cade liber are la momentul t coordonatele

$$x_1 = 0,\ y_1 = -\frac{1}{2}\,gt^2.$$

(*b*) Un punct material fără gravitație (= greutate) căruia i s-a imprimat componenta verticală a vitezei, $v \sin \alpha$, are, la momentul t, în virtutea legii inerției, coordonatele

$$x_2 = 0,\ y_2 = tv \sin \alpha.$$

(*c*) Un punct material fără greutate căruia i s-a imprimat componenta orizontală a vitezei $v \sin \alpha$ are la momentul t, în virtutea legii inerției, coordonatele

$$x_3 = tv \cos \alpha,\ y_3 = 0.$$

Dacă mișcarea reală este o combinație a acestor trei mișcări, realizată conform ipotezei „celei mai simple", care este traiectoria ei?

Cititorului i se oferă acum prilejul să participe la o investigație, ale cărei faze mai importante sînt marcate de ex. 4.17 și ex. 4.24.

4.17. *Multitudinea căilor de acces.* Într-un tetraedru două muchii opuse au aceeași lungime *a*, sînt perpendiculare una pe alta și fiecare este perpendiculară pe segmentul de lungime *b* care unește mijlocurile lor (punctele lor mediane). Calculați volumul tetraedrului.

Această problemă admite mai multe căi de acces distincte. Cititorul care simte nevoia să fie ajutat poate consulta unele din exercițiile care urmează (ex. 4.18—4.23) — sau chiar toate. Dacă vrea să-și reprezinte relațiile spațiale implicate, să încerce să găsească o proiecție ortogonală simplă, sau o secțiune simplă prin tetraedru.

4.18. *Care este necunoscuta?* Necunoscuta în ex. 4.17 este volumul unui tetraedru. Cum puteți determina acest tip de necunoscută? Volumul unui tetraedru poate fi calculat dacă sînt date baza tetraedrului și înălțimea lui — dar nici una din aceste cantități nu este dată în ex. 4.17.

Bine, s-o luăm atunci de la început: *care este necunoscuta?*

4.19. (Continuare). Aveți nevoie de aria unui triunghi — cum puteți determina acest tip de necunoscută? Aria unui triunghi poate fi calculată dacă sînt date baza și înălțimea lui — dar nici una din aceste cantități nu este dată pentru triunghiul care constituie baza tetraedrului din ex. 4.17.

Aveți nevoie de lungimea unui segment — cum puteți determina acest tip de necunoscută? Calea obișnuită de a calcula lungimea unui segment este să se pornească de la un anumit triunghi — însă în figură nu există nici un triunghi în care să intre înălțimea tetraedrului din ex. 4.17.

Într-adevăr, un asemenea triunghi nu există; dar *oare n-ați putea introduce unul?* În orice caz, *introduceți notații adecvate* și stringeți tot ce aveți.

4.20. *Iată o problemă înrudită cu a noastră și rezolvată anterior:* „Volumul unui tetraedru poate fi calculat cînd sînt date baza tetraedrului și înălțimea lui". N-o puteți însă aplica imediat la ex.4.17, fiindcă baza și înălțimea acelui tetraedru nu sînt date. Poate însă că *în jurul lui* există vreun alt tetraedru, mai accesibil.

4.21. (Continuare). Tetraedrul mai accesibil s-ar putea însă să existe și *în interior.*

4.22. Poate că *alte cunoștințe* ne-ar putea fi de folos. Puteți rezolva ușor ex. 4.17 dacă cunoașteți *formula prismoidului.*

Un prismoid este un poliedru. Două din fețele prismoidului se numesc *baza inferioară* și *baza superioară* și sînt paralele între ele; celelalte fețe sînt *fețele laterale.* Prismoidul are trei categorii de muchii: muchiile care înconjură baza inferioară, muchiile care înconjură baza superioară și muchiile laterale. Orice muchie laterală a prismoidului (și aceasta este o parte importantă a definiției lui) unește un vîrf de pe baza inferioară cu un vîrf de pe baza superioară. Prisma este un caz particular de prismoid.

Distanța dintre cele două baze este *înălțimea* prismoidului. Un plan paralel cu cele două baze, cea inferioară și cea superioară, și echidistant de acestea, intersectează prismoidul după un poligon care se numește *secțiune mediană*.

Fie V volumul prismoidului, h — înălțimea lui, iar

$$L, \ M \text{ și } N$$

ariile, respectiv, a bazei inferioare, a secțiunii mediane și a bazei superioare. Atunci (formula aceasta pentru V se numește formula prismoidului)

$$V = \frac{(L + 4M + N)h}{6}.$$

Aplicați-o la ex. 4.17.

4.23. Poate că ați abandonat calea de rezolvare a ex. 4.17 care pornește de la ex. 4.18 și trece prin ex. 4.17, dar ați ajuns la rezultatul dorit mergînd pe o altă cale. Dacă s-a întîmplat așa, examinați atent rezultatul pe care l-ați obținut, reveniți la calea abandonată și urmați-o pînă la capăt.

4.24. *Formula prismoidului.* Studiați toate laturile problemei, considerați-o sub diferite aspecte, suciți-o și răsuciți-o în minte pe toate fețele — noi așa am făcut, priviți fig. 4.5. Dacă am găsit patru moduri diferite de obținere a aceluiași rezultat, trebuie să fim în stare să tragem folos din compararea lor[3].

Dintre cele patru procedee de rezolvare, trei nu utilizează formula prismoidului, dar a patra recurge la ea (ex. 4.22). Prin urmare, dispunem, cel puțin — implicit, de trei demonstrații diferite pentru acel caz particular al formulei prismoidului care a intervenit în problema tratată. Oare n-am putea explicita vreuna din aceste demonstrații, și n-am putea-o extinde astfel încît să demonstreze aceeași formulă nu numai într-un caz particular, ci și în cel general?

Punînd astfel problema, care din cele trei metode de rezolvare în discuție (ex. 4.20, ex. 4.21 și ex. 4.18, ex. 4.19, ex. 4.23) vi se pare că are șansele cele mai mari?

4.25. Verificați formula prismoidului pentru prismă (care este un prismoid cu totul particular).

4.26. Verificați formula prismoidului pentru piramidă (care luată într-o poziție convenabilă, poate fi considerată drept un prismoid — sau, dacă vreți, un caz degenerat, sau un caz-limită de prismoid cu baza superioară redusă la un punct).

4.27. Generalizînd situația care stă la baza rezolvării ex. 4.20, să considerăm un prismoid P divizat în n prismoizi $P_1, P_2, \ldots, P_n$, care nu se întrepătrund și umplu complet prismoidul P, bazele lor inferioare acoperă baza inferioară a lui P, iar bazele superioare acoperă baza superioară a acestuia. (În cazul din ex. 4.20, fig. 4.5 (b), P este o pris-

[3] Ne raliem, prin aceasta, opiniei lui Leibniz; vezi citatul care precede ex. 3.31.

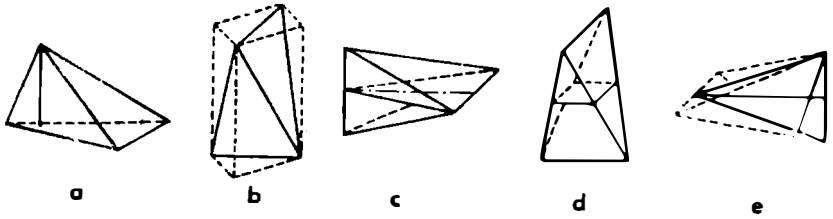


Fig. 4.5. Suciți-o și răsuciți-o pe toate fețele, considerați-o sub diferite aspecte, studiați-i toate laturile

mă cu baza pătrată, $n = 5$, P_1, P_2, P_3 și P_4 sînt tetraedre identice, iar P_5 este un tetraedru distinct.) Demonstrați: dacă formula prismoidului este valabilă pentru n prismoizi din cei $(n + 1)$ considerați, ea este în mod necesar valabilă și pentru al $n + 1$-lea prismoid.

4.20. Generalizînd situația care stă la baza rezolvării de la ex. 4.22, fig. 4.5 (d), să notăm cu l și n muchiile opuse ale unui tetraedru (l — muchia inferioară, n — cea superioară). Ducem prin l un plan paralel cu n, și un alt plan prin n, paralel cu l; fie h distanța dintre aceste două plane (paralele). Tetraedrul poate fi considerat un prismoid (un prismoid degenerat — dacă preferați așa) ale cărui muchii l și n sînt respectiv bazele inferioară și superioară și care are înălțimea h. (Secțiunea mediană este un paralelogram.)

Verificați formula prismoidului pentru acest tip de prismoid.

4.29. Demonstrați formula prismoidului în cazul general (prin superpoziție de cazuri particulare examinate anterior).

4.30. *Nici un lanț nu este mai solid decît veriga lui cea mai slabă.* Examinați din nou, cu atenție, rezolvarea de la ex. 4. 28.

4.31. Examinați din nou, cu atenție, rezolvarea de la ex. 4.29.

† **4.32.** *Regula lui Simpson.* Fie $f(x)$ o funcție definită (și continuă) în intervalul

$$a \leqslant x \leqslant a + h$$

și notațiile

$$\int_a^{a+h} f(x)\mathrm{d}x = I$$

$$f(a) = L, \quad f\left(a + \frac{h}{2}\right) = M, \quad f(a + h) = N$$

Atunci, în anumite condiții pe care ne propunem să le investigăm,

$$I = \frac{L + 4M + N}{6}\, h.$$

Această expresie pentru I se numește *regula lui Simpson.*

Fie n un întreg nenegativ, considerați că

$$f(x) = x^n, \; a = -1, \; h = 2,$$

și determinați valorile lui n pentru care expresia integralei I dată de regula lui Simpson este valabilă.

(Chiar cînd nu este riguros valabilă, regula lui Simpson poate rămîne „valabilă aproximativ" în sensul că diferența dintre cei doi membri ai relației poate rămîne relativ mică. Acesta este un caz frecvent și, de aceea, regula lui Simpson este importantă pentru evaluarea aproximativă a integralelor.)

† **4.33.** Demonstrați că regula lui Simpson este valabilă pentru orice polinom de grad mai mic sau egal cu 3, dacă $a = -1$ și $h = 2$.

† **4.34.** Demonstrați că regula lui Simpson este valabilă pentru orice polinom de grad mai mic sau egal cu 3, fără nici o restricție în ceea ce privește a și h.

4.35. Pornind de la ex. 4.34, deduceți formula prismoidului, folosind geometria analitică în spațiu și calculul integral. („Pentru a prețui cum se cuvine o cale ușoară, mergi mai întîi pe calea mai grea", spunea profesorul de matematică tradițional.)

4.36. *Extindem sfera de aplicabilitate.* Rezolvînd unele din problemele precedente, am depășit de fapt cadrul circumscris de schema superpoziției formulată în 4.4 (4). Este adevărat că am obținut soluția generală prin superpoziție de cazuri particulare mai accesibile, dar aceste cazuri particulare n-au fost toate de același tip, ele n-au fost, toate, variante ale unei aceleiași situații speciale. (În rezolvarea de la ex. 4.29, unele din solidele folosite în superpoziție sînt piramide — tratate în ex. 4.26, altele sînt tetraedre într-o poziție specială — tratate în ex. 4.28. Și în rezolvarea de la ex. 4.33 am „suprapus" cazuri de natură diferite.) În esență, ne-am abătut de la formularea din 4.4 (4) într-un singur punct: n-am pornit de la o situație specială călăuzitoare, ci de la mai multe asemenea situații. Să lărgim, de aceea, circumscrierea schemei noastre: *Pornind de la o situație specială călăuzitoare, sau de la mai multe asemenea situații, obținem soluția generală prin superpoziție de cazuri particulare.*

Schema superpoziției pune în evidență o cale care duce de la un caz particular călăuzitor (sau de la cîteva asemenea cazuri) la cazul general. Însă între aceleași puncte extreme există și o altă cale, cu totul diferită de cea a superpoziției, cu care rezolvatorul ambițios trebuie să fie la fel de bine familiarizat: deseori, cazul general poate fi redus la un caz particular călăuzitor folosind o *transformare* convenabilă. (Cazul general din ex. 4.34 se reduce la cazul particular din ex. 4.33 printr-o transformare a variabilei de integrare.) Pentru o discuție sugestivă pe această temă, vezi „Metode de transformare" din lucrarea lui J. Hadamard, *Lecții de geometrie elementară,* vol. I (Geometrie plană), Ed. Tehnică, București, 1960.

Partea a doua

SPRE O METODĂ GENERALĂ

... Înţelepciunea umană rămîne una şi aceeaşi întotdeauna, oricît de diferite ar fi lucrurile pe care le cercetează, şi nu împrumută de la ele mai multă diversitate decît împrumută lumina Soarelui de la lucrurile pe care le luminează.

DESCARTES, Reguli pentru îndrumarea minţii, Regula I, p. 7.

CAPITOLUL 5

Probleme

Rezolvarea problemelor este forma de gîndire conştientă cea mai caracteristică şi mai specifică.

William James

5.1. CE ESTE O PROBLEMĂ?

În cele ce urmează, vom folosi cuvîntul „problemă" într-o accepţie foarte cuprinzătoare. Prima noastră îndatorire este să conturăm în linii mari această accepţie.

În viaţa modernă, a-ţi procura de mîncare nu constituie, de regulă, o problemă. Dacă mi se face foame şi sînt acasă, iau ceva din frigider, iar dacă sînt în oraş, mă duc la un bufet sau la vreun magazin alimentar. Cu totul alta este însă situaţia dacă frigiderul este gol sau dacă sînt în oraş dar n-am bani în buzunar; într-un asemenea caz, a-ţi procura ceva de mîncare devine o problemă. Vorbind în general, o anumită dorinţă poate să ducă, sau poate să nu ducă la o problemă. Dacă dorinţa îmi aduce imediat în minte, fără nici un efort, o acţiune sau o comportare evidentă care are toate şansele să-mi procure obiectul dorit, problema nu există. Dacă însă nu-mi vine în minte nici o astfel de acţiune — problema există. Aşadar, a avea (sau a-ţi pune) o problemă înseamnă *a căuta, în mod conştient o acţiune adecvată pentru a atinge un scop clar conceput, dar nu imediat accesibil.* A rezolva o problemă înseamnă a găsi o asemenea acţiune.

O problemă este o problemă „mare" dacă este foarte dificilă şi este doar o problemă „mică" dacă dificultatea pe care o prezintă este infimă. Dar şi noţiunea însăşi de problemă prezintă un anumit grad de dificultate: unde nu există dificultate, nu există nici problemă.

O problemă tipică este găsirea drumului la un punct prestabilit, într-o regiune nu prea bine cunoscută. Ne putem imagina uşor cît

de serioasă era această problemă pentru stră-strămoşii noştri primitivi care trăiau în pădurea virgină.

Poate că aşa se şi explică (sau nu se explică?) de ce a rezolva o problemă oarecare ni se pare că înseamnă oarecum a găsi o cale, sau o ieşire: o cale de a ocoli un obstacol, o ieşire dintr-o dificultate.

Cea mai mare parte a gîndirii noastre conştiente este „ocupată" de probleme. În afară de momentele de reverie sau cînd, pur şi simplu, visăm cu ochii deschişi, gîndurile noastre sînt îndreptate în permanenţă spre un scop oarecare, căutăm necontenit căi şi mijloace de a-l atinge, încercăm să ne imaginăm o cale pe care urmînd-o, ne-am putea atinge ţelul.

A rezolva o problemă este o performanţă specifică inteligenţei, iar inteligenţa este apanajul distinctiv al omului. Abilitatea de a ocoli un obstacol, de a întreprinde o acţiune indirectă atunci cînd una directă nu se impune de la sine, înalţă animalul inteligent deasupra celui stupid, omul deasupra celui mai inteligent animal, şi omul de geniu deasupra semenilor săi.

Nimic nu este mai interesant pentru noi, oamenii, decît această activitate omenească. Activitatea cea mai caracteristic omenească este cea de rezolvare a problemelor, este gîndirea cu un scop, elaborarea de mijloace şi procedee de a atinge un anumit obiectiv dorit. Scopul nostru este să înţelegem această activitate — şi, mie unul, mi se pare că acestui scop merită să-i acordăm tot interesul.

În capitolele precedente, am studiat probleme elementare de matematică, grupînd la un loc problemele abordabile printr-o aceeaşi metodă de rezolvare. Ne-am asigurat astfel o anumită bază experimentală şi, de pe această bază, vom încerca acum să ne ridicăm la un nivel mai înalt de generalitate, străduindu-ne să cuprindem în investigaţia noastră, în măsura în care ne va fi posibil, şi probleme nematematice. A-ţi propune să realizezi o metodă generală, aplicabilă tuturor genurilor de probleme, poate părea ceva prea ambiţios, dar năzuinţa aceasta este cu totul firească, fiindcă în timp ce varietatea problemelor cu care putem fi confruntaţi este infinită, fiecare dintre noi nu are decît un singur cap pentru a le rezolva, aşa că este natural să ne dorim o metodă unică, cu care să le putem rezolva pe toate.

5.2. CLASIFICAREA PROBLEMELOR

Un student dă examen scris la matematică; ca pregătire, el nu este decît un student mediu, dar a muncit destul de mult în vederea susţinerii acestui examen. După ce a citit problema propusă,

el poate să se întrebe: „De ce tip este problema aceasta?" Şi, într-adevăr, s-ar putea să fie foarte bine, foarte util să-şi pună această întrebare, fiindcă dacă reuşeşte să includă problema într-o clasă, să-i recunoască tipul, s-o plaseze într-un capitol sau altul din manualul pe care l-a studiat, el a marcat prin aceasta un anumit progres; el se poate strădui acum să-şi reamintească metoda, pe care a învăţat-o, de a rezolva acest tip de problemă.

Toate acestea sînt valabile, într-un anumit sens, la rezolvarea problemelor de orice nivel. Întrebarea: „De ce tip este problema aceasta?" aduce după sine o altă întrebare: „Cum se procedează în problemele de acest tip?", şi aceste întrebări ţi le poţi pune cu folos chiar în cercetări de nivel foarte înalt.

Aşadar, poate fi util să clasificăm problemele, să distingem probleme de diferite tipuri. O clasificare bună trebuie să introducă asemenea tipuri, încît *tipul de problemă să poată sugera tipul de rezolvare.*

Nu vom intra aici într-o clasificare detaliată, şi nici nu ne vom propune o clasificare perfectă. Interpretînd cu o anumită libertate o tradiţie care datează încă de la Euclid şi de la comentatorii lui, ne vom mulţumi să punem în evidenţă şi să caracterizăm două tipuri foarte generale de probleme.

Elementele lui Euclid conţin axiome, definiţii şi „propoziţii". Comentatorii lui şi unii dintre traducătorii operei sale disting două feluri sau două genuri de „propoziţii": unele (denumirea lor latină este *problema*) îşi propun să construiască o figură, celelalte (denumirea lor latină este *theorema*) — să demonstreze o teoremă. Extinzînd această distincţie, vom deosebi două tipuri de probleme, probleme „de aflat" şi probleme „de demonstrat". Scopul unei *probleme de aflat* este să „afle" (adică: să găsească, să construiască, să calculeze, să obţină, să identifice...) un anumit obiect, necunoscuta problemei. Scopul unei *probleme de demonstrat* este să stabilească dacă o anumită aserţiune este adevărată sau falsă, să demonstreze aserţiunea sau să o infirme.

De exemplu, dacă întrebaţi: „Ce-a spus el?", puneţi o problemă de aflat, însă dacă întrebaţi „A spus el aceasta?", puneţi o problemă de demonstrat.

Pentru mai multe detalii în legătură cu aceste două tipuri de probleme, vezi următoarele două paragrafe.

5.3. PROBLEME DE AFLAT

Scopul unei „probleme de aflat" este să găsească un anumit obiect — *necunoscuta* problemei — care satisface *condiţia* problemei (condiţia leagă necunoscuta de *datele* problemei). Să analizăm două exemple.

„Fiind date două segmente de dreaptă *a* şi *b*, şi unghiul γ, să se construiască paralelogramul în care segmentele date sînt laturi adiacente şi formează între ele unghiul γ".

„Fiind date două segmente de dreaptă *a* şi *b* şi unghiul γ, să se construiască paralelogramul în care segmentele date sînt diagonale şi formează între ele unghiul γ".

În ambele probleme, datele sînt aceleaşi: segmentele de dreaptă *a* şi *b* şi unghiul γ. În ambele probleme, necunoscuta este un paralelogram, aşa că problemele acestea nu sînt *a priori* discernabile după natura necunoscutei. Ceea ce diferă la cele două probleme este condiţia, legătura impusă între necunoscută şi date: legătura dintre paralelogram şi laturile sale diferă, evident, de relaţia dintre paralelogram şi diagonale.

Necunoscuta poate fi de orice natură, de orice categorie imaginabilă. Într-o problemă de construcţie geometrică, necunoscuta este o figură — de pildă, un triunghi. Cînd rezolvăm o ecuaţie algebrică, necunoscuta este un număr, o rădăcină a acelei ecuaţii. Cînd întrebăm „Ce-a spus el?", necunoscuta poate fi un cuvînt, sau un şir de cuvinte, o propoziţie, sau un şir de propoziţii, un întreg discurs. O problemă clar formulată trebuie să specifice categoria (mulţimea) din care face parte necunoscuta; trebuie să ştim de la început de ce tip este necunoscuta pe care ni se cere s-o găsim: un triunghi, sau un număr, sau un cuvînt, sau ... sau ...

O problemă clar formulată trebuie să specifice *condiţia* pe care trebuie s-o îndeplinească necunoscuta. În mulţimea de obiecte specificată de problemă, din care trebuie să facă parte necunoscuta, există submulţimea obiectelor care satisfac condiţia, şi orice obiect care face parte din această submulţime se numeşte *soluţie*. Această submulţime poate să nu conţină decît un singur obiect: soluţia este atunci unică. Această submulţime poate fi submulţimea vidă: atunci nu există nici o soluţie. (Pentru comentarii în legătură cu termenul „soluţie", vezi ex. 5.13.) Vedem deci că o problemă de aflat poate fi interpretată în mai multe sensuri. Luată în sensul strict, o problemă de aflat cere să se găsească (să se calculeze, să se construiască, să se identifice, să se enumere, să se descrie, ...) *toate* soluţiile (toată submulţimea de care am vorbit mai sus). Luată într-un sens mai puţin strict, problema poate cere numai o soluţie (una oarecare) sau numai cîteva soluţii. În fine, uneori este suficient să se stabilească doar existenţa unei soluţii, adică să se stabilească dacă mulţimea soluţiilor este sau nu vidă. De obicei — şi dacă nu se stipulează în mod explicit contrariul — problemele de matematică sînt luate în sensul strict, însă în multe probleme practice „sensul strict" poate fi destul de lipsit de ... sens.

Cînd va fi vorba de probleme de matematică — şi dacă din context nu va rezulta altceva — vom folosi termenul „date" pentru a desemna toate obiectele date (cunoscute, considerate admise...) — sau mulţimea lor, în ansamblu — obiecte care sînt legate de necunoscută prin condiţie. Dacă problema cere să se construiască un triunghi cunoscînd laturile lui a, b, şi c, datele sînt cele trei segmente a, b şi c. Dacă problema constă în a rezolva ecuaţia pătratică

$$x^2 + ax + b = 0,$$

datele sînt cele două numere date, a şi b. O problemă poate avea şi numai o singură dată, ba chiar poate să nu aibă nici o dată. Iată un exemplu: „Să se găsească raportul dintre aria cercului şi aria pătratului circumscris". Raportul cerut nu depinde de dimensiunile figurii, şi de aceea nu este necesar să se precizeze lungimea razei sau vreo altă dată de acest gen.

Vom numi necunoscuta, condiţia şi datele — *părţile principale* ale unei probleme de aflat. Termenul este potrivit, fiindcă nu putem spera, în mod rezonabil, că vom reuşi să rezolvăm o problemă pe care n-o înţelegem; or ca să înţelegem o problemă, trebuie să cunoaştem — şi chiar să cunoaştem foarte bine — care este necunoscuta, care sînt datele şi care este condiţia. Aşa că este cu totul recomandabil, cînd lucrăm la o problemă, să fim deosebit de atenţi la părţile ei principale.

5.4. PROBLEME DE DEMONSTRAT

Se vorbeşte că, într-o anumită ocazie, ministrul Yksmister a folosit o expresie foarte „tare" (pe care n-o vom reproduce aici) la adresa congressman-ului Zetmister. Este doar un zvon, şi faptul rămîne sub semnul întrebării; totuşi, întrebarea „A spus el asta?" i-a pus în mişcare pe mulţi, ea a fost dezbătută în presă, a fost pomenită într-un comitet al Congresului şi s-ar putea să ajungă şi în faţa Tribunalului. Ei bine, oricine ia în serios întrebarea are în faţă o „problemă de demonstrat", el trebuie să risipească incertitudinea din jurul zvonului, trebuie să facă dovada (să „demonstreze") că expresia pretinsă a fost într-adevăr folosită, sau să demonstreze contrariul; iar confirmarea sau infirmarea zvonului trebuie să se bazeze pe mărturiile disponibile cele mai demne de încredere.

Cînd avem o „problemă de demonstrat" de natură matematică, ceea ce ni se cere este să risipim incertitudinea în legătură cu o anumită aserţiune matematică A, clar formulată: ni se cere să demonstrăm sau să infirmăm aserţiunea A. O problemă celebră, încă nerezolvată,

de acest tip este conjectura lui Goldbach: dacă întregul n este par și $n > 4$, atunci n este suma a două numere prime impare[1].

Aserțiunea lui Goldbach (ea este numai o aserțiune, fiindcă nu știm încă dacă este sau nu adevărată) a fost enunțată mai sus în *forma cea mai curentă* a propozițiilor matematice: ea constă dintr-o *ipoteză* și o *concluzie*; prima parte, cea care începe cu „dacă", este ipoteza; partea a doua începe cu „atunci" și este concluzia[2].

Cînd avem de demonstrat (sau de infirmat) o propoziție matematică enunțată în forma ei cea mai curentă, ipoteza și concluzia propoziției se numesc *părțile principale* ale problemei — și termenul este adecvat. Într-adevăr, aceste părți principale merită o atenție deosebită. Pentru a demonstra propoziția, trebuie să descoperim o legătură logic necesară între părțile ei principale, între ipoteză și concluzie; pentru a infirma propoziția trebuie să arătăm (dacă-i posibil, cu un contraexemplu) că una din părțile principale (ipoteza) nu o implică pe cealaltă (concluzia). Mulți matematicieni, mari și mai puțin mari, au încercat să risipească incertitudinea din jurul conjecturii lui Goldbach, dar nici unul n-a reușit: cu toate că pentru a înțelege ipoteza și concluzia sînt suficiente foarte puține cunoștințe, nimeni n-a izbutit (totuși) să le lege printr-un raționament riguros și nimeni n-a fost în stare să prezinte vreun contraexemplu.

5.5. COMPONENTELE NECUNOSCUTE, CLAUZELE CONDIȚIEI

Dacă problema cere să se construiască un cerc, avem de găsit, de fapt, două elemente: centrul cercului și raza lui. Uneori poate fi avantajos să ne subdivizăm sarcina: dintre cele două elemente cerute, centrul și raza, putem încerca să găsim mai întîi unul, apoi — pe celălalt.

Dacă problema cere să se găsească un punct în spațiu și folosim geometria analitică, avem de găsit trei numere: cele trei coordonate x, y și z ale punctului.

În funcție de punctul de vedere care ne place mai mult, putem spune, în primul caz, că există două necunoscute, sau că există o

---

[1] *MRP*, vol. I, pp. 18—19.

[2] Există propoziții matematice care nu pot fi scindate, fără a forța exprimarea, în ipoteză și concluzie; vezi *CRP*, „Probleme de aflat, probleme de domonstrat", (4), p. 160. Iată o propoziție de acest tip: „În fracția zecimală a numărului π există nouă cifre 9 consecutive". A demonstra sau a infirma această propoziție constituie o problemă matematică clar definită — care, deocamdată, pare dezarmant de dificilă. „Un nebun este în stare să întrebe cît nu pot răspunde nici nouă înțelepți".

singură necunoscută iar, în al doilea caz, că există trei necunoscute, sau numai una. Este însă posibil şi un alt punct de vedere, şi el se dovedeşte deseori avantajos: putem spune că în ambele exemple există o singură necunoscută, dar că aceasta este, într-un anumit sens, „subdivizată". Astfel, în primul exemplu, necunoscuta este cercul, dar ea este o necunoscută *bicomponentă* sau *bipartită*; *componentele* ei sînt centrul cercului şi raza acestuia. Tot astfel, în al doilea exemplu, punctul este o necunoscută *tricomponentă* sau *tripartită*; componentele ei sînt cele trei coordonate x, y şi z. În general, putem avea de-a face cu o necunoscută *multipartită* sau *multicomponentă* x, cu componentele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Unele din avantajele terminologiei introduse mai sus constă în aceea că, în anumite discuţii de ordin general, nu mai avem nevoie să facem distincţie între problemele cu *o* necunoscută şi cele cu *mai multe* necunoscute: într-adevăr, putem reduce un caz la celălalt, considerînd acele cîteva necunoscute drept componente ale unei (alte) necunoscute unice. De pildă, toate cele spuse în 5.3 se aplică, în esenţă, şi la problemele în care am avea de găsit mai multe necunoscute, cu toate că în 5.3 acest caz n-a fost menţionat explicit. Vom vedea mai tîrziu că terminologia aceasta se dovedeşte utilă în contexte din cele mai variate.

Dacă problema este o problemă de aflat, poate fi avantajos să subîmpărţim condiţia în mai multe părţi sau *clauze*, aşa cum am avut în repetate rînduri ocazie să observăm. Rezolvînd o problemă de construcţie geometrică, putem împărţi condiţia în două părţi în aşa fel încît fiecare din ele să dea, pentru punctul necunoscut, un loc geometric (cap. 1). Rezolvînd cu ajutorul algebrei o problemă „şcolărească", împărţim (scindăm) condiţia în atîtea părţi — cîte necunoscute, în aşa fel încît fiecare parte să dea o ecuaţie (cap. 2).

Dacă problema este o problemă de demonstrat, poate fi avantajos să subîmpărţim ipoteza, sau concluzia, sau şi pe una şi pe cealaltă, în părţi sau clauze convenabil alese.

5.6. CEEA CE CĂUTĂM ESTE UN PROCEDEU

Cînd construim o figură geometrică — în sensul *Elementelor* lui Euclid — nu sîntem liberi să ne alegem oricum instrumentele de lucru: se subînţelege că urmează să construim figura cu rigla şi compasul. De aceea, rezolvarea problemei constă, de fapt, într-o succesiune de *operaţii geometrice bine coordonate* care porneşte de la

datele problemei şi se încheie cu realizarea figurii căutate: operaţiile constau exclusiv în trasarea de linii drepte şi de cercuri, şi în determinarea punctelor lor de intersecţie.

S-ar putea ca această remarcă să fie revelatorie şi, examinînd lucrurile mai atent, să ne dăm seama că rezolvarea multor probleme este, în esenţă, un *procedeu*, un mod de acţionare, o schemă de operaţii bine corelate, un *modus operandi*.

Să luăm, de pildă, problema rezolvării unei ecuaţii de gradul doi (sau trei, sau patru). Rezolvarea constă dintr-o schemă de operaţii *algebrice* bine coordonate, care pornesc de la date, coeficienţii ecuaţiei date, şi se termină la rădăcinile căutate: operaţiile sînt adunări, scăderi, înmulţiri sau împărţiri ale mărimilor date sau obţinute anterior, sau extrageri de rădăcini din asemenea mărimi.

Să considerăm o problemă „de demonstrat". Soluţia problemei, rezultatul eforturilor noastre, este o demonstraţie, adică o succesiune de operaţii *logice* bine coordonate, o succesiune de etape care porneşte de la ipoteză şi se termină la concluzia dorită a teoremei: fiecare etapă deduce cîteva puncte noi din părţi convenabil alese ale ipotezei, din faptele cunoscute sau din puncte deduse anterior.

Situaţia în cazul problemelor nematematice este cu totul analogă. Constructorul unui pod trebuie să organizeze, să coordoneze, să distribuie într-o schemă coerentă un număr enorm de operaţii: amenajarea căilor de acces, dotarea cu ambarcaţii şi utilaje plutitoare, ridicarea schelelor, turnarea fundaţiilor, sudarea (nituirea) părţilor metalice etc. etc. Mai mult, el poate fi obligat să coreleze aceste operaţii cu altele de cu totul altă natură — tranzacţii financiare, juridice şi chiar politice. Toate aceste operaţii sînt interdependente: cele mai multe dintre ele presupun că anumite alte operaţii au fost deja realizate anterior.

Sau, să luăm cazul unui roman poliţist. Necunoscuta este asasinul; autorul caută să ne captiveze prin ingeniozitatea eroului-detectiv care elaborează o schemă, o linie de acţiune, care, pornind de la primele indicii, sfîrşeşte cu identificarea şi arestarea asasinului.

Obiectul investigaţiei noastre poate fi o necunoscută de o natură oarecare, sau descoperirea adevărului în ceea ce priveşte o aserţiune sau o chestiune de un tip absolut oarecare; problema poate fi teoretică sau practică, serioasă sau insignifiantă. Pentru a rezolva problema, trebuie să elaborăm o schemă coerentă, bine concepută, de operaţii — logice, matematice sau practice — care duce de la ipoteză la concluzie, de la date la necunoscută, de la elementele pe care le avem la cele pe care le căutăm.

EXEMPLE ŞI COMENTARII LA CAPITOLUL 5

5.1. Să se calculeze volumul V al unei prisme drepte cu baza pătrată, fiind date latura bazei, a, şi înălţimea prismei, h.

Care este necunoscuta? Care sînt datele? Care este condiţia?

5.2. Să se găsească două numere reale, x şi y, care satisfac ecuaţia

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Care este necunoscuta? Care sînt datele? Care este condiţia? Descrieţi mulţimea soluţiilor.

5.3. Să se găsească două numere reale x şi y care satisfac ecuaţia

$$x^2 + y^2 = -1.$$

Descrieţi mulţimea soluţiilor.

5.4. Să se găsească doi întregi x şi y care satisfac ecuaţia

$$x^2 + y^2 = 13.$$

Descrieţi mulţimea soluţiilor.

5.5. Să se găsească trei numere reale x, y şi z, astfel încît

$$|x| + |y| + |z| < 1.$$

(1) Descrieţi mulţimea soluţiilor.

(2) Modificaţi problema înlocuind semnul $<$ prin semnul $\leqslant$, şi descrieţi mulţimea soluţiilor pentru problema modificată.

5.6. Enunţaţi teorema lui Pitagora.

Care este ipoteza? Care este concluzia?

5.7. Fie n un întreg pozitiv şi $d(n)$ numărul de divizori ai lui n (toţi divizorii întregi şi pozitivi, inclusiv 1 şi n).

De pildă

6 are divizorii 1, 2, 3, 6; $d(6) = 4$

9 are divizorii 1, 3, 9; $d(9) = 3$

Analizaţi propoziţia:

$d(n)$ este impar sau par după cum n este sau nu pătrat perfect.

Care este ipoteza? Care este concluzia?

5.8. *De demonstrat sau de aflat*? Sînt oare egale numerele $\sqrt{3} + \sqrt{11}$ şi $\sqrt{5} + \sqrt{8}$? Dacă nu sînt egale, care din ele este mai mare?

Enunțată într-o formă mai generală, problema se referă la două numere a și b, bine definite prin operații aritmetice, și cere să se stabilească care din cele trei cazuri posibile

$$a = b,\ a > b,\ a < b$$

este cel care se realizează în fapt.

La această problemă putem sesiza mai multe aspecte.

(1) În primul rînd, trebuie să demonstrăm sau să infirmăm propoziția $a = b$. Dacă se constantă că aceasta este falsă, trebuie să demonstrăm sau să infirmăm propoziția $a > b$. Aceste două puncte de demonstrat pot fi abordate și în ordine inversă, sau pot fi abordate simultan; în orice caz, este clar că aici avem de demonstrat două probleme, legate una de alta.

(2) Există o notație utilizată pe scară largă în diferite ramuri ale matematicii: sign x (se citește „semnul lui x" sau „signum x"), definit în modul următor

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x > 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0 \\ -1 \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$$

Problema enunțată ne cere să găsim numărul sign $(a - b)$: aceasta este o problemă de aflat.

În cele de mai sus nu există nici o contradicție de esență (și nici nu trebuie să existe, dacă terminologia a fost aleasă cu grijă): în (1) avem o problemă A care constă din două probleme de demonstrat, formulate simultan și legate între ele; în (2) avem o problemă (B) care este o problemă de aflat. Noi nu considerăm că aceste două probleme A și B, formulate în termeni diferiți, sînt *identice*, dar ele sînt *echivalente*. (Folosirea termenului „echivalent", în acest context, este explicată în *CRP*, „Problema auxiliară", pp. 155—160, și va fi explicată din nou în cap.9.)

Mai mult, nici dezavantaje practice nu există în cele de mai sus. Din contra, poate fi chiar foarte bine să vedem două aspecte distincte ale unei aceleiași dificultăți: poate că unul ni se va părea mai sugestiv, mai pregnant, decît celălalt, poate că el pune în evidență o latură mai accesibilă și, prin aceasta, ne dă șansa de a ataca dificultatea din direcția mai accesibilă.

5.9. *Alte probleme.* Luați o problemă oarecare (găsiți destule în capitolul precedent), determinați dacă este o problemă „de aflat" sau una „de demonstrat" și, după caz, întrebați-vă:

Care este necunoscuta? Care sînt datele? Care este condiția?

Care este concluzia? Care este ipoteza?

Scopul acestor întrebări este doar să vă familiarizeze cu părțile principale ale problemei. Experiența vă va arăta însă că, dacă ele sînt puse cu seriozitate și se caută cu grijă răspunsul aceste întrebări vă sînt de mare ajutor și în rezolvarea problemelor: prin faptul că vă concentrează atenția asupra părților principale ale problemei, ele vă dezvăluie mai adînc sensul acesteia și vă poate orienta în direcția bună.

5.10. *Procedeul de rezolvare poate consta dintr-o succesiune nelimitată de operații.* Dacă ni se cere să rezolvăm ecuația

$$x^2 = 2,$$

problema poate fi interpretată în mai multe feluri. Interpretarea poate fi: „Să se găsească rădăcina pătrată pozitivă a lui 2, cu cinci cifre semnificative"; în acest caz considerăm că ne-am îndeplinit pe deplin sarcina cînd am calculat fracția zecimală 1,1442. Dar interpretarea poate fi și: „Să se extragă rădăcina pătrată din 2" fără nici o precizare sau stipulare suplimentară și atunci nu ne mai putem îndeplini sarcina calculînd cinci, sau oricare alt număr finit de zecimale după virgulă: răspunsul trebuie să fie un *procedeu*, o *schemă* de operații aritmetice, care poate da *orice* număr dinainte cerut de zecimale.

Iată un alt exemplu: „Să se găsească raportul dintre aria cercului și aria pătratului circumscris", Răspunsul este $\pi/4$, dacă considerăm cunoscută valoarea lui π. Leibniz dădea răspunsul (exprima raportul $\pi/4$) sub formă de serie infinită

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots.$$

Această serie prescrie, de fapt, o succesiune fără sfîrșit de operații aritmetice care ne poate duce la oricite cifre exacte în fracția zecimală a numărului π (în teorie — pentru că în practică procedeul este foarte greoi). „Deși seria aceasta, luată ca atare, nu este potrivită pentru o aproximare rapidă, ci numai pentru a prezenta spiritului raportul cercului către pătratul circumscris, nu cred că s-ar putea imagina altceva care să fie mai potrivit sau mai simplu", spunea Leibniz[3].

5.11. *Cvadratura cercului.* Cînd rezolvăm o problemă „de aflat", căutăm un obiect, obiectul „necunoscut", și se întîmplă foarte frecvent să fim nevoiți să căutăm mai întîi un procedeu (o succesiune de operații) cu care să obținem acel obiect — pentru ca distincția să fie mai netă, să numim procedeul căutat „necunoscuta operațională". Că o distincție netă este, într-adevăr, foarte de dorit — putem ilustra printr-un exemplu istoric.

Fiind dată raza unui cerc, să se construiască, *cu rigla și compasul*, un pătrat care să aibă exact aceeași arie ca cercul.

Aceasta este formularea strictă a celebrei probleme antice a „cvadraturii cercului", problemă care datează de pe vremea primilor geometri greci. Atragem atenția că problema prescrie *natura procedeului de utilizat* (natura „necunoscutei operaționale") trebuie să construim latura pătratului căutat cu ajutorul compasului și al unei rigle (o muchie dreaptă, negradată), trasînd cercuri și drepte și folosind numai puncte date sau obținute prin intersectarea liniilor trasate anterior. Și, bineînțeles, pornind de la extremitățile razei date, trebuie să obținem extremitățile laturii pătratului căutat după un *număr finit* de etape.

---

[3] *Philosophische Schriften*, editate de Gerhardt, vol. IV, p.278.

După multe sute de ani, timp în care nenumărați au fost cei care au încercat s-o rezolve, s-a demonstrat (de către F. Lindemann, în 1882) că soluția nu există; pătratul care are aceeași arie ca cercul dat, fără îndoială, „există" (latura lui poate fi aproximată cu orice precizie dinainte dată, prin diferite procedee infinite, astăzi cunoscute, unul din ele fiind tocmai acea celebră serie a lui Leibniz, de care am vorbit în ex.5.10); ceea ce nu există este un procedeu de tipul dorit (care să conste dintr-o succesiune finită de operații cu rigla și compasul). Cred că o distincție netă între figura căutată și procedeul căutat, între „obiectul necunoscut" și „necunoscuta operațională" ar fi redus substanțial numărul nenorocoșilor căutători ai cvadraturii cercului.

5.12. *Succesiune și consecință.* La construirea unui pod, fixarea unui tronson metalic prefabricat la locul cuveit este o operație importantă. Se poate întîmpla să fie esențial ca, dintre două operații de acest fel, una (anumită) să o preceadă pe cealaltă (de pildă, dacă tronsonul al doilea nu poate fi montat decît după ce a fost montat primul tronson), dar se poate și ca ordinea operațiilor să nu fie esențială. Prin urmare, cînd trebuie efectuate două operații, uneori este necesar să se respecte o succesiune bine stabilită, alteori — nu. Tot astfel, într-o prelegere sau într-o carte, etapele unei demonstrații sînt prezentate într-o anumită succesiune. Însă o etapă poate preceda o alta în timp, fără ca aceasta să însemne că ea este și logic premergătoare. Trebuie să facem deosebire între succesiune în timp și înlănțuire logică (consecință). (Vom reveni asupra acestei probleme importante în cap. 7.)

5.13. *O ambiguitate regretabilă.* Cuvîntul „soluție" are mai multe sensuri distincte, dintre care unele sînt foarte importante și de aceea, ar fi bine să fie diferențiate prin termeni neambigui. În lipsă de ceva mai bun, propun cîțiva asemenea termeni (adăugînd și echivalentul german al fiecăruia).

Obiectul-soluție (Lösungsgegenstand) este un obiect care satisface condiția problemei. Dacă scopul problemei este să rezolve o ecuație algebrică, atunci un număr care satisface ecuația, cu alte cuvinte, o rădăcină a ecuației, este un obiect-soluție. Obiect-soluție poate avea numai o problemă „de aflat". Într-o problemă clar formulată, categoria (mulțimea) din care face parte obiectul-soluție trebuie să fie specificată dinainte — trebuie să știm de la bun început că ceea ce căutăm este un triunghi, sau altceva. De altfel, o asemenea specificare (descrierea precisă a mulțimii din care face parte necunoscuta) constituie o parte principală a problemei. „A găsi necunoscuta" înseamnă a găsi (a identifica, a construi, a calcula, a obține...) obiectul-soluție (mulțimea tuturor obiectelor-soluție).

Procedeul de rezolvare (Lösungsgang) este procedeul (construcția, schema de operații. sistemul de concluzii) care duce la găsirea necunoscutei, în cazul unei probleme de aflat, sau la înlăturarea dubiilor în ceea ce privește veridicitatea aserțiunii propuse, în cazul unei probleme de demonstrat. Așadar, „procedeul de rezolvare" este un termen aplicabil ambelor tipuri de probleme. Cînd începem să lucrăm la o problemă, nu-i cunoaștem procedeul de rezolvare, schema adecvată de operații, dar o căutăm necontenit, în speranța că pînă la urmă o vom găsi: acest procedeu constituie țelul investigației noastre,

el (procedeul) este — într-un anumit sens — necunoscuta noastră, este — hai, să spunem — „necunoscuta operațională" (cf. ex. 5.11).

Putem vorbi, de asemenea, de „munca de rezolvare" (Lösungsarbeit) și de „rezultatul rezolvării" *(Lösungsergebnis)*, dar nu vreau să par prea pedant și, cu excepția cîtorva cazuri importante, voi lăsa pe seama cititorului să descopere din context ce înseamnă în cazul dat cuvîntul „soluție" — un obiect, un procedeu, rezultatul investigației, sau investigația ca atare[4].

5.14. *Datele și necunoscuta, ipoteza și concluzia.* Elementele lui Euclid sînt redactate într-un stil deosebit de consecvent, de structurat, pe care unii ar putea fi înclinați să-l considere solemn, iar alții, pedant. Toate propozițiile sînt formulate după o aceeași schemă de ansamblu și în această formulare, datele și necunoscuta unei probleme de aflat sînt tratate ca și cum ar fi analogele, sau paralelele, ipotezei și respectiv, ale concluziei unei probleme. Între aceste părți principale ale celor două tipuri de probleme există, într-adevăr, așa cum vom vedea mai tîrziu, o anumită analogie, un anumit paralelism, care prezintă o oarecare importanță din punctul de vedere al celui care rezolvă problema, și deci din punctul de vedere al temei pe care ne-am propus-o. Este însă inadmisibil și agramat să se amestece între ei termenii *date* și *ipoteză*, sau termenii *necunoscută* și *concluzie*, și să se folosească vreunul din acești termeni într-o problemă pentru care el este nepotrivit. Trebuie spus că, din nefericire, o asemenea folosire inadmisibilă și agramată a acestor termeni importanți poate fi întîlnită uneori și în texte, nu numai în vorbire.

5.15. *Să numărăm datele.* Un triunghi este determinat de trei laturi, sau de două laturi și un unghi (unghiul cuprins între ele), sau de o latură și două unghiuri, dar nu este determinat de trei unghiuri: pentru a determina un triunghi este nevoie de trei date independente. (Vezi de asemenea ex. 1.43 și ex 1.44.) Pentru a determina un polinom de grad n cu o variabilă x, sînt necesare $(n + 1)$ date independente: cei $(n + 1)$ coeficienți ai dezvoltării polinomului după puterile lui x, sau cele $(n + 1)$ valori pe care le ia polinomul în punctele $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ sau în oricare alte $(n + 1)$ puncte date dar diferite și așa mai departe. Există multe tipuri importante de obiecte matematice pentru determinarea cărora este nevoie de un număr bine definit de date independente. De aceea, cînd rezolvăm o problemă de aflat, este deseori avantajos *să numărăm datele*, și s-o facem cît mai de timpuriu.

5.16. Pentru a determina un polinom cu n laturi sînt necesare

$$(n - 1) + (n - 2) = (n - 3) + n = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3$$

date independente. Ce vă sugerează aceste patru expresii diferite pentru unul și aceleași număr?

---

[4] Cf. *CRP*, „Termeni vechi și termeni noi", (8), p. 207. — *N.A.* În versiunea română s-a folosit totuși cu precădere — deși nu în exclusivitate — termenul (procedeu de) *rezolvare* acolo unde contextul o cerea și aceasta nu din pedanterie, ci pentru că, în românește, accepția principală a termenului „soluție" este cea de „obiect" (căutat), „rezultat" (al investigației). — *N.T.*

5.17. Cîte date sînt necesare pentru a determina o piramidă a cărei bază este un poligon cu n laturi?

5.18. Cîte date sînt necesare pentru a determina o prismă (care poate fi și oblică) a cărei bază este un poligon cu n laturi?

5.19. Cîte date sînt necesare pentru a determina un polinom de grad n în v variabile? (Termenii lui sînt de forma $cx_1^{m_1}x_2^{m_2} \dots x_v^{m_v}$, unde c este un coeficient constant și $m_1 + m_2 + \dots + m_v \leqslant n$.)

CAPITOLUL 6

Extindem domeniul

A doua (lege este) de a împărți fiecare dintre dificultățile pe care le cercetez în atîtea părți în cîte s-ar putea și de cîte ori ar fi nevoie, pentru a le rezolva mai bine
Descartes, *Discurs asupra metodei*, p.48.

Această regulă a lui Descartes este de prea puțină utilitate atît timp cît arta de a face împărțirea... rămîne neexplicată... Împărțindu-și problema în părți neadecvate, un rezolvator de probleme fără experiență îi poate mări dificultatea.
Leibniz, *Philosophische Schriften*, editate de Gerhardt, vol. IV, p. 331.

6.1. DOMENIU MAI LARG PENTRU SCHEMA CARTEZIANĂ

Există implicate în schema carteziană o serie de idei importante, de ordin metodologic, care nu sînt legate în mod necesar, sau exclusiv, de punerea în ecuație. Capitolul de față își propune să pună în evidență cîteva asemenea idei. Vom trece însă de la ecuații la concepte mai generale numai cu multă precauție. Începem cu un exemplu care este suficient de general sub anumite aspecte și în același timp foarte concret, sub un alt aspect; el ne va arăta direcția în care vom acționa în continuare.

(1) O anumită problemă a fost transpusă într-un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute x_1, x_2, x_3 și x_4. Acest sistem are o particularitate: nu toate ecuațiile conțin toate cele patru necunoscute. Ei bine, vrem să scoatem în evidență tocmai această particularitate: notațiile pe care le vom folosi vor arăta clar ce necunoscute conține fiecare ecuație, și vom neglija orice alt detaliu. Într-adevăr, vom scrie cele patru ecuații sub forma următoare:

$$\begin{aligned} r_1(x_1) &= 0 \\ r_2\ (x_1,\ x_2,\ x_3) &= 0 \\ r_3\ (x_1,\ x_2,\ x_3) &= 0 \\ r_4\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) &= 0 \end{aligned}$$

Aceasta înseamnă că prima ecuație nu conține decît o singură necunoscută, pe x_1, următoarele două ecuații conțin primele trei necunoscute, x_1, x_2, și x_3, iar ultima, a patra ecuație, conține toate cele patru necunoscute.

Această situație sugerează un plan cu totul evident de rezolvare a sistemului de ecuații propus: începem cu x_1 pe care îl calculăm din prima ecuație. După ce am obținut valoarea lui x_1, observăm că următoarele două ecuații formează un sistem din care putem determina următoarele două necunoscute, pe x_2 și x_3; după ce le-am obținut, în felul acesta, pe x_1, x_2 și x_3, folosim ultima ecuație pentru a calcula ultima necunoscută, x_4.

(2) Să ne pătrundem bine acum de faptul că sistemul de ecuații considerat exprimă *condiția* unei probleme. Această condiție este împărțită în patru părți și fiecare ecuație luată ca atare reprezintă o parte (sau o clauză) a condiției de ansamblu: ecuația exprimă faptul că necunoscutele implicate în ea sînt legate unele de altele și de datele problemei printr-o relație exact ca aceea pe care o prescrie partea (sau clauza) corespunzătoare a condiției. Așadar, condiția are o particularitate: nu toate clauzele ei implică toate necunoscutele. Notația folosită arată clar ce necunoscute implică fiecare clauză.

Bineînțeles, condiția poate fi împărțită în clauze în modul acesta special (în care fiecare clauză implică numai combinația particulară indicată de necunoscute) chiar și dacă n-am tradus încă aceste clauze în ecuații, și chiar și dacă nici măcar nu știm cum s-o facem. Este de bănuit că *planul* schițat mai sus, în (1), pentru rezolvarea unui sistem de ecuații *rămîne valabil* — într-un anumit sens — și pentru un sistem de clauze, chiar și dacă aceste clauze nu sînt exprimate — sau nu sînt exprimabile — algebric.

Această remarcă dă cale liberă spre un domeniu larg de noi posibilități.

(3) Pentru a vedea mai clar aceste posibilități, va trebui să dăm notațiilor noastre o altă interpretare.

Pînă acum am interpretat simbolul $r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în modul obișnuit, adică drept o expresie algebrică (sau un polinom, sau o fracție) de numerele necunoscute (variabile) $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Astfel am intepretat

$$r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

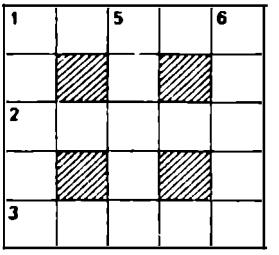
drept o ecuație (algebrică) care leagă necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dacă ne ocupăm de o problemă în care $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt necunoscute, o asemenea ecuație exprimă o parte a condiției (o clauză a condiției), adică o relație impusă de condiție între date și necunoscutele $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$.

Nu vom renunța la această interpretare, ci o vom extinde: chiar și atunci cînd clauza nu este tradusă într-o ecuație, sau cînd $x_1, x_2, \ldots$

$\ldots, x_n$ sînt nu numere necunoscute, ci obiecte necunoscute, de o natură oarecare, ecuaţia simbolică

$$r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

va exprima o *relaţie, impusă de condiţia problemei, în care sînt implicate necunoscutele* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Putem spune, de asemenea, că o astfel de ecuaţie simbolică exprimă o parte a condiţiei (o clauză, o stipulaţie, o cerinţă, o exigenţă impusă de condiţie).



Pentru a înţelege cum se cuvine această extindere a domeniului reflectat de notaţie nu avem nevoie decît de cîteva exemple; pentru a ne convinge că această extindere este realmente utilă, sînt necesare ceva mai multe exemple.

(4) Notaţia pe care tocmai am introdus-o poate fi convenabil, dacă nu chiar perfect, ilustrată de un joc de cuvinte încrucişate. Să analizăm un exemplu (foarte scurt).

Orizontal	Vertical
1. Matematician german	4. Altfel drage
2. Făină moale	5. Nu e rar
3. Matematician elveţian	6. O sută la mahala.

Într-un joc de cuvinte încrucişate, necunoscutele sînt cuvinte. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_6$ cele şase cuvinte necunoscute din jocul nostru. Cele două cuvinte x_1 şi x_4 au litera iniţială scrisă în acelaşi pătrăţel notat cu 1, însă x_1 trebuie scris orizontal spre dreapta, iar x_4 — vertical în jos; pentru $n = 2, 3, 5$ sau 6, x_n reprezintă cuvîntul a cărui literă iniţială trebuie scrisă în pătrăţelul numerotat cu n. Dacă contabilizăm pedant toate condiţiile implicate de careul pătratic cu pătrăţelele negre şi albe (acestea din urmă — unele numerotate, altele nu), găsim că avem un sistem de 21 condiţii[1].

Avem mai întîi condiţiile cu totul evidente — în număr de şase — date de „definiţiile" jocului. Să le reprezentăm prin

$$r_1(x_1) = 0,\ r_2(x_2) = 0,\ \ldots,\ r_6(x_6) = 0.$$

Aşadar, ecuaţia simbolică $r_1(x_1) = 0$ reprezintă condiţia ca cuvîntul x_1 să fie numele (sperăm — cel de familie!) al unui matematician german; $r_4(x_4) = 0$ exprimă semnificaţia propoziţiei (deocamdată, destul de sibilină) „Altfel drage" şi aşa mai departe.

[1] Este însă doar o coincidenţă că şi numărul de „puncte" (pătrăţele) albe este tot 21. — N.T.

Există apoi cele şase condiţii, vizibile pe careu, cu privire la lungimile celor şase cuvinte necunoscute.

$$r_7(x_1) = 0,\ r_8(x_2) = 0,\ \ldots,\ r_{12}(x_6) = 0.$$

De pildă, $r_7(x_1) = 0$ stipulează lungimea cuvîntului x_1. În cazul de faţă, semnificaţia acestor condiţii este una şi aceeaşi, şi anume că fiecare din cuvintele $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_6$ trebuie să aibă cinci litere.

Careul ne mai arată apoi cum se intersectează între ele cuvintele (care cu care, şi în ce pătrăţel anume), ceea ce implică alte nouă condiţii:

$$\begin{array}{lll} r_{13}(x_1,\ x_4) = 0, & r_{14}(x_1,\ x_5) = 0, & r_{15}(x_1,\ x_6) = 0, \\ r_{16}(x_2,\ x_4) = 0, & r_{17}(x_2,\ x_5) = 0, & r_{18}(x_2,\ x_6) = 0, \\ r_{19}(x_3,\ x_4) = 0, & r_{20}(x_3,\ x_5) = 0, & r_{21}(x_3,\ x_6) = 0. \end{array}$$

De pildă, $r_{14}(x_1,\ x_5) = 0$ stipulează că a treia literă a cuvîntului x_1 este litera iniţială a cuvîntului x_5 şi aşa mai departe.

Am enumerat deci toate condiţiile; ele sînt în număr de $6 + 6 + 9 = 21$.

(5) În general, dacă problema implică n necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi împărţim condiţia în l părţi (stipulaţii, cerinţe, clauze, ...) distincte, obţinem un sistem de l relaţii care leagă între ele cele n necunoscute, sistem de relaţii pe care îl putem exprima printr-un sistem de l ecuaţii simbolice între cele n necunoscute, în felul următor:

$$\begin{array}{l} r_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0 \\ r_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_l(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0. \end{array}$$

În capitolul 2 ne-am ocupat de cazul particular în care necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt numere necunoscute, ecuaţiile sînt nu simple formulări simbolice, ci sînt ecuaţii algebrice autentice, şi $l = n$. În capitolul de faţă ne vom ocupa în repetate rînduri de situaţii speciale (particulare), cum sînt cele discutate în (1) şi (2), în care nu toate clauzele implică neapărat toate necunoscutele.

(6) Se poate întîmpla ca două probleme să fie exprimate de un acelaşi sistem de ecuaţii simbolice. Aceste probleme se pot referi la lucruri cu totul diferite, dar ele au ceva comun: sub un anumit aspect (destul de abstract) ele sînt analoge, şi le putem îngloba într-o aceeaşi clasă. În felul acesta obţinem o nouă clasificare, mai subtilă sau mai rafinată, a problemelor (a problemelor *de aflat*). Prezintă această clasificare vreun interes pentru studiul nostru? Dacă două probleme sînt exprimate de un acelaşi sistem de ecuaţii simbolice, există oare un procedeu de rezolvare aplicabil ambelor probleme?

Iată o întrebare, după părerea mea, pertinentă. Luată la modul cel mai general, întrebarea s-ar putea să nu fie de prea mare folos, dar ea ne ajută să înţelegem situaţiile particulare (speciale) pe care le vom discuta în continuare.

6.2. DOMENIU MAI LARG PENTRU SCHEMA CELOR DOUĂ LOCURI GEOMETRICE

În paragraful precedent, 6.1, am schiţat în linii mari un tablou foarte general. Cum se încadrează în acest tablou observaţiile noastre de pînă acum? Cum se încadrează (sau cum se integrează) în acest tablou prima schemă pe care am pus-o în evidenţă?

(1) Ca să răspundem mai pregnant la întrebare, să ne adaptăm convenabil terminologiei.

În problemele de construcţie geometrică, am considerat „locuri geometrice". Un asemenea „loc" este efectiv o mulţime de puncte. În cele ce urmează vom numi *loc* (fără alt apelativ. — *N. T.*) o mulţime (oarecare, nu neapărat de puncte geometrice. — *N T.*), dacă mulţimea aceea intervine în rezolvarea unei probleme într-un anumit mod caracteristic care va rezulta clar din exemplele care urmează. Deoarece termenul „mulţime" (vezi ex. 1.51), are deja atîtea sinonime (clasă, agregat, colecţie, categorie), poate părea superflu să-i mai adăugăm unul. Termenul „loc" prezintă însă avantajul că ne poate aminti experienţa dobîndită cu anumite probleme elementare de geometrie şi, prin aceasta, ne poate sugera, prin analogie, unele etape utile, cînd avem de tratat alte probleme, de altă natură şi, eventual, mai dificile.

(2) *Două locuri pentru un punct în plan.* Să ne întoarcem la cel dintîi exemplu pe care l-am analizat: *Să se construiască un triunghi, fiind date cele trei laturi.*

Să examinăm din nou rezolvarea obişnuită (1.2). Trasînd una din laturi, să spunem — latura a, automat fixăm două vîrfuri, B şi C, ale triunghiului căutat. Nu ne mai rămîne de găsit decît un singur vîrf; să numim acest al treilea vîrf, încă necunoscut în acest stadiu al rezolvării, vîrful x. Condiţia cere de la acest punct x două lucruri:

(r_1) punctul x să fie la distanţa b dată de vîrful C dat,

(r_2) punctul x să fie la distanţa c dată, de vîrful B dat.

Folosind notaţia introdusă în 6.1, scriem aceste două cerinţe (r_1) şi (r_2) sub formă de ecuaţii simbolice:

$$r_1(x) = 0$$
$$r_2(x) = 0$$

Punctele x care satisfac prima cerinţă (r_1) (prima din cele două ecuaţii simbolice) acoperă complet periferia unui cerc (cu centrul în C şi cu raza egală cu b). Această linie circulară formează *mulţimea*, sau *locul*, tuturor punctelor compatibile cu condiţia (r_1). Locul punctelor care satisfac cea de-a doua cerinţă (r_2) (a doua ecuaţie simbolică este o altă linie circulară. Punctul x care rezolvă problema propusă în legătură cu triunghiul trebuie să satisfacă ambele cerinţe, trebuie să aparţină ambelor locuri. Prin urmare, intersecţia acestor două locuri este mulţimea soluţiilor problemei propuse. Această mulţime conţine două puncte: există două soluţii, două triunghiuri simetrice unul faţă de celălalt în raport cu latura BC.

(3) *Trei locuri pentru un punct în spaţiu.* Să considerăm următoarea problemă de geometrie în spaţiu, analogă cu problema simplă de geometrie plană pe care tocmai am discutat-o mai sus, în (2) :*Să se găsească tetraedrul, fiind date cele şase muchii.*

Folosind procedeul pe care ni l-am reamintit mai sus, în (2), construim baza tetraedrului — un triunghi — din cele trei muchii prescrise ca fiind cele care înconjură baza. Construind baza, automat am situat (localizat) trei vîrfuri ale tetraedrului, să le numim A, B şi C. Nu ne mai rămîne de găsit decît un singur vîrf ; să numim acest vîrf, încă necunoscut în acest stadiu al rezolvării, vîrful x, şi fie a, b şi c, distanţele date, de la acest vîrf pînă la cele trei vîrfuri deja localizate. Condiţia cere de la acest punct x trei lucruri:

(r_1), x să fie la distanţa a de punctul A,
(r_2), x să fie la distanţa b de punctul B,
(r_3), x să fie la distanţa c de punctul C.

Folosind notaţia introdusă în 6.1, scriem aceste trei cerinţe, (r_1), (r_2) şi (r_3), sub forma de ecuaţii simbolice:

$$r_1(x) = 0$$
$$r_2(x) = 0$$
$$r_3(x) = 0.$$

Punctele x care satisfac prima cerinţă (r_1) (prima ecuaţie simbolică) acoperă complet suprafaţa unei sfere (cu centrul în A şi raza a). Această suprafaţă sferică formează mulţimea, sau locul, tuturor punctelor compatibile cu prima cerinţă (r_1). Fiecărei din celelalte două cerinţe (r_2) şi (r_3) îi corespunde cîte o suprafaţă sferică — locul punctelor x care satisfac acea cerinţă. Or, punctul x care rezolvă problema propusă în legătură cu tetraedrul trebuie să satisfacă toate cele trei cerinţe, trebuie să aparţină tuturor celor trei locuri. Prin urmare, intersecţia acestor trei locuri (trei sfere) este mulţimea soluţiilor problemei pro-

puse. Această mulțime conține două puncte: există două soluții, două tetraedre simetrice unul față de altul în raport cu planul triunghiului ABC.

(4) *Locuri pentru un obiect oarecare.* Exemplele discutate în (2) și (3) ne reamintesc, probabil, cîteva alte probleme pe care le-am rezolvat în cap. 1, folosind aceeași schemă. Însă dincolo de aceste exemple, putem discerne o situație generală.

Necunoscuta unei probleme este x. Condiția problemei este împărțită în l clauze pe care le exprimăm sub forma unui sistem de l ecuații simbolice:

$$r_1(x) = 0, \quad r_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad r_l(x) = 0.$$

Acele obiecte x care satisfac prima clauză, exprimată de prima ecuație simbolică, formează o anumită mulțime pe care o numim primul loc. Obiectele care satisfac a doua clauză formează al doilea loc, ... obiectele care satisfac ultima clauză formează locul numărului l. Obiectul x care rezolvă problema propusă trebuie să satisfacă întreaga condiție, adică toate cele l clauze ale condiției, așa că trebuie să aparțină tuturor celor l locuri. Pe de altă parte, orice obiect x care aparține simultan tuturor celor l locuri satisface toate cele l clauze și deci — și întreaga condiție și este, prin urmare, o soluție a problemei propuse. Pe scurt *intersecția* acestor l locuri constituie mulțimea soluțiilor adică mulțimea tuturor obiectelor care satisfac condiția problemei propuse.

Toate acestea sugerează o generalizare foarte cuprinzătoare a schemei celor două locuri (geometrice), cf. cap. 1, o schemă pe care o putem aplica în cazuri de o varietate inepuizabilă, și care poate rezolva aproape orice problemă; împărțim — sau scindăm — mai întîi condiția în clauze convenabil alese, formăm după aceea locurile corespunzătoare diferitelor clauze și, în fine, obținem soluția luînd intersecția acestor locuri. Înainte de a cîntări valoarea acestei scheme. să ne ocupăm de cîteva cazuri concrete.

(5) *Două locuri pentru o linie dreaptă.* Să se construiască triunghiul, cunoscînd r, h_a și α.

Cititorul își amintește, desigur, notațiile folosite în cap. 1: r reprezintă raza cercului înscris, h_a — înălțimea perpendiculară pe latura a, iar α — unghiul opus laturii a.

Problema nu este prea ușoară, însă cîteva etape inițiale sînt destul de evidente. *Am putea oare rezolva o parte a problemei?* Putem construi ușor o parte a figurii căutate: un cerc de rază r, și două tangente care fac între ele unghiul α. (De remarcat că cele două raze duse în punctele de contact fac între ele unghiul $180° - \alpha$.). Vîrful unghiului α va fi vîrful A al triunghiului căutat. Problema s-a redus la construirea dreptei (infinite) din care latura opusă vîrfului A constituie un segment.

Această dreaptă, s-o notăm cu x, devine noua noastră necunoscută, cînd se cunoaşte de acum acea primă parte a figurii pe care considerăm că am trasat-o.

Condiţia pentru dreapta x constă din două clauze:

(r_1), x este tangentă la cercul de rază r, deja construit,

(r_2), x este la distanţa h_a dată de punctul A dat.

Primul loc pentru x este mulţimea tangentelor la cercul de rază r dată.

Al doilea loc pentru x este tot mulţimea tangentelor la un cerc, şi anume la cercul cu centrul în A şi de rază h_a.

Intersecţia acestor două locuri constă din tangentele comune la cele două cercuri. Putem construi efectiv aceste tangente [vezi 1.6(1) şi ex. 1.32].

(De fapt, numai tangentele comune exterioare rezolvă problema aşa cum a fost ea enunţată; tangentele comune interioare, care s-ar putea să nici nu existe, ar face din cercul de rază r un cerc exînscris.)

Ideea de a considera tangentele comune la două cercuri drept *intersecţia a două locuri pentru linii drepte* este o idee utilă; ea devine şi mai utilă dacă includem şi cazurile similare, în particular, cazul limită în care unul din cercuri degenerează într-un punct.

(6) *Trei locuri pentru un solid.* Vom numi „cheie universală" acea piesă (metalică, din lemn etc.) care se adaptează exact în trei găuri de forme diferite: circulară, pătrată şi triunghiulară. Problemă: să se construiască o asemenea „cheie universală".

Priviţi fig. 6.1: diametrul cercului, latura pătratului, baza şi înălţimea triunghiului isoscel sînt egale între ele.

În limbaj geometric, cele trei proiecţii ortogonale ale solidului căutat trebuie să coincidă cu cele trei forme (contururi) date. Presupunem (şi trebuie spus că, de fapt, această presupunere „îngustează" problema, constituie o restricţie) că cele trei direcţii de proiecţie sînt perpendiculare una pe alta. Necunoscuta este un solid, să-l numim x, iar condiţia problemei constă din trei clauze:

(r_1) proiecţia lui x pe podea este un cerc,

(r_2) proiecţia lui x pe peretele din faţă este un pătrat,

(r_3) proiecţia lui x pe peretele lateral este un triunghi isoscel.

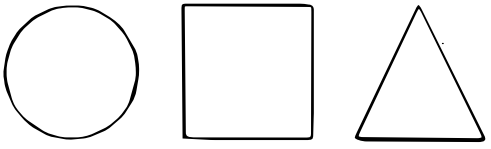


Fig. 6.1. Trei găuri pentru cheia universală

Se subînţelege că solidul este plasat într-o încăpere care are forma obişnuită de paralelipiped dreptunghic, că proiecţiile sînt ortogonale şi că dimensiunile celor trei forme (contururi) din fig. 6.1

sînt legate între ele aşa cum am explicat mai sus.

Să examinăm primul loc, adică mulţimea solidelor care satisfac cerinţa (r_1). Cercul dat este plasat pe podea. Să considerăm o dreaptă oarecare, infinită şi verticală, care trece prin aria acestui cerc, şi s-o numim „fibră". Mulţimea acestor fibre umple un cilindru circular, infinit, pentru care cercul dat constituie o secţiune. Un solid satisface prima cerinţă (r_1) dacă este conţinut în cilindru şi conţine cel puţin cîte un punct din fiecare fibră. Mulţimea tuturor solidelor de acest fel constituie primul loc.

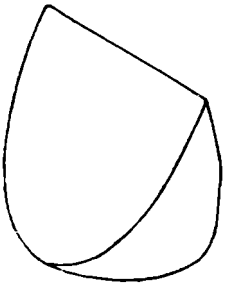


Fig. 6.2. „Cheia universală" optimă

Aşa cum primul loc este legat de un cilindru vertical infinit, tot aşa celelalte două locuri sînt legate de două prisme orizontale infinite. Secţiunea prismei, care corespunde lui (r_2), este pătrată (pătratul dat). Dacă această prismă este orientată pe direcţia nord-sud, prisma corespunzătoare lui (r_2) — ea are secţiunea triunghiulară (triunghiul dat) — este orientată pe direcţia est-vest.

Orice solid x care aparţine tuturor celor trei locuri rezolvă problema este o „cheie universală". Solidul de extindere maximă de acest tip este intersecţia a trei figuri (suprafeţe) infinite, cilindrul şi cele două prisme; el este reprezentat schematic pe fig.6.2.

(De ce este solidul „de extindere maximă"? Descrieţi diferitele părţi ale suprafeţei lui. Descrieţi cîteva alte solide care rezolvă problema.)

(7) *Două locuri pentru un cuvînt.* Într-un joc de cuvinte încrucişate în care sînt permise calambururi, definiţii figurate, formulări asociative şi anagrame, găsim următoarea definiţie:

„Această formă de litere mari arată că nu-i vorba de puşti, doar dacă nu vorbesc foarte repede (zece litere)".

Iată o frază destul de sibilină. Ce vrea să spună? Că literele mari de acea formă exprimă diferenţa faţă de „copiii care vorbesc repede"?; sau că ... (eu) vorbesc repede — adică, mă exprim grăbit — şi de aceea folosesc litere mari (?!). Pe de altă parte, este de bănuit că frazei i s-a dat intenţionat un sens aparent care să ne inducă în eroare; fiindcă mai există şi o altă interpretare, probabil mai bună: expresia „formă de" înseamnă „anagramă a lui ...", iar formularea frazei este eliptică: în ea se vorbeşte o dată de puşti — arme şi încă o dată de puşti — copii, şi verbul „vorbesc" se referă (figurat) la puşti-arme

şi (nefigurat) la puşti-copii. Aşa că putem încerca să interpretăm definiţia în felul următor:

Necunoscuta x este un cuvînt. Condiţia constă din două părţi:

(r_1), x este o anagramă a lui LITERE MARI (conţine toate literele din LITERE MARI şi numai pe acestea);

(r_2), x „arată că nu-i vorba de ...etc.." este o frază coerentă în care o propoziţie are sens uzual, iar o alta trebuie interpretată figurat.

Să examinăm această interpretare a problemei. Condiţia este împărţită net în două clauze: (r_1) se referă la scrierea cuvîntului, (r_2) — la sensul lui. Fiecărei clauze îi corespunde un „loc" — însă aceste „locuri" sînt mai greu de „mînuit" decît în cazurile precedente.

Luat ca atare, primul loc este foarte clar. Cele zece litere

A E E I I L R R M T

pot fi ordonate în 453 600 moduri diferite (nu-i nevoie ca cititorul să analizeze aici cum se deduce acest număr care, de altfel, este numărul 10 !/2 !2 !2 !). Dacă ar fi absolut necesar, am putea scrie efectiv cele 453 600 aranjări diferite ale celor zece litere date, fără să repetăm sau să omitem vreuna, epuizînd astfel toate posibilităţile permise de clauza (r_1), adică am putea descrie, sau construi, complet locul corespunzător. Aceasta ar fi însă o treabă plicticoasă, teribil de lungă şi în parte de-a dreptul inutilă (multe dintre aranjări ar fi combinaţii de vocale şi consoane care nu se întîlnesc niciodată în limba română). Mai mult, examinarea mecanică, unul după altul, a tuturor cazurilor posibile n-ar fi nici în spiritul jocului. Aşadar, locul corespunzător clauzei (r_1) este — dacă nu în principiu, cel puţin în practică — inepuizabil la o eventuală enumerare, este imposibil de mînuit.

Locul care corespunde clauzei (r_2) este nu numai imens, inepuizabil în sensul de mai sus, dar şi destul de nebulos. Este dat un cuvînt românesc, x; aserţiunea „x arată că ... etc ..." este oare o frază coerentă? Este o frază uzuală, sau are şi interpretări figurate? În mai toate alternativele, răspunsul este discutabil.

Aşadar, din diferite motive, nici unul din cele două locuri nu este uşor de mînuit, nici unul nu poate fi descris, examinat sau construit în condiţii acceptabile. Şi, bineînţeles, nu avem nici un procedeu de a construi intersecţia acestor două locuri. Totuşi, faptul că ne-am dat seama că, în cazul dat, condiţia are două clauze distincte şi că cuvîntul căutat trebuie să le satisfacă pe amîndouă, poate fi foarte util. Concentrîndu-ne acum asupra uneia din clauze, apoi asupra celeilalte, gîndindu-ne la cuvinte care satisfac aproape complet o clauză, sau pe cealaltă, încercînd în dreapta — în stînga, s-ar putea ca, în cele din urmă, să ne mobilizăm suficient memoria, bagajul nostru de cuvinte şi propoziţii, şi tot răscolindu-le, să dăm peste cuvîntul căutat.

(Am insistat asupra împrejurării că nici una din cele două clauze (r_1) şi (r_2) nu este uşor de mînuit — punctul acesta este util cînd judecăm schema generală de care ne ocupăm. De fapt însă, una din cele două clauze este ceva mai uşor de mînuit decît cealaltă — amănuntul acesta poate fi util în rezolvarea micii enigme de care era vorba.)

6.3. CLAUZA CU CARE ÎNCEPEM

În paragraful precedent am analizat probleme de diferite tipuri şi le-am rezolvat urmînd o aceeaşi schemă pe care am putea-o numi „schema celor *l* locuri". N-am reuşit însă să rezolvăm ultima problemă, cea din 6.2(7). Care era dificultatea? Am reuşit să separăm destul de net condiţia în clauze, dar n-am reuşit să facem nimic cu locurile care corespund acestor clauze: n-am reuşit să epuizăm, să descriem convenabil acele locuri şi, de aceea, n-am reuşit să determinăm nici intersecţia lor.

Există însă cazuri în care dificultatea aceasta, deşi prezentă, nu apare în forma ei cea mai acută, aşa că reuşim să le descurcăm şi să le rezolvăm pînă la capăt.

(1) *Două locuri pentru un cuvînt.* Într-un joc de cuvinte încrucişate în care sînt permise calamburile şi definiţiile figurate, găsim următoarea definiţie:

„Apă multă — în două sensuri (cinci litere)".

După cîteva tatonări ajungem eventual la următoarea interpretare: Necunoscuta x este un cuvînt. Condiţia constă din două clauze:

(r_1) x înseamnă „apă multă",

(r_2) x este un cuvînt din cinci litere care, citit invers, îşi păstrează acelaşi înţeles de „apă multă".

Cu care din clauze trebuie să începem? Între ele există o diferenţă. Pentru a lucra eficient cu clauza (r_2), ar trebui să avem în minte lista cu toate cuvintele de cinci litere care, citite invers, au acelaşi înţeles. Or, foarte puţini sînt cei care reuşesc această performanţă; în schimb, mai toţi ne putem aminti cuvinte care au, mai mult sau mai puţin, semnificaţia de „apă multă"; tot ce avem de făcut este să le examinăm, în ordinea în care ne vin în minte, dacă îndeplinesc sau nu şi clauza (r_2). Iată cîteva asemenea cuvinte:

rîu — fluviu, mare — ocean, lac — iaz, baltă, bazin, cascadă — şuvoi, torent, curent, val — maree, flux, viitură — revărsare, ploaie — aversă — şi, bineînţeles, POTOP(!)[2].

---

[2] *CRP*, „Descompunerea şi recombinarea", (8), pp. 88—89, conţine un exemplu foarte asemănător şi anticipează ideea esenţială a paragrafului de faţă.

(2) Să încercăm să extragem din procedeul de mai sus elementul esenţial.

Clauza (r_1) selectează, din cîmpul invers al tuturor cuvintelor, o mulţime restrînsă de cuvinte, dintre care unul este soluţia. Clauza (r_2) face acelaşi lucru, dar există o diferenţă: selecţia este mai uşoară într-un caz decît în altul, putem jongla mai eficient cu (r_1) decît cu (r_2). Am folosit clauza mai uşor de mînuit penru o următoare, a doua, selecţie: la început selectăm elemente din rezervorul imens al tuturor cuvintelor, după aceea — primul loc, mult mai restrîns, obţinut la prima selecţie.

Morala este simplă: Fiecărei clauze îi corespunde un loc. *Începeţi cu clauza pentru care locul poate fi constituit mai complet, sau mai eficient.* Procedînd astfel, puteţi să vă scutiţi de osteneala de a construi locurile corespunzătoare celorlalte clauze: celelalte clauze le folosiţi pentru a selecta elemente din primul loc.

(3) *Două locuri pentru o necunoscută tripartită.* Cîţi ani şi cîţi copii are căpitanul, şi cît de lung este vasul pe care-l comandă? Se dă produsul celor trei numere (întregi) căutate: 32 118. Lungimea vasului este dată în metri (ea este de „mulţi metri"), căpitanul are şi băieţi şi fete, are mai mulţi ani decît copii, dar nu este încă centenar.

Această problemă „de-bătut-capul" cere să se găsească trei numere

$$x, \qquad y, \qquad z,$$

care reprezintă (respectiv)

numărul copiilor, vîrsta căpitanului, lungimea vasului

Este avantajos să concepem această problemă în felul următor: nu avem decît o singură necunoscută; această necunoscută nu este însă un număr, ci o necunoscută tripartită, un triplet de numere (x, y, z).

Este foarte important să subîmpărţim condiţia formulată în enunţul problemei în clauze alese cît mai convenabile. Pentru aceasta este nevoie să examinăm cu atenţie detaliile şi să operăm în rîndul lor regrupări substanţiale. După cîteva tatonări (peste care sărim, ca să economisim spaţiu) putem ajunge la următoarele două clauze:

(r_1) x, y şi z sînt întregi pozitivi, diferiţi de 1 şi astfel încît

$$xyz = 32\,118$$

(r_2)
$$4 \leqslant x < y < 100.$$

Cu care din aceste două clauze trebuie să începem? Desigur, cu (r_1), care nu lasă decît un număr finit de posibilităţi, în timp ce (r_2), care nu impune nici o restricţie asupra lui z, lasă o infinitate.

Prin urmare, analizăm (r_1). Numărul 32 118 este divizibil cu 6, şa că îl putem descompune uşor în factori primi:

$$32\,118 = 2 \times 3 \times 53 \times 101.$$

'entru a-l descompune în trei factori (oarecare), trebuie să combinăm :nmulţim) între ei doi dintre cei patru factori primi. Prin urmare, u există decît şase moduri diferite de a descompune numărul 2 118 într-un produs de trei factori, toţi diferiţi de 1:

$$\begin{aligned} 6 &\times 53 \times 101 \\ 3 &\times 101 \times 106 \\ 3 &\times 53 \times 202 \\ 2 &\times 101 \times 159 \\ 2 &\times 53 \times 303 \\ 2 &\times 3 + 5353 \end{aligned}$$

)intre aceste şase posibilităţi, cerinţa restantă (r_2) nu păstrează ecît una, aşa că obţinem

$$x = 6, \quad y = 53, \quad z = 101.$$

Căpitanul are 6 copii, 53 ani, iar vasul lui este lung de 101 metri.

Ideea esenţială a rezolvării acestei probleme simple (care, cum edem, nu dă de fapt prea multă „bătaie de cap") este deseori aplica-ilă şi în cazuri mai complicate: se împarte condiţia globală într-o lauză „majoră" care lasă numai un număr mic de posibilităţi, şi se lege între aceste posibilităţi folosind partea „minoră", restantă, a ondiţiei[3].

† (4) *Două locuri pentru o funcţie.* Există un tip foarte impor-ant de probleme matematice, întîlnit frecvent în fizică şi inginerie, la are condiţia se împarte în mod firesc în două clauze: determinarea nei funcţii dintr-o ecuaţie diferenţială, şi din condiţiile iniţiale sau la imită. Iată un exemplu simplu: necunoscuta x este o funcţie de va-iabila t; se cere ca această funcţie să satisfacă

(r_1) ecuaţia diferenţială $\dfrac{d^2x}{dt^2} = f(x,t)$, unde $f(x,t)$ este o funcţie dată,

(r_2) condiţiile iniţiale $x = 1$, $\dfrac{dx}{dt} = 0$ pentru $t = 0$.

Trebuie să începem cu ecuaţia diferenţială, sau cu condiţiile ini-iale? Aceasta depinde de natura (structura concretă) a funcţiei $f(x,t)$ late.

[3] Cf. ex. 6.12 — 6.17.

Primul caz. Fie $f(x,t) = -x$, aşa că ecuaţia diferenţială propus este:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x.$$

Această ecuaţie diferenţială aparţine unuia din acele puţine tipuri privilegiate pentru care putem scrie explicit „integrala generală". Într-adevăr, cea mai generală funcţie care satisface ecuaţia diferenţială este

$$x = A \cos t + B \sin t,$$

unde A şi B sînt constante arbitrare (constante de integrare). Prin aceasta am obţinut „locul" care corespunde clauzei (r_1).

Trecem acum la clauza (r_2) pe care o folosim pentru a selecta din primul loc pe care tocmai l-am obţinut, soluţia care ne trebuie punînd $t = 0$ în expresiile pentru x şi $\frac{dx}{dt}$, găsim, din condiţiile iniţiale, că

$$A = 1, \quad B = 0, \quad x = \cos t.$$

Cazul al doilea. Examinăm ecuaţia diferenţială, dar nu reuşim să-i găsim integrala generală (sau măcar vreuna din integralele ei particulare) şi decidem că în această direcţie nu trebuie să mai insistăm. Ce trebuie să facem în continuare? Cu care din cele două clauze (r_1) şi (r_2), trebuie acum să începem?

În această situaţie, putem recurge mai întîi la (r_2): scriem pe x ca o serie de puteri în t, ai cărei coeficienţi de la început (coeficienţi u_0 şi u_1) sînt determinaţi de condiţiile iniţiale, în timp ce restul coeficienţilor u_2, u_3, u_4, ..., apar, în această etapă a rezolvării, ca nişte numere nedeterminate (de fapt, ei sînt tocmai necunoscutele noastre — vezi, ex. 3.81):

$$x = 1 + u_2t^2 + u_3t^3 + u_4t^4 + \ldots$$

Prin urmare, putem spune că, într-un anumit sens, am obţinut locul care corespunde clauzei (r_2). Trecem acum la (r_1), prima clauză, pentru a determina restul coeficienţilor, u_2, u_3, ..., din ecuaţia diferenţială (dacă este posibil — prin recurenţă; vezi din nou 3.81).

De remarcat că, în ambele cazuri, ecuaţia diferenţială este mai „selectivă" (restrînge mult mai mult alegerea funcţiei) decît condiţiile iniţiale. Astfel, condiţiile iniţiale (r_2) determină numai doi coeficienţi ai seriei de puteri; ecuaţiei diferenţiale (condiţia (r_1)) îi rămîne s

determine şirul infinit al celorlalţi coeficienţi. Aceasta arată că clauza „mai selectivă" nu este totdeauna şi clauza „mai potrivită" pentru a fi folosită prima.

6.4. DOMENIU MAI LARG PENTRU SCHEMA RECURENŢEI

În paragraful precedent am sesizat o diferenţă importantă între clauze şi clauze: putem avea motive, şi chiar motive foarte serioase, să începem prin a lua în considerare o anumită clauză, înaintea celorlalte. Ce-i drept, acolo există o limitare: nu ne-am ocupat decît de cazul unei singure necunoscute. (Această limitare nu este însă realmente restrictivă; vezi indicaţia din 5.5.) Să considerăm acum cazul mai multor variabile.

(1) Există un caz general important pe care ni-l sugerează cîteva din exemplele considerate în cap. 3. Fie n necunoscute $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ care satisfac n condiţii de forma următoare:

$$\begin{aligned} r_1(x_1) &= 0 \\ r_2(x_1, x_2) &= 0 \\ r_3(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ r_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Acest sistem particular de n relaţii ne sugerează nu numai de unde trebuie să începem, ci şi cum trebuie să mergem mai departe. De fapt, el sugerează un întreg plan de bătaie: începem cu x_1, pe care îl determinăm din prima relaţie. După ce l-am obţinut pe x_1, determinăm pe x_2 din relaţia a doua. După ce i-am obţinut pe x_1 şi x_2, îl determinăm pe x_3 din relaţia a treia şi aşa mai departe: determinăm necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una cîte una, în ordinea în care sînt numerotate, folosind valorile celor deja determinate pentru a obţine valoarea necunoscutei imediat următoare. Acest plan funcţionează perfect dacă relaţia cu numărul de ordine k este o ecuaţie

$$r_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) = 0,$$

din care putem exprima pe x_k în funcţie de $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, pentru $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Situaţia este deosebit de favorabilă dacă ecuaţia este liniară în x_k (al cărui coeficient trebuie, bineînţeles, să fie diferit de zero).

Aceasta este schema *recurenţei*: determinăm pe x_k recurgînd, sau revenind, la valorile $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}$ obţinute anterior.

Urmînd această schemă, înaintăm, pur şi simplu, pas cu pas, începînd cu x_1, trecînd la x_2 după x_1, la x_3 după x_2 şi aşa mai departe,

ceea ce pare lucrul cel mai evident, cel mai natural care poate fi făcut. La fiecare pas, facem apel la informaţia acumulată în cursul etapelor precedente — şi aceasta este trăsătura probabil cea mai semnificativă a schemei. Vom înţelege mai clar acest lucru după cîteva exemple.

(2) În 2.5(3) am obţinut un sistem de şapte ecuaţii cu şapte necunoscute. Să renumerotăm necunoscutele după cum urmează:

$$D = x_7$$

$$a = x_4 \qquad b = x_5 \qquad c = x_6$$

$$p = x_1 \qquad q = x_2 \qquad r = x_3$$

şi să scriem din nou sistemul de ecuaţii, indicînd cu precizie ce necunoscute sînt legate între ele de fiecare ecuaţie, dar neglijînd celelalte detalii, şi numerotînd în aşa fel ecuaţiile, încît să se vadă clar ordinea în care trebuie tratate.

Obţinem în felul acesta următorul sistem de relaţii:

$$\begin{aligned} r_1(x_2,\ x_3) &= 0 \\ r_2(x_3,\ x_1) &= 0 \\ r_3(x_1,\ x_2) &= 0 \\ r_4(x_2,\ x_3,\ x_4) &= 0 \\ r_5(x_3,\ x_1,\ x_5) &= 0 \\ r_6(x_1,\ x_2,\ x_6) &= 0 \\ r_7(x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7) &= 0. \end{aligned}$$

Scris sub forma aceasta, sistemul impune evident următorul plan: separăm de rest primele trei ecuaţii. Ele conţin numai primele trei necunoscute, x_1, x_2, x_3, şi pot fi considerate un sistem de trei ecuaţii pentru aceste trei necunoscute. (Într-adevăr, putem calcula uşor pe $x_1 = p$, $x_2 = q$ şi $x_3 = r$ din sistemul de trei ecuaţii dat în 2.5(3), sistem care, aici, este reprezentat de primele trei relaţii.) O dată găsite primele trei necunoscute x_1, x_2, x_3, sistemul „devine recurent": mai întîi obţinem pe x_4, x_5 şi x_6, fiecare necunoscută — din ecuaţia cu numărul de ordine corespunzător. (De fapt, ordinea în care ne ocupăm de aceste trei necunoscute nu are nici o importanţă). După ce i-am obţinut pe x_4, x_5 şi x_6, folosim ultima relaţie pentru a-l obţine pe x_7 (care este necunoscuta principală în problema originală, vezi 2.5(3); celelalte nu sînt decît necunoscute auxiliare).

Cititorul ar fi bine să compare sistemul discutat aici cu cel considerat în 6.1(1).

(3) *Rezolvați ecuația*

$$(oi)^2 = boi$$

Bineînțeles, *oi* și *boi* sînt numere obișnuite (întregi pozitivi) scrise în notația zecimală obișnuită, primul — un număr de două cifre, celălalt — unul de trei cifre, iar *o*, *i* și *b* sînt cifre. De altfel, putem formula problema și foarte pedant: să se găsească *o*, *i* și *b* care satisfac ecuația

$$(10o + i)^2 = 100b + 10o + i,$$

unde *o*, *i* și *b* sînt întregi, $1 \leqslant o \leqslant 9$, $0 \leqslant i \leqslant 9$, $1 \leqslant b \leqslant 9$.

Această mică problemă de amuzament nu este prea dificilă. Dacă cititorul a rezolvat-o și singur, el va putea judeca cu alți ochi schema care urmează, fiind mai bine plasat pentru a-i aprecia elementele de interes. În faza inițială, vom examina numai o singură necunoscută. În faza a doua, vom mai adăuga una, și vom considera două neunoscute luate împreună. Și abia în ultima fază vom avea de-a face cu toate trei necunoscutele.

Faza (*i*). Începem cu *i* fiindcă există o *cerință care privește exclusiv pe i*: ultima cifră zecimală a lui i^2 trebuie să fie *i*. Scriem pătratele tuturor celor zece cifre

0, **1**, 4, 9, 16, **25**, **36**, 49, 64, 81

și găsim că numai patru din cele zece cifre satisfac cerința, așa că

$$i = 0 \text{ sau } 1 \text{ sau } 5 \text{ sau } 6$$

Faza (*i*, *o*). Există o cerință care implică numai două din cele trei cifre, și anume pe *i* și pe *o*:

$$100 \leqslant (oi)^2 < 1000$$

din care deducem ușor că

$$10 \leqslant oi \leqslant 31.$$

Combinînd această informație cu rezultatul considerațiilor precedente cu privire la *i*, găsim că numărul de două cifre *oi* trebuie să fie unul din următoarele zece numere:

10,	11,	15,	16,
20,	21,	25,	26,
30,	31,		

Faza (*i*, *o*, *b*). Enumerăm acum pătratele celor zece numere pe care tocmai le-am aobţinut

100, 121, 225, 256,
400, 441, **625**, 676,
900, 961,

şi găsim că numai unul satisface ansamblul condiţiei. Prin urmare,

$$i = 5, \qquad o = 2, \qquad b = 6$$

$$(25)^2 = 625.$$

(4) În subparagraful precedent (3) am împărţit condiţia problemei propuse în trei clauze pe care le putem reprezenta (folosind notaţia introdusă în 6.1) printr-un sistem de trei ecuaţii simbolice

$$r_1(i) = 0$$
$$r_2(i, o) = 0$$
$$r_3(i, o, b) = 0$$

Să comparăm acest sistem de trei clauze cu următorul sistem de trei ecuaţii liniare:

$$a_1x_1 = b_1$$
$$a_2x_1 + a_3x_2 = b_2$$
$$a_4x_1 + a_5x_2 + a_6x_3 = b_3,$$

unde x_1, x_2, x_3 sînt necunoscutele, a_1, a_2, ..., a_6, b_1, b_2, b_3 — numere date, iar a_1, a_3 şi a_6 sînt presupuse diferite de zero.

Asemănarea dintre aceste două sisteme este mai evidentă decît diferenţa dintre ele; să le comparăm atent.

Să examinăm mai întîi sistemul de trei ecuaţii liniare pentru x_1, x_2 şi x_3. Prima ecuaţie determină complet prima necunoscută, x_1: ultimele ecuaţii nu pot influenţa sau modifica în nici un fel valoarea lui x_1 obţinută din prima. Pe baza acestei valori a lui x_1, a doua ecuaţie determină complet o a doua necunoscută, x_2.

Sistemul de trei clauze în care am subdivizat condiţia pentru necunoscutele *i*, *o* şi *b* seamănă, ca formă, cu sistemul de trei ecuaţii pentru x_1, x_2, x_3, dar diferă în esenţă de acesta. Prima clauză nu determină complet prima necunoscută *i*: ea nu face decît să îngusteze domeniul de alegere al lui *i*; ea dă (aceasta este expresia cea mai adecvată) un *loc* pentru *i*. Analog, a doua clauză nu determină

complet a doua necunoscută o; ea dă un loc pentru perechea de necunoscute (i, o). Abia ultima clauză realizează o determinare definitivă: ea extrage din locul stabilit anterior singurul triplet (i, o, b) care satisface condiția în ansamblu.

6.5. „CUCERIREA" PROGRESIVĂ A NECUNOSCUTEI

Cînd avem de determinat n necunoscute numerice $x_1, x_2, \ldots x_n$, le putem considera drept componentele succesive ale unei necunoscute multipartite (vezi 5.5). Să privim sub acest aspect cele n necunoscute pe care le determinăm succesiv dintr-un sistem recursiv de ecuații, cum este cel considerat în 6.4(1). Procedeul de rezolvare prin recurență ne dezvăluie necunoscuta multipartită gradat, pas cu pas. La început obținem numai o mică informație despre necunoscută, numai valoarea unei singure componente, x_1. Folosind însă această informație inițială, obținem mai mult: adăugăm la prima componentă de acum cunoscută, o a doua. Cu fiecare etapă adăugăm la capitolul „cunoscut" cîte o nouă componentă și, în fiecare etapă, folosim informația deja obținută pentru a obține o informație suplimentară. Cucerim un imperiu provincie cu provincie, folosind în fiecare etapă provinciile deja cucerite drept *bază de operații* pentru a cuceri provincia următoare.

Am întîlnit cazuri în care acest procedeu era mai mult sau mai puțin modificat. Provinciile pot fi cucerite nu numai una cîte una, cuceritorul de imperii anexează uneori și teritorii mai mari, două sau trei provincii dintr-o dată [cf. 6.4(2) și 6.1(1)]. Sau provincia nu este aservită complet dintr-o lovitură; mai întîi o provincie, apoi o alta, devin parțial dependente, pentru ca, în final, o manevră reușită să cucerească totul dintr-o dată [cf. 6.4(3)].

Am întîlnit cu toții, în experiența noastră trecută, și alte variante ale procedeului și am fost, cu siguranță, nu o dată impresionați de caracterul progresiv al procesului de rezolvare (cf. 2.7). Dacă necunoscuta are multe componente (ca la un joc de cuvinte încrucișate), putem avansa simultan de-a lungul mai multor linii; nu trebuie să mizăm totul pe o carte, sau să înșirăm toate mărgelele pe o singură ață, putem folosi și mai multe fire. Ceea ce este esențial este să *folosim informația deja dobîndită ca bază de operații pentru a obține alte informații*. Am impresia că, în acest sens, toate procedeele raționale de rezolvare a problemelor și, în general, de învățare sînt recurente.

EXEMPLE ŞI COMENTARII LA CAPITOLUL 6

6.1. *O condiţie cu multe clauze.* Într-un *pătrat magic* cu n linii, sînt distribuite n^2 numere în aşa fel încît suma numerelor de pe fiecare din cele n linii, de pe fiecare din cele n coloane şi de pe cele două diagonale să fie aceeaşi; această constantă se numeşte „constanta" pătratului magic. Cel mai simplu şi mai bine cunoscut pătrat magic are $n = 3$ şi este „umplut" cu primele nouă numere naturale 1, 2, . . . ,9. Să examinăm în detaliu problema care cere să se găsească acest pătrat magic simplu.

Care este necunoscuta ? Există nouă necunoscute; să notăm cu x_{ik} numărul căutat de pe linia i şi coloana k; $i, k = 1, 2, 3$.

Care este condiţia ? Condiţia are patru tipuri distincte de clauze:

(1) x_{ik} este un întreg

(2) $1 \leqslant x_{ik} \leqslant 9$

(3) $x_{ik} \neq x_{jl}$ dacă $i \neq j$ sau $k \neq l$

(4) $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ pentru $i = 1, 2, 3$

$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ pentru $k = 1, 2, 3$

$x_{13} + x_{22} + x_{31} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$.

Stabiliţi numărul de clauze de fiecare tip şi numărul total de clauze. Ce formă au aceste clauze în notaţiile din 6.1(3) ?

6.2. Introducînd o necunoscută multipartită, reduceţi sistemul general considerat în 6.1(5) la sistemul (aparent mai puţin general) considerat în 6.2(4).

6.3. Introducînd o necunoscută multipartită, reduceţi sistemul considerat în 6.1(1) la un caz particular al sistemului considerat în 6.4(1).

6.4. Reduceţi sistemul considerat în 6.4(2) aşa cum se recomandă în ex. 6.3.

6.5. Elaboraţi un plan pentru rezolvarea sistemului

$$\begin{aligned} r_1(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ r_2(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ r_3(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ r_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0 \\ r_5(x_1, x_2, x_3, x_5) &= 0 \\ r_6(x_1, x_2, x_3, x_6) &= 0 \\ r\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) &= 0. \end{aligned}$$

6.6. Sistemul de relaţii

$$\begin{aligned} r_1(x_1) &= 0 \\ r_2(x_1, x_2) &= 0 \\ r_3(x_2, x_3) &= 0 \\ r_4(x_3, x_4) &= 0 \\ r_n(x_{n-1}, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

este un caz particular deosebit de interesant al unui sistem considerat în text; al cărui sistem?

L-aţi mai întîlnit undeva? Unde aţi avut ocazia să comparaţi două sisteme legate între ele în mod analog?

6.7. Printr-un punct dat în interiorul unui cerc, să se construiască o coardă de lungime dată.

Clasificaţi această problemă.

6.8. Sînt date poziţiile a două drepte, a şi b, şi a unui punct C; este dată, în plus, şi o lungime l. Trasaţi prin punctul C o dreaptă x, în aşa fel încît perimetrul triunghiului format de dreptele a, b şi x să aibă lungimea l.

Clasificaţi această problemă.

6.9. *Să păstrăm numai o parte a condiţiei.* Dintre cele două clauze ale problemei considerate în 6.2(7), (r_1) este ceva mai uşor de mînuit: încercînd să satisfacem această dorinţă, putem elabora un fel de schiţă de plan. Pentru a găsi o anagramă a unei mulţimi date de litere, cum este de pildă LITERE MARI, trebuie să găsim un cuvînt care conţine numai literele din această mulţime şi le conţine pe toate. Un procedeu care ne-ar putea ajuta este următorul: facem abstracţie de ultima parte a condiţie „şi le conţine pe toate" şi încercăm să găsim cuvinte, sau fragmente uzuale de cuvinte, terminaţii de cuvinte, formate din litere extrase din mulţimea dată. Este uşor de găsit cuvinte scurte de acest tip, şi trecînd apoi la cuvinte mai lungi, putem spera că, în cele din urmă, vom ajunge şi la anagrama dorită[4]. În cazul nostru, putem da peste

ARI ARE ERE MĂR ŢÎR MIR RÎT ...
ŢĂRI LIRE MERE RELE IERI MARE MIRE ....
MITRE IŢARI REALI TERME TIARE TĂRÎM ....
MĂRITE MĂRIRE RARIŢE TRIERE TEMERI ....
LITIERE....
MILITARE LITERARE LIMITARE ....
TRI — RAS — RE — (începuturi de cuvinte, prefixe)
-ERE -IRI -IRE -TERE (terminaţii)

Pentru a rezolva problema din 6.2(7), examinăm aceste cuvinte sau fragmente de cuvinte, avînd în minte nu numai anagrama sau clauza (r_1), ci şi clauza (r_2). Unele din ele se pot combina formînd o anagramă completă — însă LIRE MĂRITE sau REMILITARE (de exemplu) nu sînt soluţii acceptabile.

6.10. *Firul Ariadnei.* Ariadna, fiica regelui Minos, s-a îndrăgostit de Tezeu şi i-a dat un ghem de aţă pe care acesta îl desfăşura în urma sa cînd intra în Labirint, pentru ca la întoarcere, urmărind înapoi firul, să găsească drumul spre ieşire.

---

[4] Regula jocului permite asimilarea literelor: A şi Ă, I şi Î, T şi Ţ, S şi Ş etc. — N.T.

Să fi contribuit vreun geniu euristic din preistorie la crearea acestui mit care sugerează atit de izbitor natura anumitor probleme?

Încercînd să rezolvăm o problemă, ni se întîmpă deseori să ne lovim de dificultatea că nu ştim cum să mergem mai departe din punctul în care am ajuns. Labirintul sugerează un alt tip de probleme, în care, din contra, din fiecare punct atins există multe căi de mers mai departe, şi dificultatea constă tocmai în a alege între diferitele posibilităţi. Pentru a rămîne stăpîn pe situaţie într-o asemeanea problemă (sau pentru a-i prezenta rezolvarea, cînd am reuşit să-i găsim soluţia) trebuie să încercăm să tratăm *succesiv* diferite subteme care intervin, să încercăm să le tratăm în ordinea cea mai potrivită, cea mai *economică*: de fiecare dată cînd sîntem în faţa unei alternative, trebuie să alegem în aşa fel *punctul următor, încît să folosim la maximum sprijinul pe care ni-l pot da rezultatele parţiale obţinute anterior*. „Alegerea cea mai potrivită, la o intersecţie" — sau „Decizia optimă într-un nod", cum s-ar spune în limbaj mai modern. — *N.T.* — este sugerată cît se poate de direct de „firul Ariadnei", care, în treacăt fie spus, era una din expresiile favorite ale lui Leibniz.

Problemele care implică mai multe necunoscute, mai multe obiective şi condiţionări interdependente, sînt deseori de natura miticei probleme a labirintului; ca exemple sugestive am putea cita cuvintele încrucişate sau construirea figurilor geometrice complicate. Cînd avem de rezolvat o asemenea problemă, la fiecare etapă avem de făcut o alegere, de luat o decizie; ce obiectiv (ce cuvînt, ce parte a figurii) trebuie să ne propunem în continuare? La început trebuie să căutăm punctul cel mai slab, clauza cu care este cel mai bine să începem — cuvîntul cel mai accesibil din încrucişare, partea figurii cel mai uşor de construit. După ce am găsit un „prim" cuvînt sau am construit un „prim" element al figurii, alegerea obiectivului imediat următor trebuie făcută cu cea mai mare grijă: vom alege acel cuvînt (acea parte a figurii) — altul decît cel dinainte — la obţinerea căruia primul cuvînt (prima parte) deja găsit ne poate oferi maximum de ajutor. Şi tot aşa, în continuare, trebuie să încercăm să ne alegem de fiecare dată obiectivul imediat următor, necunoscuta următoare pe care ne propunem s-o găsim, în aşa fel încît să utilizăm la maximum ajutorul pe care ni-l pot da necunoscutele găsite anterior. (De fapt, toate acestea nu fac decît să precizeze o idee pe care am mai formulat-o în 6.5)

Urmează cîteva probleme care dau cititorului posibilitatea să pună în aplicare recomandările de mai sus şi, totodată, să le verifice utilitatea.

6.11. Găsiţi pătratul magic cu trei linii descris în amănunt în ex. 6.1.

(S-ar putea să ştiţi dinainte o soluţie, însă aici vi se cere să găsiţi toate soluţiile. Ordinea în care analizaţi diferitele necunoscute este foarte importantă. În particular, încercaţi să reperaţi necunoscutele ale căror valori sînt determinate univoc şi începeţi cu ele.)

6.12. Înmulţirea cu 9 „răstoarnă" un număr de patru cifre (dă un număr cu aceleaşi cifre dar în ordine inversă). Care este numărul?

6.13. Găsiţi cifrele a, b, c şi d, ştiind că

$$ab \times ba = cdc.$$

Se presupune că cifrele a şi b ale numărului de două cifre ab (adică $10a + b$) sînt diferite.

6.14. Un triunghi are şase „părţi": trei laturi şi trei unghiuri. Este oare posibil să se găsească două triunghiuri *noncongruente* (= neidentice) în aşa fel încît cinci părţi ale unui triunghi să fie identice cu cinci părţi ale celuilalt triunghi? (*Nu* am afirmat că acele cinci părţi identice sînt şi părţi *corespondente*.)

6.15. Alec, Bill şi Chris au pus la cale un mare picnic. Fiecare din ei a cheltuit cîte 9 dolari şi fiecare a cumpărat sandvişuri, îngheţată şi sticle cu apă minerală. Pentru fiecare din aceste articole, băieţii au cheltuit împreună cîte 9 dolari, dar fiecare băiat şi-a împărţit altfel cheltuielile, şi nici un băiat n-a cheltuit o aceeaşi sumă pentru două articole diferite. Cea mai mare cheltuială este cea a lui Alec, pentru îngheţată; Bill a cheltuit de două ori mai mult pentru sandvişuri, decît pentru îngheţată. Cît a cheltuit Chris pentru apa minerală? (Toate sumele cheltuite se exprimă prin numere întregi.)

6.16. În ajun de Anul nou, trei cupluri (soţ şi soţie), Brown, Jones şi Smith, au cumpărat mici daruri pentru copiii din vecini. Fiecare din cei şase a cumpărat exact atîtea daruri identice cîţi cenţi a plătit pentru fiecare din acele daruri. Fiecare soţie a cheltuit cîte 75 cenţi mai mult decît soţul ei. Ann a cumpărat un cadou mai mult decît Bill Brown, Betty — unul mai puţin decît Joe Jones. Care este numele de familie al lui Mary?

6.17. Era foarte cald în ziua aceea, şi patru cupluri (soţ şi soţie) au băut împreună 44 sticle de coca-cola. Ann a băut 2, Betty 3, Caroline 4 şi Dorothy 5 sticle. Dl. Brown a băut tot atîtea sticle cîte a băut soţia sa, dar diecare dintre ceilalţi trei soţi a băut mai mult decît soţia lui: Dl. Green a băut de două ori mai mult, dl. White — de trei ori, iar dl. Smith de trei ori mai mult. Care sînt numele de familie ale celor patru soţii?

6.18. *Alte probleme.* Încercaţi să analizaţi şi alte probleme din punctul de vedere al acestui capitol. Fiţi atenţi la împărţirea condiţiei în clauze şi cîntăriţi avantajele şi dezavantajele de a începe cu o clauză sau alta. Revedeţi, avînd în minte acest punct de vedere, cîteva probleme din cele pe care le-aţi rezolvat în trecut şi căutaţi noi probleme la care acest punct de vedere are şanse să se dovedească util.

6.19. *Un obiectiv intermediar.* Am început de acum să lucrăm la problema noastră, dar sîntem încă în faza iniţială a lucrului. Am înţeles problema în ansamblu — este o problemă „de aflat". Am răspuns la întrebarea: „Care este necunoscuta?"; ştim de ce natură este obiectul pe care-l căutăm. De asemenea, am trecut în revistă datele şi am înţeles condiţia în ansamblu, şi acum vrem să *descompunem condiţia în părţi convenabile.*

De remarcat că operaţia aceasta nu este totdeauna banală: pot exista mai multe posibilităţi de a descompune condiţia în părţi, şi noi vrem, desigur, să rea-

lizăm descompunerea cea mai avantajoasă. De pildă, cînd rezolvăm algebric o problemă de geometrie, exprimăm fiecare clauză a condiției printr-o ecuație; descopuneri diferite ale condiției în clauze duc la sisteme diferite de ecuații și, bineînțeles, vrem să alegem sistemul care este cel mai comod de mînuit [cf. 2.5(3) și 2.5(4)].

În enunțul problemei propuse, condiția se poate prezenta ca un tot indivizibil, sau poate fi o condiție împărțită de la început în mai multe clauze. Și într-un caz și în celălalt, avem în față o sarcină imediată: să împărțim condiția în clauze convenabile — în primul caz, și să împărțim condiția în clauze mai convenabile — în al doilea caz. Această subdivizare a condiției ne poate apropia de soluția căutată: ea constituie un *obiectiv intermediar, foarte important* în unele cazuri.

6.20. *Reprezentare grafică.* Am exprimat o relație impusă de condiția problemei și care implică anumite necunoscute printr-o ecuație simbolică [notația introdusă în 6.1(3)]. Putem însă exprima asemenea relații și grafic — printr-o diagramă — și reprezentarea grafică poate contribui la formarea unei viziuni mai clare asupra sistemului de astfel de relații.

Reprezentăm o necunoscută printr-un (mic) cerc, o relație între necunoscute printr-un (mic) pătrat și exprimăm faptul că într-o anumită relație este implicată o anumită necunoscută unind printr-o linie pătratul care reprezintă relația cu cercul care reprezintă necunoscuta. Astfel diagrama (a) din fig. 6.3 reprezintă un sistem de patru relații între patru necunoscute; din diagramă vedem, de pildă, că există numai o singură necunoscută implicată în toate cele patru relații, și numai o singură relație care implică toate cele patru necunoscute; de fapt, diagrama (a) și sistemul de patru ecuații din 6.1(1) exprimă exact aceeași situație, una în limbaj geometric, alta în limbajul formulelor. Intersecțiile de linii în puncte situate în afara unui cerc sau a unui pătrat [așa cum se întîmpă într-un (singur) loc pe diagrama (a)] nu au nici o semnificație; de fapt, ne putem imagina că numai cercurile și pătratele sînt cuprinse în planul hîrtiei și că liniile de legătură sînt trasate prin spațiu, așa că n-au nici un punct comun, cu toate că, accidental, proiecțiile lor pe planul hîrtiei se pot intersecta.

Ca și diagrama (a), diagramele (b), (c), (d) și (e) din fig. 6.3 reprezintă, și ele, sisteme de relații întîlnite anterior: indicați paragraful sau exemplul în care au fost analizate.

(Fig. 6.4 exemplifică un alt tip de reprezentare prin diagrame care, ca să spunem așa, îl „dublează" pe cel precedent: atît relațiile cît și necunoscutele sînt reprezentate prin linii, o relație — printr-o linie orizontală, o necunoscută — printr-o linie verticală; o pereche de asemenea linii au un punct comun dacă și numai dacă relația conține necunoscuta respectivă. Fig. 6.3(c) și fig. 6.4(c) exprimă una și aceeași situație și tot așa fig. 6.3(d) și fig.6.4(d).

† Fig. 6.4 sugerează o reprezentare algebrică: o matrice în care fiecare linie corespunde unei relații, și fiecare coloană corespunde unei necunoscute a sistemului: un element (oarecare) al matricei este 1 sau 0, după cum relația corespunzătoare liniei elementului implică sau nu necunoscuta corespunzătoare coloanei elementului).

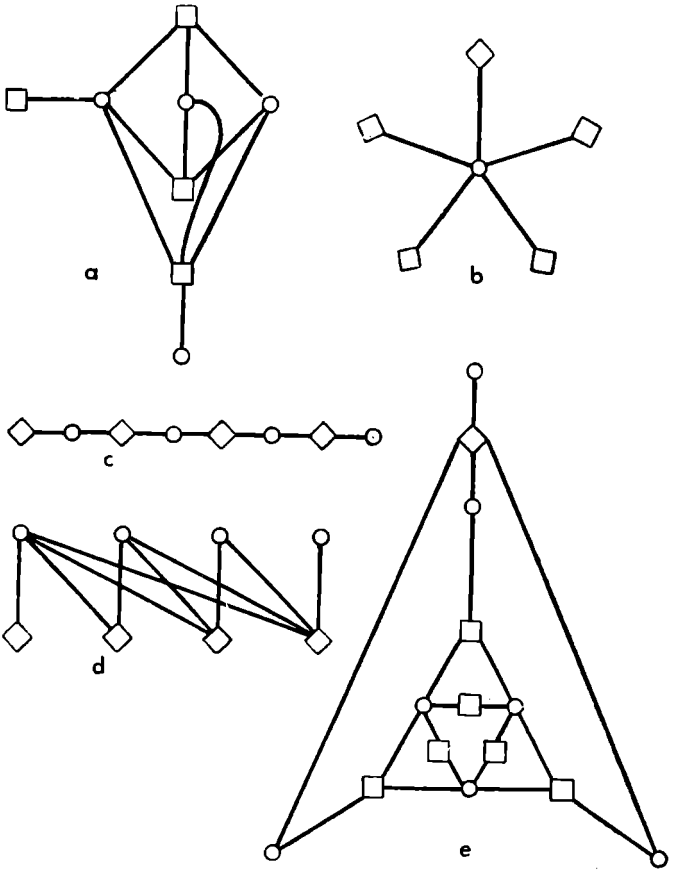


Fig. 6.3. Cercuri şi pătrate — necunoscute şi relaţii

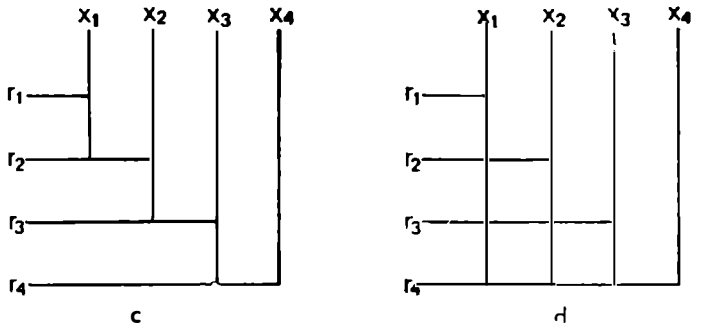


Fig. 6.4. Necunoscute şi relaţii — linii verticale şi linii orizontale

6.21. *Cîteva tipuri de probleme nematematice.* Dintre clauzele condiției, pe care trebuie să încercăm s-o satisfacem mai întîi? Această întrebare apare, ca un lait-motiv, în situații dintre cele mai diferite. În general, după ce am ales o clauză care pare de importanță majoră și am trecut în revistă obiectele (sau unele obiecte) care satisfac această clauză „majoră", introducem în joc clauzele „minore" rămase, care elimină din listă majoritatea obiectelor și lasă, în cele din urmă, unul singur care satisface și clauzele minore și deci — satisface condiția în ansamblu. Această schemă de procedură, pe care am avut ocazia s-o discernem în cele precedente [6.3(3), ex. 6.15, ex.6.16], este suficientă și se impune în mod firesc în cazul multor tipuri de probleme nematematice.

Problema traducătorului. Traducînd din engleză în română, avem nevoie să găsim echivalentul românesc corect al unui cuvînt englez, de pildă al cuvîntului *requirement*. Un dicționar englez-român dă o listă de cuvinte românești (cerere, cerință, solicitare, exigență, necesitate, trebuință) care satisfac numai o primă clauză. Gestul de brută, a condiției de ansamblu a problemei: trebuie să examinăm cu atenție contextul, pentru a descoperi alte clauze, mai subtile, ascunse în el, și să punem în joc aceste clauze pentru a elimina cuvintele mai puțin adecvate și a alege din listă pe cel mai potrivit.

Șah-mat în două mutări. Pe tabla de șah este dată o „poziție" cu piese albe și negre, compatibilă cu regulile jocului. Necunoscuta este o mutare a albului. Condiția cere ca această mutare a albului să fie astfel încît orice ar muta negrul, să poată urma o nouă mutare a albului care să facă mat regele negru.

Mutarea căutată a albului trebuie să „pareze" orice mutare posibilă a negrului (să o împiedice, sau să fie gata să-i răspundă cu mat). Așadar, condiția are, am putea spune, atîtea clauze — cîte mutări ale negrului trebuie parate.

O strategie care merită să fie încercată constă în a începe cu o mutare a negrului care poate să creeze o amenințare majoră, și să se treacă în revistă mutările cu care albul poate para acea amenințare. După aceea luăm în considerare celelalte mutări, „minore", ale negrului și eliminăm din listă acele mutări ale albului care nu reușesc să pareze una sau alta dintre mutările „minore" ale negrului; în cele din urmă pe listă trebuie să rămînă doar o singură mutare, soluția corectă.

Proiectarea inginerească. Un inginer vrea să realizeze un nou *gadget*[5]. Pentru a fi pus în fabricație, noul *gadget* trebuie să îndeplinească o mulțime de condiții („cerințe"); unele sînt de ordin tehnic, cum ar fi funcționarea „rotundă", utilizarea simplă, securitatea deplină pentru cel care îl manipulează, durabilitatea și așa mai departe; altele sînt de ordin „comercial" — preț de cost scăzut, aspect plăcut și așa mai departe. Inginerul reține mai întîi exigențele tehnice (sau numai unele din ele) — putem deci considera că ele formează condiția „majoră" — așa că el are de rezolvat o problemă tehnică (fizică), precis definită. Această problemă are, de obicei, mai multe soluții,

[5] *Gadget* — mic dispozitiv ingenios, de largă utilizare (în gospodărie, activitate profesională, excursii, pentru amuzament, așadar în viața de toate zilele — unul din acele „fleacuri" utile sau doar amuzante care ajung rapid la „modă". — *N.T.*

pe care inginerul le trece în revistă și le analizează. O dată analiza făcută, intră în joc exigențele comerciale (pe care pînă acum le-am considerat „minore"); ele pot elimina multe din proiectele tehnic-rezonabile, pentru a reține pe cel a cărui fabricare pare cea mai rentabilă.

6.22. Rezolvați fără creion și hîrtie — pur și simplu, privindu-l — următorul sistem de trei ecuații cu trei necunoscute

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 30 \\ 2x + 3y + z &= 30 \\ x + 2y + 3z &= 30 \end{aligned}$$

Verificați soluția pe care ați găsit-o.

6.23. Sînt date lungimile a, b și c ale laturilor unui triunghi. Fiecare vîrf al triunghiului este centrul unui cerc; aceste trei cercuri sînt exterioare unul altuia și tangente două cîte două. Găsiți cele trei raze x, y și z.

6.24. Găsiți x, y, u și v care satisfac sistemul de patru ecuații:

$$\begin{aligned} y + u + v &= -5 \\ x + u + v &= 0 \\ x + y + v &= -8 \\ x + y + u &= 4 \end{aligned}$$

Vedeți vreo cale foarte scurtă?

6.25. *O clasificare mai rafinată.* Exemplele precedente 6.22, 6.23 și 6.24 ilustrează un punct important: o dată sesizat faptul că, într-o problemă cu mai multe necunoscute, condiția este simetrică în raport cu aceste necunoscute poate orienta și ușura mult rezolvarea. (Cf., de asemenea, ex 2.8. și *MRP*, vol. I, pp. 221—222, ex. 41. Uneori, ca în ex. 6.23, trebuie să considerăm nu numai permutări ale necunoscutelor, ci permutări ale necunoscutelor *împreună* cu datele). În alte cazuri, mai puțin frecvente dar de asemenea interesante, condiția rămîne neschimbată nu la toate, ci numai la unele permutări (la un anumit grup de permutări) ale necunoscutelor (și ale datelor). Mergînd sistematic pe linia acestei observații, am ajunge la o clasificare a problemelor de aflat și mai rafinată decît cea implicată de observația de bază din acest capitol [vezi 6.1(6)] și putem prevedea că o asemenea clasificare n-ar fi lipsită de interes în studiul pe care îl întreprindem.

CAPITOLUL 7

Reprezentarea geometrică a evoluţiei procesului de rezolvare

A concepe astfel toate aceste lucruri ajută mult, pentru că nimic nu cade mai uşor sub simţuri decît figura (geometrică).
Descartes, *Reguli pentru îndrumarea minţii*, Regula XII, p. 48.

7.1. METAFORE

Ceea ce vă povestesc acum mi s-a întîmplat cam cu 50 ani în urmă, pe vremea cînd eram student; trebuia să explic o problemă elementară de geometrie în spaţiu unui băieţel pe care-l pregăteam pentru un examen, dar mi-am pierdut firul şi ... am amuţit. Îmi venea să-mi trag palme că n-am reuşit să duc pînă la capăt o treabă atît de simplă şi, seara următoare, m-am apucat de lucru cu gîndul să analizez atît de amănunţit rezolvarea încît să n-o mai uit niciodată. Încercînd să văd intuitiv evoluţia firească a procesului de rezolvare şi înlănţuirea ideilor principale implicate, am ajuns în cele din urmă la o reprezentare geometrică a procesului de rezolvare a problemelor. Aceasta a fost prima mea descoperire şi începutul unei preocupări de-o viaţă întreagă — rezolvarea problemelor.

La reprezentarea geometrică care mi s-a impus în final am fost condus de un grup de exprimări metaforice de largă circulaţie. Faptul că limbajul este plin de metafore (moarte, pe cale de a muri, sau cu totul vii) a fost remarcat de mulţi, şi destul de frecvent. Nu ştiu însă dacă s-a remarcat şi faptul că multe din aceste metafore sînt interdependente: metaforele sînt legate între ele, sînt asociate, formează roiuri mai mult sau mai puţin laxe, familii care se acoperă într-o măsură mai mare sau mai mică. În orice caz, fapt este că există o familie cuprinzătoare de exprimări metaforice care au în comun două lucruri: se referă, toate, la aceeaşi activitate de bază a omului care este rezolvarea problemelor şi sugerează, toate, unele şi aceleaşi reprezentări geometrice.

A descoperi o rezolvare, a găsi o soluţie înseamnă a descoperi o *legătură* între lucruri (obiecte) sau idei pînă atunci separate (între obiectele pe care le avem şi obiectele pe care le dorim, între date şi necunoscută, între ipoteză şi concluzie). Cu cît erau mai depărtate, iniţial, obiectele legate, cu atît mai mare este meritul celui care descoperă legătura dintre ele. Uneori vedem legătura aceasta în chip de *punte*: o descoperire mare ne taie răsuflarea ca o punte impresionantă aruncată peste prăpastia adîncă dintre două idei foarte depărtate una de alta. Deseori vedem legătura realizată sub formă de *lanţ*: o demonstraţie ni se înfăţişează ca o *înlănţuire* de argumente, ca un lanţ — uneori lung — de concluzii intermediare. Lanţul nu este mai solid decît *veriga* lui cea mai slabă, şi nu există demonstraţie valabilă, nu există înlănţuire neîntreruptă de raţionamente, dacă din ea lipseşte măcar o singură verigă. Şi mai frecvent folosim însă *firul* ca imagine a legăturii stabilite prin raţionament. Ştim fiecare cîte un profesor care îşi pierdea firul, sau se încurca în firele propriului raţionament, şi era nevoit să se uite pe furiş în notiţele pregătite, ca să-şi poată reînnoda sau regăsi firul expunerii; iar cînd izbutea, în fine, să-şi împreuneze firele într-o concluzie finală, ne simţeam cu toţii obosiţi de moarte. Un fir subţire se transformă într-o simplă linie geometrică, obiectele legate între ele devin simple puncte geometrice şi iată că, aproape inevitabil, apare o imagine grafică — o diagramă — a înlănţuirii concluziilor matematice.

Dar decît să ne plecăm urechea la simple figuri de stil, să examinăm mai bine cîteva figuri geometrice.

7.2. IN CE CONSTĂ PROBLEMA?

Avem nevoie de un exemplu şi aleg o problemă foarte simplă de geometrie în spaţiu:[1]

Să se găsească volumul F al unui trunchi de piramidă dreaptă cu baza pătrată. Sînt date: h — înălţimea trunchiului, a — lungimea laturii bazei superioare şi b — lungimea laturii bazei inferioare.

(O piramidă cu bază pătrată este o *piramidă dreaptă* dacă înălţimea ei întîlneşte baza în centru. *Trunchiul de piramidă* este porţiunea din piramidă cuprinsă între baza piramidei şi un plan paralel cu baza; acest plan paralel conţine o faţă a trunchiului de piramidă,

[1] Foarte asemănătoare cu problema considerată iniţial, dar şi mai simplă decît aceea (vezi în Bibliografie, articolele 1 şi 3 ale autorului).

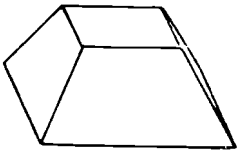


Fig. 7.1. Ne concentrăm asupra unui singur punct: scopul

pe care o numim *baza superioară* a trunchiului; *baza inferioară* a acestuia este baza piramidei complete considerate la început, iar *înălțimea* este distanța dintre baze, măsurată pe perpendiculara comună.)

Primul pas spre rezolvarea problemei constă în a ne concentra asupra scopului pe care ni-l propunem. Ne întrebăm: *Ce urmărim?*, *Ce vrem să aflăm?*, și ne reprezentăm (grafic), cît mai precis posibil, forma obiectului căruia vrem să-i găsim volumul F (vezi partea stîngă a fig. 7.1). Situația din minte este reprezentată convenabil de un singur punct — să-l notăm cu F — un punct asupra căruia trebuie să ne concentrăm toată atenția (vezi partea dreaptă a fig. 7.1).

Nu putem însă găsi necunoscuta F, dacă nu ni se dă nimic. *Care sînt datele?* — ne întrebăm imediat, sau: *Ce ni se dă?*, și atenția ne scoate imediat în evidență acele linii ale figurii ale căror lungimi sînt date, a, b și h, vezi partea stîngă a fig. 7.2. (Pătratul de latură a se află la partea de sus, cel de latură b, la partea de jos a solidului considerat.) Pentru a descrie noua situație din minte, pe fig.7.2 apar trei noi puncte — notate cu a, h și b și reprezentînd datele — trei puncte separate de necunoscuta F printr-un interval, printr-un *spațiu liber*. Acest spațiu liber (am putea spune: spațiu „deschis") simbolizează problema „deschisă", întrebarea la care trebuie să răspundem; problema ne cere să legăm între ele necunoscuta F și datele a, h și b: avem de construit o punte peste acest interval.

Fig. 7.2. O problemă deschisă: un gol peste care trebuie să construim o punte

Am început, aşadar, să lucrăm la problemă prin a-i vizualiza (concret şi simbolic) scopul urmărit, necunoscutele şi datele. Această fază iniţială este înfăţişată adecvat şi sugestiv pe fig. 7.1 şi 7.2. Cum vom acţiona însă mai departe, ce procedeu trebuie să adoptăm ?

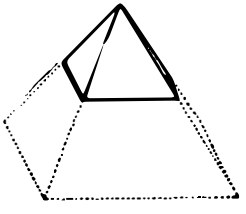
Dacă nu putem rezolva problema propusă, să căutăm o problemă înrudită, adecvată situaţiei şi care ne convine mai bine.

În cazul dat, nu avem de căutat prea departe. Într-adevăr — *care este necunoscuta?* Volumul unui trunchi de piramidă. Şi ce este un asemenea trunchi? Care este *definiţia* lui? Este o porţiune dintr-o piramidă completă. Care porţiune? Porţiunea dintre ... — Nu, nu, destul cu astea ; *să formulăm altfel problema :* Trunchiul este porţiunea care rămîne cînd dintr-o piramidă completă tăiem o piramidă mai mică, cu ajutorul unui plan paralel cu baza. În cazul nostru (vezi fig.7.3), baza piramidei mari (complete) este un pătrat de arie b^2. *Dacă* am cunoaşte volumele acestor două piramide, să zicem B şi respectiv A, am putea calcula volumul trunchiului

$$F = B - A.$$

Să găsim aceste volume B şi A. Iată o idee !

În felul acesta, am redus problema iniţială — găsirea lui F — la două probleme auxiliare convenabil înrudite cu problema noastră, determinarea lui A şi a lui B. Pentru a exprima grafic această reducere, introducem două noi puncte, notate A şi B, în spaţiul dintre datele a, h şi b şi necunoscuta F. Unim pe A şi pe B cu F prin linii oblice, indicînd în felul acesta relaţia esenţială dintre aceste trei mărimi ; pornind de la A şi de la B, putem ajunge la F ; rezolvarea problemei în legătură cu F poate avea la bază rezolvarea celor două probleme în legătură cu A şi B.



... O problemă înrudită, convenabilă

$$F = B - A$$

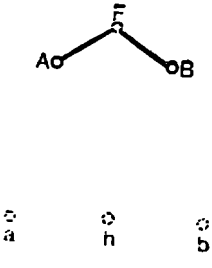


Fig. 7.3. Dacă nu putem rezolva problema propusă, să căutăm ....

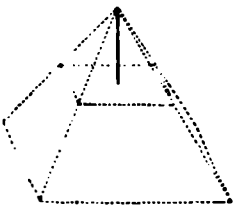
Dar prin aceasta n-am terminat tot ceea ce aveam de făcut ; avem de găsit două noi necunoscute, A şi B; pe fig. 7.3 există două puncte suspendate „în gol", două puncte separate de date printr-un interval. Situaţia pare însă mai încurajatoare, mai promiţătoare : piramida este un corp geometric mai familiar decît trunchiul de piramidă, şi deşi în loc de o singură necunoscută F, avem acum două, A şi B, aceste două necunoscute sînt de aceeaşi natură, şi sînt legate în acelaşi mod de datele a şi, respectiv, b. În mod corespunzător, şi reprezentarea grafică a situaţiei din minte (fig. 7.3) este simetrică. Linia FA este înclinată spre mărimea dată a, iar FB este înclinată spre mărimea dată b. Am început să întindem puntea peste spaţiul „deschis" dintre necunoscuta iniţială şi date ; intervalul rămas este acum mai îngust.

7.4. DEZVOLTĂM IDEEA

Unde sîntem în acest moment? *Ce urmărim?* Urmărim să găsim necunoscutele A şi B. *Cine este necunoscuta A?* — Este volumul unei piramide. *Cum putem obţine acest tip de obiect? Cum putem găsi acest tip de necunoscută? Din ce date putem calcula acest tip de necunoscută?* Volumul piramidei poate fi calculat dacă dispunem de două date, aria bazei şi înălţimea piramidei ; într-adevăr, volumul este produsul dintre aceste două mărimi, împărţit la trei. Înălţimea nu este dată, dar putem totuşi lucra cu ea, s-o notăm cu x. Atunci

$$A = \frac{a^2 x}{3}.$$

În partea stîngă a fig. 7.4 piramida mică de deasupra trunchiului este prezentată mai în detaliu : i s-a pus în evidenţă înălţimea x. Stadiul actual al investigaţiei noastre este reprezentat grafic în partea dreaptă a fig.7.4 ; deasupra datelor a apărut un nou punct, x, şi două



Cum putem obţine acest tip de obiect ?

$$A = \frac{a^2 x}{3}$$

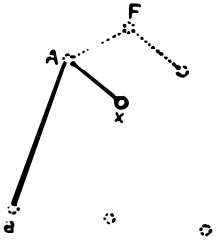


Fig. 7.4. O primă legătură între necunoscută şi date ; dar mai există capete libere care continuă să atîrne în gol ...

linii înclinate unesc pe A cu x şi cu a, arătînd că la A se poate ajunge de la a şi x, că A poate fi exprimat în funcţie de a şi x. Deşi rămîn, în continuare, tot două necunoscute de determinat (pe fig. 7.4 există încă două capete libere care atîrnă în gol), totuşi s-a progresat: am reuşit să legăm necunoscuta F de măcar una din datele problemei, de a.

În orice caz, pasul imediat următor este evident. Necunoscutele A şi B sînt de aceeaşi natură (ele sînt reprezentate simetric pe fig. 7.3); am exprimat volumul A în funcţie de bază şi de înălţime, şi putem exprima volumul B în mod analog:

$$B = \frac{b^2(x + h)}{3}.$$

În partea stîngă a fig. 7.5, piramida mare care conţine trunchiul este prezentată mai în detaliu: i s-a pus în evidenţă înălţimea $(x + h)$. În partea dreaptă a fig. 7.5 apar trei noi linii înclinate care unesc pe B cu b, h şi x. Aceste linii arată că la B se poate ajunge de la b, h şi x, că B poate fi exprimat în funcţie de b, h şi x. Aşa că, dintre cele două capete libere care atîrnau în gol, numai unul singur — punctul x — a rămas nelegat de date. Intervalul s-a îngustat din nou; el s-a redus la cel dintre x şi date.

Care este necunoscuta care a mai rămas? — Este x, lungimea unui segment. *Cum putem găsi acest tip de necunoscută?* Cum putem obţine acest tip de obiect?

Procedeul cel mai obişnuit de a obţine lungimea unui segment este să se folosească un triunghi — dacă-i posibil, un triunghi dreptunghic — sau o pereche de triunghiuri asemenea. Pe figură nu există însă nici un triunghi utilizabil, şi noi am avea nevoie de unul care să aibă o latură x. Un asemenea triunghi ar fi cuprins într-un plan care trece prin înălţimea piramidei mici, de volum A; însă acest plan ar trece şi prin înălţimea piramidei mari, de volum B, care este o

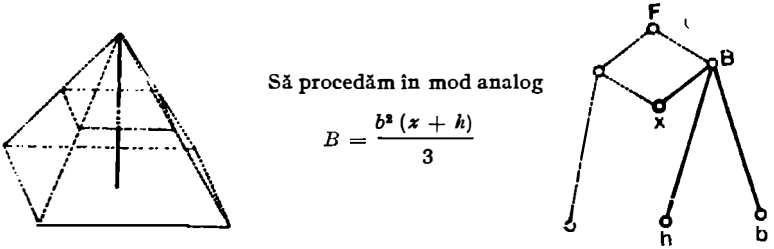
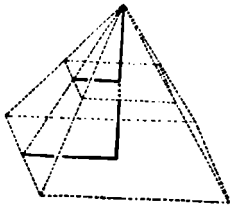


Fig. 7.5. O singură chestiune rămîne încă deschisă



Şi cum putem obţine *acest* tip de obiect?

$$\frac{x}{x+h} = \frac{a}{b}$$

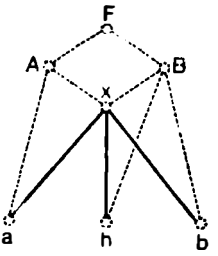


Fig. 7.6. Am reuşit să construim o punte peste interval

piramidă *asemenea* cu cea mică. Desigur! — o să folosim triunghiuri asemenea cuprinse într-un plan care trece prin înălţime... şi este *paralel cu o latură dată* a bazei uneia din aceste piramide! Asta-i! Am terminat!

Pe fig.7.6 apar două triunghiuri asemenea din care putem calcula uşor pe x, folosind proporţia

$$\frac{x}{x+h} = \frac{a}{b}.$$

Dar nu detaliile sînt importante în acest stadiu; faptul cel mai important în acest moment este că x poate fi exprimat în funcţie de cele trei date a, h şi b. Cele trei noi linii înclinate care apar în partea dreaptă a fig. 7.6 arată tocmai acest lucru — prin aceea că unesc pe x cu a, h şi b.

Gata! Am reuşit să construim o punte peste interval, să stabilim o legătură neîntreruptă între necunoscuta F şi datele a, h şi b, prin intermediul lui A, B şi x (necunoscute auxiliare).

7.5. SĂ MERGEM PÎNĂ LA CAPĂT

Problema este oare rezolvată? Nu încă — nu complet. Ni s-a cerut să exprimăm volumul F al trunchiului de piramidă în funcţie de datele a, h şi b, ceea ce noi încă n-am făcut. Însă partea cea mai importantă şi mai captivantă a sarcinii asumate a rămas de acum în urmă: ceea ce a mai rămas de făcut este o treabă mult mai „calmă", mult mai „directă", mai de rutină.

A existat un element de aventură în această primă parte a eforturilor noastre. În fiecare etapă, *am sperat* că pasul următor ne va duce mai aproape de ţelul urmărit, de realizarea punţii dorite peste „golul" care separa necunoscuta de date. Da, am sperat, dar n-am

fost siguri de reuşită ; în fiecare etapă a trebuit să *inventăm*, şi să riscăm, un pas următor. Acum însă nu mai este nevoie nici de inventivitate, nici de risc ; prevedem acum că plecînd de la datele a, h şi b putem ajunge fără nici un fel de risc la necunoscuta F — mergînd, pur şi simplu, pe „firele" legăturii neîntrerupte înfăţişate pe fig.7.6.

Începem partea a doua a lucrului, de acolo de unde am terminat-o pe prima. Ne ocupăm mai întîi de necunoscuta auxiliară x, cea pe care am introdus-o ultima ; din ultima ecuaţie din 7.4, obţinem

$$x = \frac{ah}{b - a}.$$

Înlocuim apoi această valoare a lui x în cele două ecuaţii precedente din 7.4, şi obţinem

$$A = \frac{a^3h}{3(b - a)}, \qquad B = \frac{b^3h}{3(b - a)}.$$

(Analogia dintre aceste două rezultate este reconfortantă.) Ultima pe care o folosim este ecuaţia pe care am obţinut-o prima, în 7.3 :

$$F = B - A = \frac{b^3 - a^3}{b - a}\,\frac{h}{3}$$

$$F = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}\,h.$$

Aceasta este relaţia dorită.

Tot ceea ce am făcut efectiv în paragraful de faţă este reprezentat adecvat şi sugestiv în fig. 7.7, unde fiecare linie de legătură poartă cîte o săgeată care arată direcţia în care am folosit, cîteva rînduri mai sus, acea legătură. Am pornit de la datele a, h şi b, şi, de la ele, am înaintat spre necunoscuta principală iniţială, F, trecînd prin necunoscutele auxiliare intermediare x, A şi B, pe care le-am exprimat, una după alta, în funcţie de date.

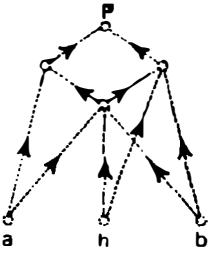


Fig. 7.7. Înaintăm de la date spre necunoscută

7.6. UN FILM ÎN RALANTI

Figurile 7.1—7.7 înfăţişează stadiile sau etapele succesive ale rezolvării ; să „montăm" aceste şapte „cadre" într-o singură figură compozită, fig. 7.8. Să privim secvenţa din fig. 7.8, de la stînga

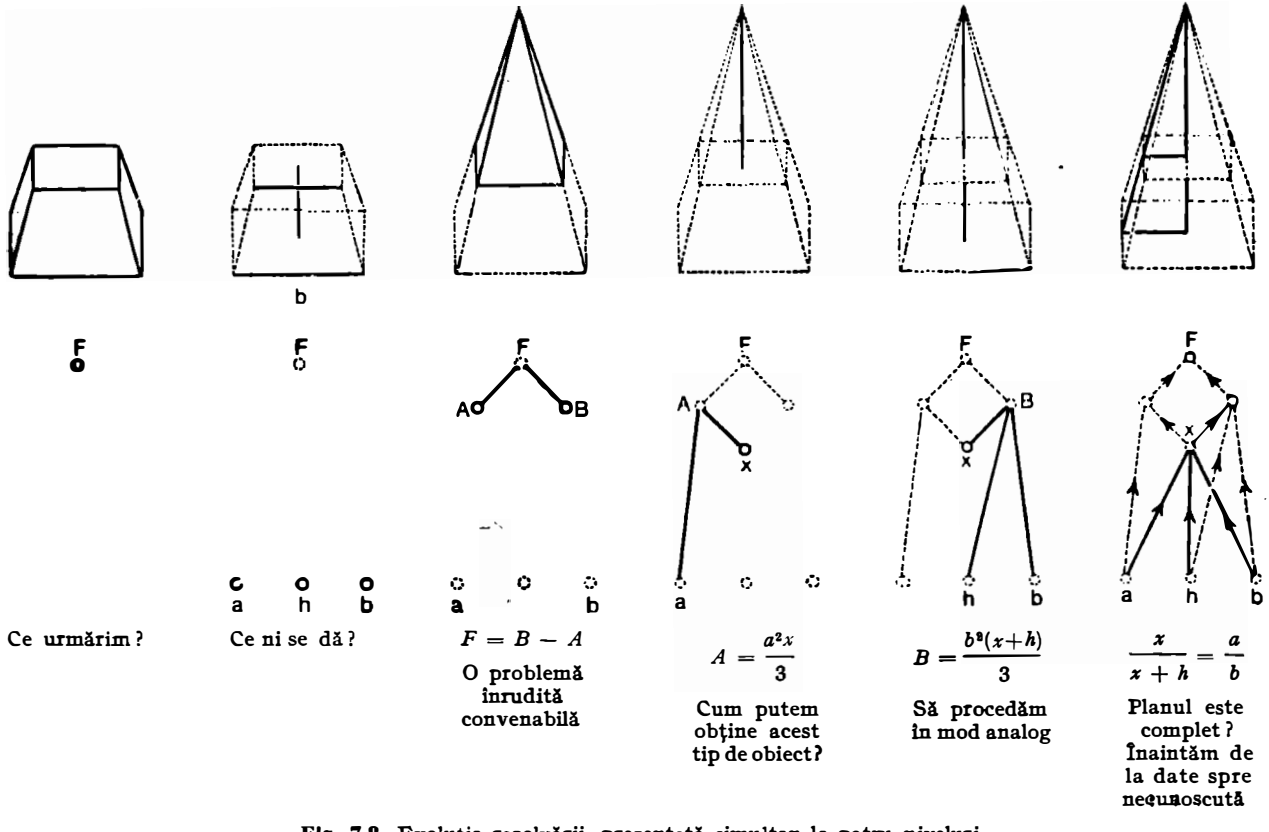


Fig. 7.8. Evoluția rezolvării, prezentată simultan la patru niveluri

la dreapta. Privind-o în succesiune rapidă, obţinem un fel de reprezentare cinematografică a progresului realizat de cel care rezolvă problema, un fel de film al desfăşurării procesului de descoperire a rezolvării. Sau, privind-o pe îndelete, „cadru" cu „cadru", obţinem un fel de film *în ralanti* al evoluţiei rezolvării care ne lasă timp să examinăm atent detaliile semnificative.

În fig.7.8, fiecare etapă a rezolvării (fiecare situaţie care se conturează în mintea celui care rezolvă problema) este prezentată pe mai multe niveluri, elementele care se referă la o aceeaşi situaţie sînt dispuse pe verticală, unele sub altele. Aşadar, rezolvarea evoluează de-a lungul a patru linii paralele, situate la patru niveluri diferite.

La nivelul cel mai de sus, *nivelul imaginii*, vedem evoluţia figurii geometrice investigate în mintea rezolvatorului. În fiecare etapă, acesta îşi conturează în minte o anumită reprezentare a figurii geometrice pe care o studiază, însă această reprezentare se modifică o dată cu trecerea la etapa următoare; unele detalii pot trece pe planul al doilea, altele, din contra, ies în evidenţă şi ne polarizează toată atenţia, pe figură apar detalii noi.

Trecînd la nivelul imediat următor, ajungem la nivelul *relaţiilor*, al legăturilor. În reprezentarea grafică, obiectele considerate (necunoscute, date, necunoscute auxiliare) apar sub formă de puncte, iar relaţiile care leagă obiectele, sub formă de linii care leagă punctele corespunzătoare.

Imediat sub nivelul relaţiilor găsim nivelul *matematic*, care constă din formule şi care contrastează net cu cel al relaţiilor. La nivelul relaţiilor este prezentat întregul sistem de relaţii obţinute pînă în acel moment; relaţia obţinută ultima este în acel moment, în centrul atenţiei, dar ea nu este reprezentată cu mai multe detalii decît cele precedente. La nivelul matematic, dimpotrivă, relaţia obţinută ultima este prezentată în întregime, iar relaţiile precedente nu mai apar de loc.

Coborînd şi mai jos, ajungem la ceea ce constituie, pentru noi, nivelul de bază, nivelul *euristic*. În fiecare etapă, este prezentată o întrebare, sau o sugestie simplă, firească (general aplicabilă!), care ne-a permis să atingem acel stadiu. Preocuparea noastră de bază este să studiem de ce natură sînt aceste întrebări şi sugestii.

7.7. O ANTICIPARE

Ne propunem să examinăm fig.7.8 şi să revenim şi în continuare asupra ei; ne propunem s-o comparăm şi s-o corelăm cu experienţa noastră din trecut. Ne propunem să discernem, în felul

acesta, dincolo de ceea ce ne povesteşte direct această figură, anumite puncte de interes general care merită să fie studiate mai în amănunt. În istorisirea grafică a rezolvării unei singure probleme, vom descoperi prefigurări utile ale chestiunilor generale de care ne vom ocupa în capitolele următoare. Vom trece în revistă aceste capitole, unul cîte unul, în ordinea succesiunii lor în carte.

(Fiecare dintre paragrafele următoare ale acestui capitol prefigurează un întreg capitol următor, un capitol cu acelaşi titlu şi acelaşi număr de ordine.)

Şi acum să încercăm să sondăm în această istorisire cu totul particulară pînă la ideile generale care-i servesc drept substrat.

7.8. PLANURI ŞI PROGRAME

Privind pe rînd etapele din fig. 7.8, vedem cum cel care rezolvă problema îşi concentrează atenţia asupra diferitelor părţi ale figurii pe care o explorează, cum pune stăpînire pe noi şi noi detalii ale acestei figuri, şi cum construieşte, pas cu pas, sistemul de legături care constituie planul de rezolvare pe care îl elaborează. Examinînd atent evoluţia rezolvării, putem discerne în ea mai multe faze şi tipuri de activităţi.

Am remarcat (în 7.5) contrastul dintre cele două părţi ale rezolvării: în prima parte (ilustrată de fig.7.1 — 7.6) lucrăm descendent, de la necunoscute spre date, în partea a doua (ilustrată de o singură figură, fig.7.7) lucrăm ascendent, de la date spre necunoscută.

Dar chiar şi în prima parte putem distinge două faze. În faza iniţială (fig.7.1 şi 7.2), efortul principal al celui care rezolvă problema este îndreptat spre înţelegerea problemei. În cealaltă fază (fig.7.3 — 7.6), el elaborează sistemul de legături logice, construieşte un *plan* de rezolvare a problemei.

Această ultimă fază — elaborarea planului — pare să fie partea esenţială, cea mai importantă, a efortului de rezolvare; o vom examina mai în detaliu în capitolul 8.

7.9. PROBLEME ÎN INTERIORUL PROBLEMELOR

Trecînd în revistă fig.7.8, putem observa că lucrînd la problema iniţială (problema propusă, problema principală) cel care rezolvă problema întîlneşte o serie de *probleme auxiliare* (problemele „ajutătoare", subprobleme). Căutînd volumul trunchiului de piramidă, el ajunge, în mod firesc, să caute volumul unei piramide, apoi

al unei alte piramide, după aceea — lungimea unui segment. Pentru a ajunge la necunoscuta inițială F, el trebuie să treacă prin necunoscutele auxiliare A, B și x. Nu este nevoie de prea multă experiență în domeniul rezolvării problemelor de matematică pentru a ne convinge că o asemenea disociere a problemei propuse în mai multe subprobleme este o operație tipică [vezi, de pildă, 2.5(3)].

Vom examina în amănunt rolul problemelor auxiliare și vom deosebi diferite tipuri de probleme de acest gen.

7.10. NAȘTEREA IDEII

Care dintre diferitele etape ale rezolvării ilustrate pe fig. 7.8 este cea mai importantă? După părerea mea — apariția piramidei complete (fig.7.3), și cred că majoritatea celor care au oarecare experiență în acest domeniu și au meditat, cît de cît, asupra experienței lor vor fi de acord cu mine. Introducerea piramidei complete și conceperea trunchiului de piramidă ca diferență între două piramide complete constituie *ideea decisivă* a rezolvării; pentru majoritatea celor care rezolvă probleme restul rezolvării este mult mai ușor, mai evident, mai de rutină — pentru cei versați sau cu multă experiență el se poate reduce chiar la o simplă chestiune aproape exclusiv de rutină.

Apariția ideii decisive n-a avut nimic impresionant în cazul de față, dar să nu uităm că problema de care discutăm este foarte simplă. Conceperea ideii decisive, senzația că s-a făcut brusc lumină după o perioadă lungă de încordare și ezitări pot fi extrem de impresionante Ele sînt clipe de trăire intensă, pe care cititorul n-ar trebui să le piardă.

7.11. ACTIVITATEA GÎNDIRII

În reprezentarea grafică din fig.7.8, semnul cel mai evident că rezolvarea progresează îl constituie apariția de noi și noi detalii. Pe măsură ce rezolvatorul avansează, apar noi și noi linii atît pe figura geometrică, cît și pe diagrama relațiilor. Dincolo însă de complexitatea crescîndă a figurii, ceea ce trebuie să sesizăm este cristalizarea unei structuri în mintea celui care rezolvă problema. Cu fiecare pas semnificativ, el introduce un alt element relevant din bagajul său de cunoștințe; identifică o configurație familiară, aplică o teoremă cunoscută. În felul acesta, ceea ce se petrece în mintea celui care rezolvă problema ne apare ca o rememorare de elemente relevante

din experienţa acumulată şi o racordare a acestora la problema investigată, o muncă de *mobilizare* şi de *organizare*.

Am mai avut ocazia, în cele precedente, să facem o asemenea remarcă (în special, în ex.2.74) şi vom mai avea ocazia să investigăm acest punct, ca şi alte aspecte ale activităţii gîndirii.

7.12. DISCIPLINA GINDIRII

Fig.7.8, care prezintă evoluţia progresivă a rezolvării la patru niveluri diferite, ne dă unele indicaţii despre activitatea efectivă a celui care rezolvă problema. Fără îndoială, ne interesează să ştim cum (anume) procedează acesta, dar şi mai mult ne preocupă să ştim cum ar fi trebuit el să procedeze. Ne poate da oare fig.7.8 vreo indicaţie în această direcţie?

La nivelul cel mai de jos din fig.7.8, figurează un şir de întrebări şi sugestii care motivează etapele succesive din activitatea celui care rezolvă problema. Aceste întrebări şi sugestii sînt simple, firești şi foarte generale; ele l-au călăuzit pe rezolvator spre soluţia problemei simple pe care am ales-o drept exemplu, şi ele ne pot călăuzi şi pe noi în nenumărate alte cazuri. Şi dacă există o disciplină a gîndirii (un sistem de linii directoare, un corpus de maxime şi reguli, în spiritul metodei universale pe care o căutau Descartes şi Leibniz), este de bănuit, cu şanse de loc neglijabile de a nu greşi, că întrebările şi sugestiile aliniate la nivelul de bază al fig.7.8 constituie, într-un fel sau altul, elemente ale unei asemenea discipline. Va trebui să examinăm cu toată atenţia această chestiune.

EXEMPLE ŞI COMENTARII LA CAPITOLUL 7

7.1. *Un alt mod de abordare* a problemei enunţate în 7.2. Baza trunchiului de piramidă se află într-un plan orizontal (de pildă, pe masă). Cu patru plane verticale care trec prin cele patru laturi ale bazei superioare a trunchiului (vezi fig. 7.9), secţionăm trunchiul în nouă poliedre:

o prismă cu baza pătrată, de volum Q,

patru prisme triunghiulare, fiecare de volum T,

patru piramide cu baza pătrată, fiecare de volum P.

Calculaţi F, pornind de la jaloanele indicate pe fig. 7.10.

7.2. Exprimaţi grafic (cantităţile implicate — prin puncte, relaţiile de legătură — prin linii) cele două rezolvări ale aceleeaşi probleme, date în 2.5(3) şi (2.5(4).

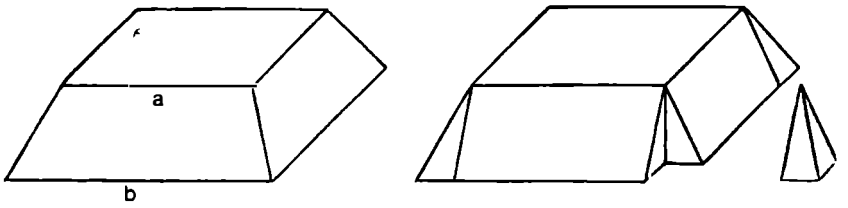


Fig. 7.9. Cu patru plane verticale ...

7.3. *Căutarea unei demonstrații.* Propoziția 4 din Cartea a XI-a a *Elementelor* lui Euclid poate fi enunțată în modul următor:

Dacă o dreaptă trece prin punctul de intersecție a două drepte date și este perpendiculară pe acele drepte, ea este perpendiculară și pe oricare a treia dreaptă din planul celor două drepte date, care trece prin punctul de intersecție al acestora.

Ne propunem să analizăm o demonstrație a acestei propoziții, să-i vizualizăm grafic structura și să-i înțelegem motivația descoperirii, folosind reprezentarea grafică a evoluției rezolvării, prezentată în acest capitol. Ținînd cont de analogia cu discuția ilustrată de fig. 7.1 — 7.8, vom trata cazul de față ceva mai concis.

Ne interesează în principal cristalizarea demonstrației în mintea celui care rezolvă problema. Dar interesantă este și propoziția ca atare; ea enunță un fapt de bază din geometria în spațiu. Apoi, și forma logică a propoziției este interesantă. Profesorul care spunea „Doi copii răi «strică» o întreagă clasă" poate că greșea, dar afirmația lui are aceeași formă ca propoziția lui Euclid pe care ne propunem s-o demonstrăm.

(1) *Procedăm descendent.* Desenăm fig. 7.11, introducem notații convenabile și, după aceea, formulăm din nou propoziția pe care vrem s-o demonstrăm într-o formă standard împărțită în ipoteză și concluzie:

Ipoteza: Trei drepte OA, OB și OC trec printr-un același punct O și sînt într-un același plan, dar sînt distincte; în plus

$$PO \perp OA \qquad PO \perp OB.$$

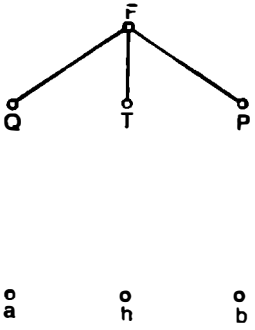


Fig. 7.10. Un alt mod de a aborda problema

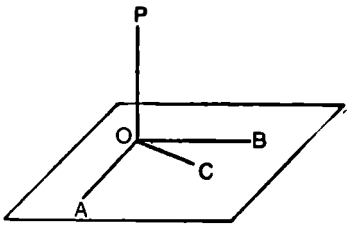


Fig. 7.11. Doi copii răi „strică" o întreagă clasă

Concluzia: **În condiţiile de mai sus, se realizează şi**

$$PO \perp OC.$$

„Care este concluzia?" — că dreapta PO este perpendiculară pe OC; sau că $\sphericalangle POC$ este unghi drept.

„Ce este un unghi drept? *Care este definiţia lui?"*

Un unghi drept este egal cu suplimentul lui. Reformularea concluziei în această variantă s-ar putea să prezinte unele avantaje. Prelungim semidreapta PO spre P' (în aşa fel ca P, O şi P' să fie coliniare, iar O şi planul care îl conţine pe O să se afle între P şi P'). Atunci [vezi fig. 7.12 (a)] concluzia urmărită este

$$\sphericalangle POC = \sphericalangle P'OC.$$

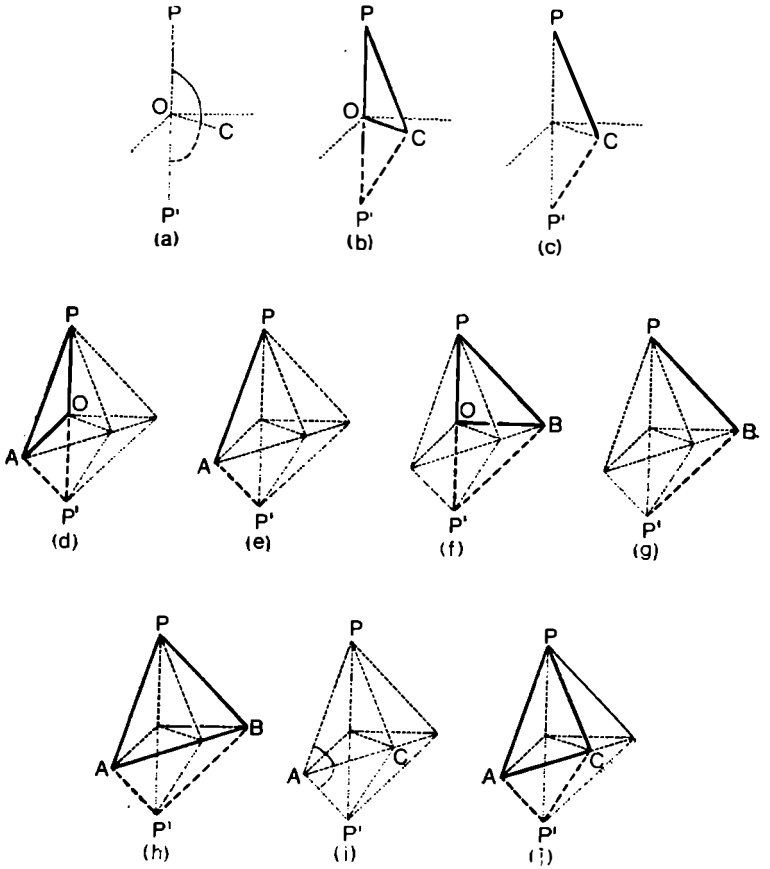


Fig. 7.12. Figură geometrică cu aspecte multiple

„De ce credeți că această versiune a concluziei este mai avantajoasă?"

Cînd vrem să demonstrăm egalitatea unor unghiuri, recurgem frecvent la triunghiuri congruente. În cazul de față, am putea demonstra concluzia urmărită dacă am ști că

$$\Delta POC \cong \Delta P'OC$$

[vezi fig. 7.12 (b)]. Pentru a demonstra această relație, trebuie, putem — și tocmai așa vom și face — să presupunem că P' a fost astfel construit, încît

$$PO = P'O.$$

De fapt, de ce anume avem nevoie pentru a demonstra că acele două triunghiuri sînt congruente? Cunoaștem două perechi de laturi egale: $PO = P'O$ prin construcție, și, evident,

$$OC = OC$$

iindcă OC este latură comună în cele două triunghiuri; pentru a încheia demonstrația ar fi suficient să mai știm că [vezi fig. 7.12(c)].

$$PC = P'C.$$

În cele de mai sus, am plecat de la concluzia urmărită și am mers spre ipoteza dată; am lucrat deci *descendent* și mergînd descendent, de la concluzie, am străbătut de acum o bună bucată de drum, cu toate că restul drumului mai este încă în ceață, continuarea care trebuie să ne ducă la ipoteză nu ne este încă clară. Bilanțul realizărilor de pînă acum este prezentat simbolic pe fig. 7.13, care arată grafic „ce-din-ce putem deduce"

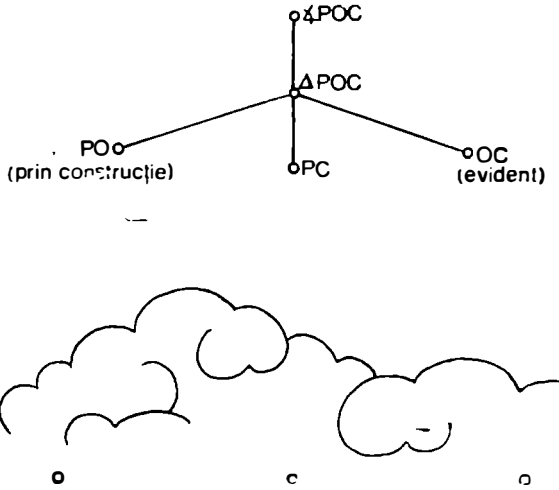


Fig. 7.13. Lucrăm descendent

— ce propoziţii putem deduce din alte propoziţii deja stabilite — aşa cum fig. 7.1 —7.8 arătau „ce-din-ce putem calcula" — ce mărimi putem calcula din alte mărimi pe care le cunoaştem. În fig. 7.13, fiecare din ecuaţiile (congruenţele) de mai jos este reprezentată prin membrul ei din stînga:

$$\sphericalangle POC = \sphericalangle P'OC \qquad \text{prin } \sphericalangle POC,$$
$$\Delta POC \cong \Delta P'OC \qquad \text{prin } \Delta POC,$$
$$OC = OC \qquad \text{prin } OC$$

şi aşa mai departe. Într-adevăr, este suficient să scriem numai membrul din stînga, fiindcă pe cel din dreapta îl putem deduce imediat înlocuind pe P cu P', adică trecînd de la spaţiul de deasupra planului, care trece prin A, B, C şi O, la spaţiul de dedesubtul lui.

(2) *Reformulăm problema.* După ce am lucrat un timp cu concluzia, trebuie să ne îndreptăm acum atenţia asupra ipotezei propoziţiei pe care vrem s-o demonstrăm.

„Care este ipoteza?"

Trebuie să reformulăm ipoteza în aşa fel încît ea să consoneze cu noua formulare a concluziei, fiindcă ceea ce trebuie să facem este să apropiem ipoteza şi concluzia, una de alta, nu să le depărtăm. Avem de demonstrat că (noua versiune a concluziei)

$$\sphericalangle POC = \sphericalangle P'OC$$

presupunînd că (reformulăm ipoteza în mod analog)

$$\sphericalangle POA = \sphericalangle P'OA \text{ şi } \sphericalangle POB = \sphericalangle P'OB.$$

Propoziţia în ansamblu sună destul de bine; ea se prezintă ca ceva omogen. Mai trebuie însă să adăugăm ipotezei o clauză esenţială, clauza care afirmă că cele trei linii distincte, OA, OB şi OC, sînt într-un acelaşi plan. Şi această clauză trebuie să fie legată, într-un fel sau altul, de concluzie. Dar — cum?

De fapt, ceea ce ne trebuie nouă aici este o idee esenţială — trebuie să sesizăm că nimic nu ne împiedică să plasăm cele trei puncte A, B şi C pe o aceeaşi dreaptă, şi că ar putea fi avantajos s-o şi facem. (Putem alege orice dreaptă care nu trece prin O şi nu este paralelă cu vreuna din cele trei drepte date OA, OB şi OC). Ajungem în felul acesta la o nouă formulare a propoziţiei pe care vrem s-o demonstrăm.

Ipoteza: Punctele A, B şi C sînt coliniare şi dreapta care trece prin ele nu conţine punctul O. În plus

$$\sphericalangle POA = \sphericalangle P'OA \sphericalangle POB = \sphericalangle P'OB.$$

Concluzie: În aceste condiţii,

$$\sphericalangle POC = \sphericalangle P'OC$$

Fig. 7.14 prezintă simbolic această propoziţie

Fig. 7.14. Ipoteza, concluzia și golul dintre ele

(3) *Lucrăm ascendent.* Analizînd ipoteza, luăm în considerație relații de același tip cu cele considerate cînd am plecat de la concluzie, dar le inversăm ordinea: Deoarece

$$\begin{aligned} \sphericalangle POA &= \sphericalangle P'OA && \text{prin ipoteză,} \\ PO &= P'O && \text{prin construcție,} \\ OA &= OA && \text{evident;} \end{aligned}$$

conchidem că

$$\Delta PAO \cong \Delta P'AO$$

[vezi fig. 7.12 (d)] și, prin urmare, că

$$PA = P'A$$

[vezi fig. 7.12 (e)]. Un raționament cu totul paralel arată că

$$PB = P'B.$$

[vezi fig. 7.12 (f) și 7.12(g)].

În cele de mai sus am lucrat *ascendent*, adică în direcția de la ipoteza dată spre concluzia urmărită.

Fig. 7.15 înfățișează situația din minte care rezultă din cele realizate mai sus și din cele dobîndite anterior și reprezentate pe fig. 7.13. Așa cum arată fig. 7.15, rămîne de demonstrat că $PC = P'C$, din propozițiile similare deja demonstrate, $PA = P'A$ și $PB = P'B$, și din ipoteza pînă acum neutilizată că A, B și C sînt coliniare.

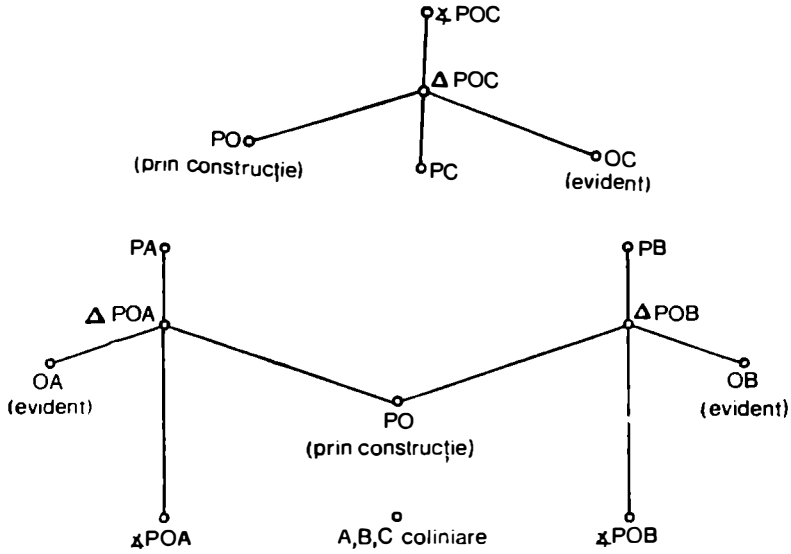


Fig. 7.15. Lucrăm ascendent

Comparînd situația din prezent cu cea reprezentată pe fig 7.14, avem oarecare motive să sperăm în continuare, și chiar mai mult decît pînă acum; „golul" peste care avem de construit puntea a devenit categoric mai puțin mare.

(4) *Înaintăm din ambele sensuri.* Restul demonstrației poate fi găsit de rezolvator (sau de cititor) atît de repede, încît concluzia finală poate părea instantanee. Să-i consemnăm totuși detaliile.

Relația dorită

$$PC = P'C$$

[fig. 7.12 (c)] ar putea fi dedusă din triunghiuri congruente (cu alte cuvinte, lucrînd descendent). De fapt, din cele două relații stabilite anterior

$$PA = P'A \quad PB = P'B$$

și din faptul că AB este latură comună, putem deduce ușor congruența [fig. 7.12 (h)]

$$\Delta PAB = \Delta P'AB.$$

(Aici am lucrat ascendent.) Însă nu acestea sînt triunghiurile de care avem nevoie. Pentru a deduce că $PC = P'C$ (ceea ce ar încheia demonstrația), ar trebui să știm, de pildă, că

$$\Delta PAC = \Delta P'AC.$$

Această egalitate ar putea fi dedusă (acum lucrăm din nou descendent) din relația deja stabilită

$$PA = P'A$$

și din faptul că AC este latură comună, cu condiția însă să știm că

$$\sphericalangle PAC = \sphericalangle P'AC$$

Or, de fapt, noi știm că

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle P'AB.$$

[vezi fig. 7.12 (i)], din congruența, stabilită mai înainte, a triunghiurilor PAB și $P'AB$. (Fig. 7.16 exprimă situația din minte, în acest moment). Deoarece, prin ipoteză, A, B și C sînt coliniare

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PAC \text{ și } \sphericalangle P'AB = \sphericalangle P'AC.$$

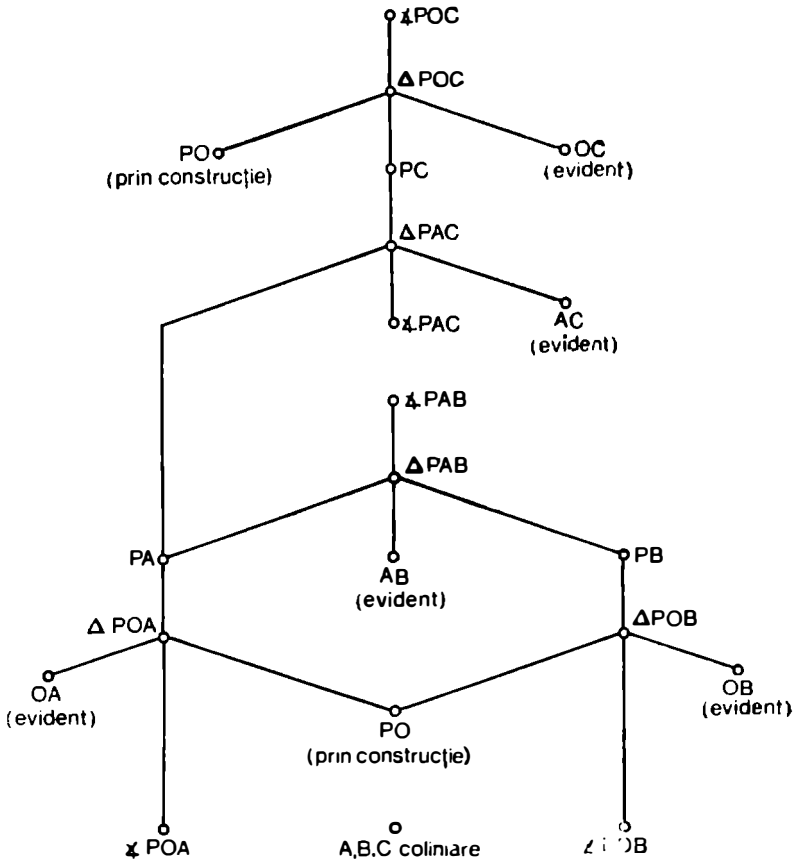


Fig. 7.16. Înaintăm din ambele sensuri

Şi, cu această remarcă, acoperim şi ultimul gol (vezi fig. 7.17; revedeţi şi ansamblul din fig. 7.12).

Acest ultim pas, trecerea de la fig. 7.16 la fig. 7.17, merită să ne reţină atenţia în mod deosebit; numai acest ultim pas foloseşte clauza de importanţă capitală a ipotezei, că A, B şi C sînt coliniare.

7.4. *Diagrame elementare.* În paragrafele 7.2—7.6 am studiat o problemă de aflat, în exemplul precedent (ex. 7.3) — o problemă de demonstrat. În ambele cazuri am folosit diagrame formate din puncte şi linii de legătură, pentru a ilustra evoluţia progresivă şi structura (canavaua) rezolvării. Comparînd cele două cazuri, ne propunem să punem clar în evidenţă semnificaţia acestor diagrame.

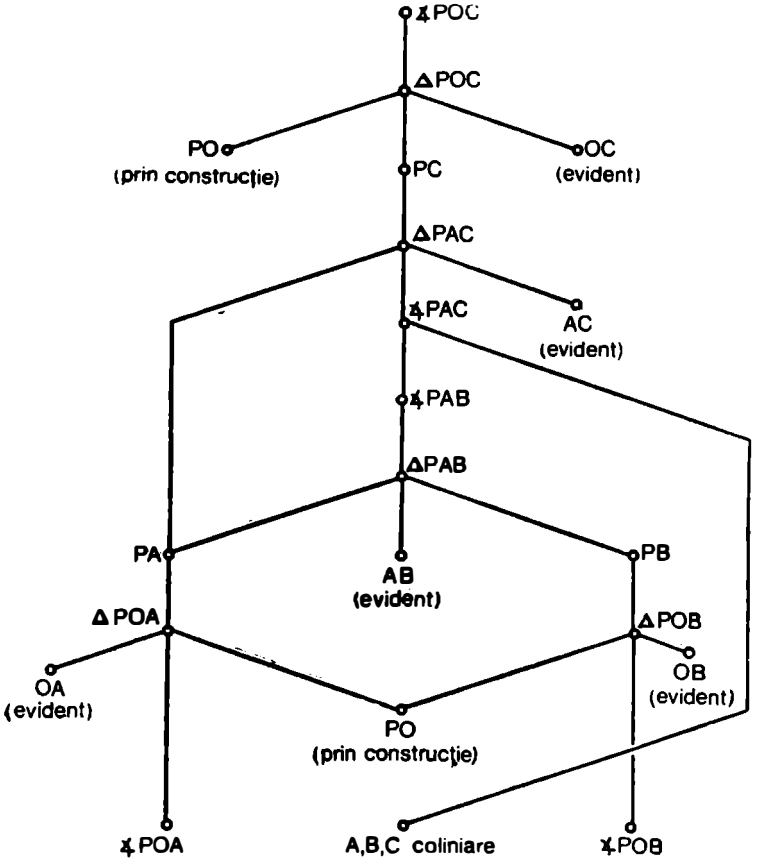


Fig. 7.17. Am acoperit şi ultimul gol

Să considerăm o „diagramă elementară", ca cea din fig. 7.18. Această diagramă constă din $(n + 1)$ puncte, dintre care unul, A, este plasat deasupra nivelului la care se află celelalte n puncte, B, C, D, ... și L. Punctul plasat mai sus, A, este legat prin linii descendente de fiecare din celelalte n puncte. Asemenea diagrame elementare sînt „cărămizile" din care sînt construite diagramele întîlnite în fig. 7.3 — 7.8 și în fig 7.13 — — 7.17. Ce exprimă o asemenea diagramă elementară?

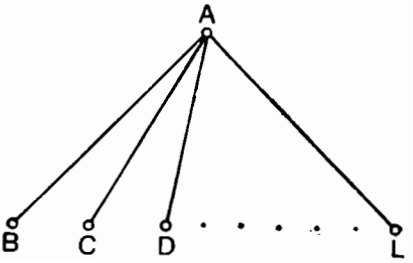


Fig. 7.18. L-am putea obține pe A, dacă i-am avea și pe B și pe C și pe D ... și pe L

Cînd diagrama elementară face parte dintr-o problemă de aflat, cum este cea considerată în fig. 7.3 — 7.8, punctele A, B, C, D, ... și L reprezintă *cantități* (lungimi, volume, ...), dar ele reprezintă *afirmații* (propoziții) cînd diagrama se referă la o problemă de demonstrat, ca în fig. 7.13 — 7.17. În primul caz, fig. 7.18 exprimă că *putem calcula mărimea A dacă ni s-au dat cantitățile B, C, D, ... și L.* În cazul al doilea, fig. 7.18 exprimă că *putem deduce afirmația A din afirmațiile A, B, C, D, ...* și *L.* Cu alte cuvinte, diagrama elementară exprimă, în primul caz, că mărimea A este o *funcție cunoscută* de mărimile B, C, D, ... și L, iar în cazul al doilea, că afirmația A este *o consecință* a afirmațiilor B, C, D, ... și L. Putem spune, de asemenea, că diagrama elementară din fig. 7.18 răspunde la o întrebare, într-un caz la întrebarea: „Din care *date* putem calcula pe A?", iar în celălalt caz: „Din ce *premise* putem deduce afirmația A?"

Așadar, putem ști dinainte, putem prevedea în ce fel vom putea folosi asemenea diagrame pentru a ilustra rezolvarea oricărui tip de problemă. Într-o problemă concretă, punctele A, B, C, D, ... și L pot reprezenta obiecte pe care le avem sau pe care vrem să le obținem. Fig. 7.18. arată că l-am putea obține pe A, dacă i-am avea pe B și pe C și pe D și ... și pe L, sau că mijloacele B, C, D, ... și L, luate împreună, sînt suficiente pentru a atinge țelul A. Diagrama răspunde la întrebarea: „Ce trebuie să obținem mai întîi, dacă vrem să-l obținem pe A?"

7.5. *Alte probleme.* Deși putem încerca să reprezentăm prin diagrame rezolvarea a tot felul de probleme (vezi ex. 7.4), reprezentarea aceasta poate deveni forțată, nenaturală. Căutați probleme ale căror rezolvări pot fi reprezentate ușor și totodată clarificate instructiv, cu ajutorul unei diagrame.

CAPITOLUL 8

Planuri şi Programe

Din dorinţă se naşte gîndul [ideea] despre anumite mijloace pe care le-am văzut că produc un lucru asemenea celui spre care năzuim; şi din gîndul despre acele mijloace, gîndul despre mijloacele către acele mijloace; şi aşa în continuare, pînă ce ajungem la un anumit început [= punct de plecare] care ne stă în putinţă. Thomas Hobbes, *Leviathan*, cap. III.

8.1. O SCHEMĂ PENTRU ELABORAREA UNUI PLAN

Cuvintele lui Hobbes din fruntea acestui capitol descriu cu admirabilă concizie şi precizie, o schemă de importanţă fundamentală — schema unui procedeu de rezolvare a problemelor. Să citim printre rînduri, să încercăm să vedem sfera de cuprindere a procedeului, varietatea de cazuri la care este aplicabil.

Avem o problemă. Aceasta înseamnă că avem un obiectiv, un ţel, un scop, A, pe care nu-l putem atinge imediat, şi că sîntem în căutarea unei acţiuni adecvate prin care să-l putem atinge. Acest obiectiv A poate fi practic sau teoretic, eventual matematic — un obiect matematic (un număr, un triunghi, ...) — pe care vrem să-l găsim (calculăm, construim, ...), sau o propoziţie pe care vrem s-o demonstrăm. În orice caz, fapt este că vrem să atingem scopul A.

„Din dorinţă se naşte gîndul despre anumite mijloace" — aceasta este o comportare cerebrală bine cunoscută. Scopul sugerează mijloacele; o dorinţă (o intenţie, o nevoie) este urmată, de regulă foarte rapid, de gîndul despre o anumită acţiune care ar putea duce la satisfacerea ei. Mă gîndesc la un anumit obiect pe care aş vrea să-l am, şi foarte curînd îmi amintesc un magazin în care aş putea să-l cumpăr.

Dar să revenim la textul lui Hobbes: „Din dorinţă se naşte gîndul despre anumite mijloace" B care ar putea să producă A-ul pe care-l dorim. Acest gînd îşi are sorgintea, probabil, într-o anumită experienţă anterioară: „Am văzut că B produce un lucru asemenea

cu *A*-ul spre care năzuim". În orice caz, avem convingerea că am putea obține *A*, dacă am avea *B*. „Și din gîndul despre *B*, se naște gîndul despre anumite mijloace, să le spunem *C*, către acele mijloace *B*" ; am putea obține *B* dacă am avea *C*. „Și așa în continuare" — am putea obține *C* dacă am avea *D*— „pînă ce ajungem la un anumit început care ne stă în putință" ; am putea obține *D* dacă am avea *E* — dar pe *E* îl avem ! Acest *E* pune capăt lanțului de gînduri ; *E* este în posesia noastră, „ne stă în putință", este dat, este cunoscut.

Lanțul de gînduri s-a desfășurat trecînd prin mai mulți „dacă" — „aceasta, *dacă* aceea", am putea obține „aceasta" *dacă* am avea „aceea". Într-adevăr, am considerat succesiunea

A dacă *B*, *B* dacă *C*, *C* dacă *D*, *D* dacă *E*

și ne-am oprit la *E* pentru că pe *E* îl avem necondiționat, fără nici un alt „dacă".

(Aproape că nici nu mai trebuie să menționăm că numărul de „dacă", sau de pași, este neesențial ; cei patru pași și cinci „ținte" sau „obiective" care figurează în exemplul nostru trebuie considerați ca reprezentînd *n* pași și (*n* + 1) obiective.)

Tot ceea ce am spus pînă acum a însemnat *elaborarea unui plan.* Elaborarea trebuie să fie urmată, desigur, de punerea în aplicare, de realizarea, de *executarea* planului. Pornind de la *E*, care este „un început care ne stă în putință", trebuie să-l obținem pe *D* ; după ce l-am obținut pe *D*, trebuie să trecem la *C*, de la *C* la *B* și, în fine, de la *B* la scopul *A* pe care-l urmărim.

De remarcat că elaborarea planului și executarea lui evoluează în direcții diametral opuse. Cînd elaborăm planul, pornim de la *A* (obiectivul, scopul, necunoscuta, concluzia) și sfîrșim atingîndu-l pe *E* (obiectele pe care le avem, datele, ipoteza). Din contra, cînd realizăm planul, acționăm de la *E* spre *A*, așa că *A*, scopul, este primul „lucru" pe care-l gîndim și ultimul pe care îl dobîndim. Dacă considerăm înaintarea spre țintă drept progres, atunci direcția în care avansăm cînd elaborăm planul trebuie considerată *regresivă.* Așadar, această importantă schemă de rezolvare a problemelor pe care o descrie Hobbes poate fi numită, pe drept cuvînt, *planificare regresivă* sau *procedeu descendent* ; geometrii greci o numeau *analiză*, ceea ce înseamnă „rezolvare mergînd înapoi". Activitatea complementară de executare (realizare) a planului, care pornește de la obiectele pe care le avem spre obiectivul urmărit (în cazul nostru, de la *E* spre *A*), se numește, prin opoziție, activitate *progresivă*, sau *procedeu ascendent*, sau *sinteză* — ceea ce înseamnă „a pune laolaltă"[1].

[1] Cf. *CRP*, „Pappus" pp. 141—148 și „Reluarea problemei de la sfîrșit spre început", pp. 225—232.

Ar fi bine ca cititorul să-şi ilustreze singur, în concret, acest „procedeu descendent" în elaborarea planului de rezolvare, precum şi „procedeul ascendent" în executarea planului de rezolvare, cu ajutorul vreunui exemplu foarte evident. „Mi-aş putea procura cutare obiect dorit A în cutare magazin, dacă aş plăti pentru el cutare sumă B; aş putea obţine acea sumă B dacă..." Sper că cititorul va reuşi să-şi elaboreze un plan coerent şi că nu va avea dificultăţi (nici decepţii) în realizarea lui.

8.2. O SCHEMĂ MAI GENERALĂ

Să punem faţă în faţă schema elaborată în paragraful precedent şi exemplul analizat în amănunt în cap. 7 şi ilustrat pe fig.7.8. În exemplu poate fi sesizată clar, fără nici un echivoc, linia directoare a schemei: procedeu descendent de la necunoscută spre date, în faza de elaborare a planului, dar procedeu ascendent de la date la necunoscută, la executarea planului. Totuşi, detaliile exemplului nu se încadrează în schemă.

Să privim primul pas pe care l-am făcut într-un caz, şi în celălalt. În schema din 8.1, A a fost redus la B, obiectivul iniţial a fost redus la un obiectiv secundar, dobîndirea (realizarea) lui A depinde de dobîndirea (realizarea) lui B. Or, în exemplul din fig. 7.8, calcularea necunoscutei (volumul trunchiului de piramidă) a fost redusă la calcularea a *două* noi necunoscute (două volume); în exemplu există, deci, nu un singur obiectiv secundar, ci două asemenea obiective.

Dacă însă analizăm din nou exemplul reprezentat pe fig.7.8 şi diferitele remarci făcute în cap.7 în legătură cu această reprezentare grafică (vezi, în special, ex.7.4), nu ne va fi de loc greu să concepem o generalizare a schemei din 8.1, care înglobează cazul din fig.7.8 şi, o dată cu el, o varietate inepuizabilă de alte cazuri interesante, demne de luat în considerare.

Scopul (obiectivul) nostru este A. Pe A nu-l putem atinge imediat, dar remarcăm că l-am putea atinge dacă am avea (cunoaşte) cîteva lucruri (obiecte) B', B'', B''', ... În fapt, noi nu avem aceste lucruri, dar începem să ne gîndim cum am putea să le obţinem; cu alte cuvinte, ne propunem B', B'', B''', ... ca obiective secundare. După oarecare meditaţie, s-ar putea să ne dăm seama că ne-am putea atinge toate obiectivele secundare B', B'', B''', ... dacă am avea alte cîteva lucruri (obiecte) C', C'', C''', ... În fapt, noi nu avem nici aceste lucruri (C', C'', C''', ...), dar putem încerca să le obţinem (să le dobîndim); ni le propunem ca obiective terţiare şi aşa mai

departe. În felul acesta „urzim" canavaua planului nostru. S-ar putea să fim obligaţi să spunem de multe ori „Am putea avea cutare, dacă am avea cutare şi cutare şi cutare", pînă să ajungem, în fine, la o bază solidă, la lucruri de care dispunem, pe care le avem efectiv. Canavaua planului nostru constă din obiective intermediare ajutătoare, subordonate — toate — obiectivului principal, A, şi din interconexiunile lor. Pot exista multe obiective subordonate, şi detaliile ţesăturii pot fi prea complexe pentru a fi descrise în cuvinte, dar ele pot fi reprezentate în mod convenabil prin puncte şi linii pe diagramă de tipul celei elaborate în cap.7. (De pildă, în 2.5(3), obiectivul principal era D, obiectivele secundare erau a, b şi c, iar obiectivele terţiare p, q şi r. Vezi, de asemenea, ex.7.2).

Cred că cele de mai sus conturează destul de clar o schemă generală care o conţine pe cea descrisă în 8.1 ca un caz particular; o vom numi *schema procedeului descendent.* Ea este o schemă de elaborare a planului de rezolvare, de planificare a rezolvării; elaborarea (planificarea) rezolvării porneşte de la obiectivul urmărit (obiectivul, necunoscuta, concluzia) şi înaintează descendent spre obiectele care „ne stau în putinţă" (obiectele pe care le avem, datele, ipoteza). Ea este o parte a planului, pe care, în momentul în care vom fi ajuns la acele lucruri care „ne stau în putinţă", o vom folosi ca un „început" şi, refăcînd drumul pas cu pas în sens invers, vom înainta ascendent spre scopul urmărit. [Cf.ex.9.2(3).]

8.3. UN PROGRAM

Sînt sau nu egale numerele $\sqrt{3}+\sqrt{11}$ şi $\sqrt{5}+\sqrt{8}$? *Dacă nu — care din ele este mai mare?* (Se subînţelege că toate rădăcinile pătrate care intervin sînt luate cu semnul plus.)

Cu puţină experienţă în mînuirea algebrei, putem concepe rapid un plan cu care să tratăm această chestiune; ba chiar putem concepe un plan atît de clar şi de precis, încît să merite şi o denumire specială, şi să-l putem numi un *program.*

Cele două numere propuse sînt fie egale, fie inegale, cu variantele: primul mai mare decît al doilea, sau al doilea mai mare decît primul. Între cele două numere sînt, deci, posibile trei relaţii, exprimabile prin semnele $=$, $>$ şi $<$, dar dintre ele, numai una este realmente valabilă — deocamdată nu ştim care anume, dar sperăm s-o aflăm în curînd. S-o notăm cu semnul? pe aceea care este efectiv valabilă şi să scriem

$$\sqrt{3}+\sqrt{11}\ ?\ \sqrt{5}+\sqrt{8}.$$

Indiferent care dintre cele trei relaţii posibile este realmente valabilă, putem efectua anumite operaţii algebrice care sînt la fel de bine aplicabile tuturor celor trei relaţii. Pentru început, putem ridica la pătrat cei doi membri, şi atunci, şi între pătratele numerelor propuse va avea loc aceeaşi relaţie:

$$3 + 2\sqrt{33} + 11 \;?\; 5 + 2\sqrt{40} + 8.$$

Prin această operaţie am redus numărul de radicali; la început aveam patru, acum avem numai doi. Prin operaţii ulterioare, vom putea elimina unul cîte unul şi radicalii rămaşi, şi vom vedea, în cele din urmă, care din cele trei relaţii posibile este reprezentată de fapt de semnul ?.

Nu-i neapărat nevoie ca cititorul să prevadă în toate detaliile operaţiile planificate, dar el trebuie să-şi dea bine seama că operaţiile acestea pot fi realizate fără nici o ezitare, şi că ele duc în mod necesar la decizia căutată. El va fi de acord, atunci, că situaţia aceasta merită o denumire specială şi că un plan atît de precis poate fi numit program (vezi 8.5).

Cu aceste observaţii ne-am atins, de fapt, scopul propus în acest paragraf, şi n-ar mai fi nevoie să parcurgem efectiv etapele prevăzute în program. S-o facem totuşi:

$$\begin{aligned} 1 + 2\sqrt{33} \;&?\; 2\sqrt{40} \\ 1 + 4\sqrt{33} + 132 \;&?\; 160 \\ 4\sqrt{33} \;&?\; 27 \\ 528 \;&?\; 729 \end{aligned}$$

Dar, de fapt, acum nu mai există nici un semn de întrebare, fiindcă ştim care dintre cei doi membri este mai mare, aşa că, refăcînd în sens invers etapele parcurse, găsim că

$$\sqrt{3} + \sqrt{11} < \sqrt{5} + \sqrt{8}\,.$$

8.4. ALEGEREA INTRE MAI MULTE PLANURI

Pe fiecare din laturile unui triunghi dat (oarecare), *construim cîte un triunghi echilateral exterior triunghiului dat, şi unim centrele celor trei triunghiuri echilaterale. Să arătăm că triunghiul astfel obţinut este* ECHILATERAL.

În fig. 8.1, Δ ABC este triunghiul dat, iar A', B' şi C' sînt centrele triunghiurilor echilaterale construite respectiv pe BC, CA şi AB.

Ni se cere să arătăm că $\Delta A'B'C'$ este echilateral, dar pare straniu, aproape de necrezut, că acest triunghi este totdeauna echilateral, că figura finală rezultată din construcţie este independentă de figura arbitrară iniţială. Bănuim că demonstraţia nu poate fi uşoară.

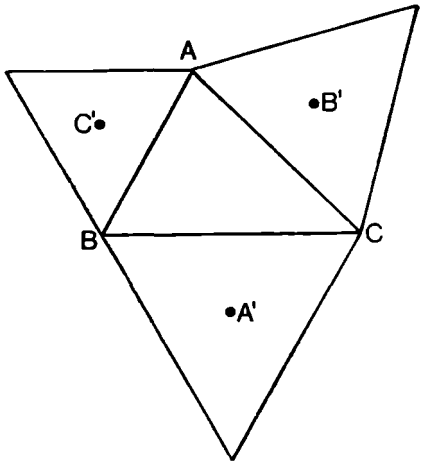


Fig. 8.1. Trei puncte izolate

În orice caz, nu ne place de loc că punctele A', B' şi C' apar atît de izolate de restul fig. 8.1. Acest defect nu este însă grav. După cum se vede uşor, $\Delta BA'C$ este isoscel, $A'B = A'C$ şi $\sphericalangle BA'C = 120°$. Introducem acest triunghi în figură, şi încă altele două analoge, şi obţinem în felul acesta figura „mai coerentă" 8.2.

Totuşi, nu ştim încă pe ce cale să mergem, cum să abordăm problema ca să ne atingem ţinta. *Cum am putea demonstra o astfel de concluzie?* În maniera lui Euclid? Folosind geometria analitică? Prin trigonometrie?

(1) Cum am putea demonstra, în maniera lui Euclid, că $A'B' = A'C'$? — Arătînd că $A'B'$ şi $A'C'$ sînt laturi corespondente în triunghiuri congruente. În figură nu există însă triunghiuri care ar putea fi utilizate în acest scop, şi nici nu se vede cum am putea introduce asemenea triunghiuri. Nu-i de loc încurajator — hai să încercăm o altă cale.

(2) Cum am putea demonstra, folosind geometria analitică, că $A'B = A'C'$? — Trebuie să considerăm coordonatele punctelor A, B şi C drept mărimi date, iar coordonatele punctelor A', B' şi C' drept necunoscute. După ce am reprezentat aceste necunoscute în funcţie de date, putem exprima şi distanţele de care este vorba în funcţie de date, şi, după aceea, putem analiza dacă ele sînt sau nu egale. Este un plan destul de clar, dar va trebui să lucrăm cu şase necunoscute şi şase date — nu, nu-i nici el prea ispititor — aşa că să încercăm şi o a treia cale.

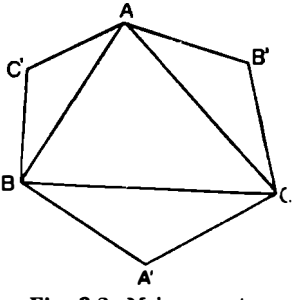


Fig. 8.2. Mai coerent

(3) Cum am putea demonstra, prin trigonometrie, că $A'B' = A'C'$? — Trebuie să

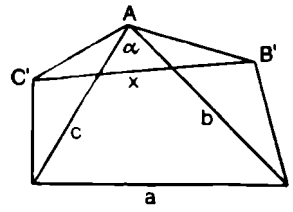


Fig. 8.3. Ne concentrăm asupra uneia din laturi

considerăm laturile a, b şi c ale triunghiului ABC drept mărimi date, şi cele trei distanţe

$$B'C' = x,\ C'A' = y,\ A'B' = z$$

drept necunoscute. După ce vom calcula necunoscutele, va trebui să vedem dacă, într-adevăr, $x = y = z$. Situaţia pare mai încuraja toare decît cea de la punctul (2) — aici avem numai trei date şi trei necunoscute.

(4) De fapt, n-avem nevoie să calculăm trei necunoscute, este suficient să ne ocupăm numai de două din ele: dacă $y = z$, atunci *oricare* două laturi ale triunghiului $A'B'C'$ sînt egale, şi asta-i suficient.

(5) De fapt, dacă procedăm ceva mai abil, n-avem nevoie să calculăm nici măcar două necunoscute: este suficient să-l exprimăm pe x în funcţie de a, b şi c, cu condiţia însă să ne aranjăm în aşa fel încît să obţinem o expresie *simetrică* în a, b şi c. (O expresie este simetrică în a, b şi c, dacă rămîne neschimbată cînd schimbăm oricum între ele mărimile a, b şi c. Dacă o asemenea expresie este valabilă pentru x, ea trebuie să fie valabilă la fel de bine şi pentru y şi z.)

Acest plan, deşi se bazează pe ingeniozitatea celui care rezolvă problema, pe o eventuală mică idee originală care ar urma să apară pe parcurs, pare destul de atrăgător — cititorul ar fi bine să încerce să-l realizeze (vezi fig. 8.3 şi ex. 8.3).

(6) Are vreo morală toată această poveste? Eu cred că are.

Dacă întrevedeţi mai multe planuri, dar nici unul nu vi se pare complet sigur, dacă există mai multe căi care diverg din punctul în care vă aflaţi, exploraţi o porţiune din fiecare, înainte de a vă aventura prea departe pe vreuna din ele — fiindcă oricare din ele ar putea să vă ducă într-o fundătură, într-un impas.

8.5. PLANURI ŞI PROGRAME

Planul pe care ni-l facem este, am putea spune, o „cale" pe care intenţionăm s-o străbatem. Există însă planuri şi planuri. Ne-ar place, bineînţeles, să avem un plan pentru o anumită acţiune care duce direct la ţintă, dar din nefericire, nu totdeauna reuşim să elaborăm un plan atît de complet şi, în afară de aceasta, chiar şi acţiunile de mai mică anvergură necesită o oarecare planificare. Se poate întîmpla să vedem numai o frîntură de drum, se poate întîmpla să vedem o porţiune mai lungă sau se poate întîmpla să vedem tot drumul, pînă la ţintă. După aceea, drumul pe care intenţionăm să mergem

poate fi clar sau poate fi nebulos, îl putem vedea desluşit sau îl putem doar întrezări vag, ca prin ceaţă. În afară de aceasta, pe porţiunea de drum pe care n-o vedem prea bine sau n-o vedem de loc, ne putem aştepta la fel de fel de incidente, şi trebuie să fim pregătiţi pentru tot felul de eventualităţi. O eventualitate pe care ne-o dorim, speranţa la care nu renunţăm niciodată complet, este aceea că ne va veni pe parcurs o idee strălucită, o idee revelatoare care va clarifica totul imediat, dintr-o dată.

Se întîmplă destul de frecvent să n-avem de la început un plan complet; în plan există lacune, din el lipsesc încă unele idei de importanţă capitală. Şi totuşi, mergem înainte, trecem la realizarea lui, nădăjduind că ne va veni pe drum vreo idee strălucită, sau măcar vreo idee nouă, care va „umple" toate „golurile".

Cît de mult ne bizuim pe apariţia unei asemenea idei? — iată ce putem considera că constituie deosebirea în esenţă cea mai importantă dintre un plan şi altul. Dacă nu depindem în nici un fel de intervenţia vreunei idei noi şi sîntem convinşi că paşii dinainte „cîntăriţi" şi prevăzuţi în plan sînt suficienţi pentru a ne atinge scopul, înseamnă că avem un plan clar şi îndeajuns de precis pentru a putea fi numit *program*. Se poate întîmpla să cheltuim mult timp migălind tot felul de planuri imperfecte, pînă să reuşim să elaborăm unul din ele pînă la rangul de program.

Comparaţi, de pildă, 8.3 cu 8.4.

8.6. SCHEME ŞI PLANURI

De la caz la caz, aşadar — în condiţii adecvate, fiecare din schemele studiate pînă acum sugerează un plan — dar nici una nu oferă imediat un plan precis, un program.

Avem, de pildă, o problemă de construcţie geometrică. Putem încerca s-o rezolvăm folosind schema celor două locuri geometrice. Acesta este, într-adevăr, un plan, dar realizarea lui necesită idei adiţionale (dinafara schemei): trebuie găsit un punct convenabil la a cărui construire să poată fi redusă problema (schema nu dă automat punctul!), iar condiţia trebuie scindată în aşa fel încît să obţinem pentru acel punct două locuri geometrice (schema nu spune cum trebuie subdivizată condiţia!).

Sau, ne hotărîm să rezolvăm o problemă de geometrie reducînd-o la un sistem de ecuaţii, folosind schema carteziană. Şi acesta este un plan, dar şi realizarea lui necesită cîteva idei adiţionale: trebuie în primul rînd să reuşim să construim atîtea ecuaţii cîte necunoscute

şi după aceea (alte idei adiţionale !), — trebuie să reuşim să rezolvăm sistemul de ecuaţii.

Procedeul descendent este o schemă foarte generală şi foarte utilă de planificare a rezolvării, dar ca să lucrăm de la necunoscută spre date peste „golul" care le separă, avem nevoie, evident, de unele idei „la obiect", de cîteva idei pertinente din domeniul problemei. După ce planificarea regresivă a reuşit şi a fost completată reţeaua logică — puntea care traversează golul — situaţia este cu totul alta. În momentul acela avem un program de rezolvare ascendentă, de la date, la necunoscută.

EXEMPLE ŞI COMENTARII LA CAPITOLUL 8

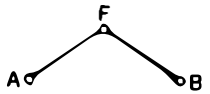
8.1. *Descendent sau ascendent? Regresiv sau progresiv? Analiză sau sinteză:* În terminologia noastră (vezi 8.2) termenul „procedeu descendent" înseamnă o anumită strategie în rezolvarea problemei, o modalitate tip de planificare a rezolvării. Este aceasta singura strategie posibilă? Este ea oare strategia optimă?

(1) Să luăm „exemplul nostru", exemplul pe care l-am studiat grafic în cap. 7. Planul de rezolvare la care am ajuns în final este reprezentat pe fig. 7.7; este o canava, o reţea de puncte şi linii, de necunoscute intermediare şi interconexiuni, care acoperă spaţiul iniţial liber dintre necunoscută şi date. Am început să „înpletim" această reţea pornind de la necunoscută şi înaintînd spre date; stadiile succesive ale raţionamentului sînt prezentate pe fig. 7.8. Am numit această direcţie de lucru „regresivă" sau „descendentă" (pe fig. 7.8 ea este şi efectiv descendentă — de sus în jos).

Planul final, sistemul complet de interconexiuni (vezi fig. 7.7 — în alte cazuri reţeaua poate fi mai complicată), nu indică însă direcţia în care a fost construit. Un alt rezolvator de probleme le-ar putea construi pornind de la date şi înaintînd în direcţia săgeţiilor din fig. 7.7 (direcţia în care am mers cînd am pus în aplicare planul). Descoperirea (mai bine zis, elaborarea) planului, mergînd în această direcţie, ar însemna o elaborare *progresivă, procedeu ascendent.*

Un alt treilea rezolvator de probleme (eventual, unul care se ocupă de o problemă mai complicată) ar putea elabora un asemenea plan fără să lucreze tot timpul într-o singură direcţie. Pornind, după caz, de la o extremitate sau alta, el ar putea lucra cînd de la necunoscută spre date, cînd de la date spre necunoscută; el poate lucra alternativ, dinspre ambele extremităţi; mai mult, el poate stabili, la un moment dat, o legătură promiţătoare undeva la mijloc, între obiecte (elemente) care n-au fost încă „legate" de vreuna din extremităţi. Aşadar, procedeul descendent nu este nicidecum singura posibilitate de elaborare a unui plan. Pentru un caz concret, vezi ex. 7.3.

(2) În exemplul rezumat pe fig. 7.8, am elaborat planul de rezolvare lucrînd descendent. Să examinăm în paralel cum am lucrat noi şi cum a lucrat un rezolvator, care a reuşit, într-un fel sau altul, să elaboreze acelaşi plan lucrînd ascendent; să comparăm între ele etapele semnificative.



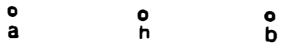


Fig. 8.4. Regresiv

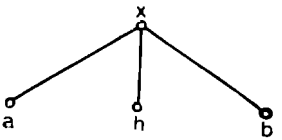


Fig. 8.5. Progresiv

Noi am pornit de la necunoscută şi ne-am pus întrebări care scoteau în evidenţă necunoscuta: *Ce urmărim, ce vrem să aflăm? Care este necunoscuta? Cum putem obţine acest tip de obiect? Cum putem găsi acest tip de necunoscută: Din ce date am putea calcula (deduce) acest tip de necunoscută?* Şi în felul acesta, am găsit două „date", volumele A şi B din care poate fi calculată necunoscuta, în funcţie de care poate fi exprimată necunoscuta: $F = B - A$. Acest stadiu al rezolvării este reprezentat pe fig. 8.4 (care este o parte a fig. 7.3).

Celălalt a pornit însă altfel: de la date. El şi-a pus întrebări care scoteau în evidenţă datele: *Ce ni se dă? Care sînt datele? Ce se poate face cu obiecte ca acestea? Cum putem folosi asemenea date? Ce putem deduce (calcula) din astfel de date?* Şi într-un fel sau altul, el a observat că din date poate deduce lungimea (înălţimea) x, că îl poate exprima pe x în funcţie de a, h şi b (dintr-o proporţie, aşa cum am observat şi noi, mai tîrziu, în cursul investigaţiei, vezi fig. 7.6). Acest stadiu al rezolvării în varianta „celuilalt" este reprezentat pe fig. 8.5.

Să revenim la rezolvarea noastră, la stadiul reprezentat pe fig.8.4. După ce am exprimat necunoscuta F în funcţie de A şi de B, am rămas cu două noi necunoscute, A şi B, cu două noi probleme (auxiliare):

Să se calculeze A în funcţie de a, h şi b.

Să se calculeze B în funcţie de a, h şi b.

Ambele sînt probleme matematice net formulate, de acelaşi tip cu problema pe care ne-am propus-o iniţial. Continuînd să lucrăm regresiv, ne întrebăm din nou: *Cum putem găsi (calcula) astfel de necunoscute? Din ce date am putea deduce astfel de necunoscute?*

Să ne întoarcem acum la celălalt rezolvator; el a ajuns în stadiul reprezentat pe fig. 8.5. După ce l-a exprimat pe x în funcţie de a, h şi b, el poate considera pe x drept o nouă dată a problemei, aşa că dispune acum de mai multe date, fapt care îi poate mări şansele de a găsi necunoscuta iniţială. Mergînd însă mai departe pe această cale, el nu are de-a face cu o problemă matematică formulată net, ci trebuie să-şi

pună o întrebare mai puțin precisă: Cum l-aș putea folosi pe x? *Ce se poate face cu obiecte ca acestea? Ce pot deduce (calcula) din astfel de date?*

Dar cea mai pregnantă diferență dintre „noi" și „celălalt", dintre cele două situații reprezentate pe fig. 8.4 și fig. 8.5, constă în perspectiva potențială. Ce se va întîmpla dacă vom reuși „noi" să rezolvăm problema „noastră" auxiliară? Și ce se va întîmpla dacă va reuși „el" să-și răspundă la întrebare?

Dacă reușim „noi" să exprimăm necunoscutele „noastre" auxiliare în funcție de date (A și B în funcție de a, h și b), automat, putem să exprimăm (în funcție de date și necunoscuta noastră inițială ($F = B - A$), și problema este rezolvată. Dacă celcare lucrează „progresiv" reușește să exprime o anume mărime, să-i spunem y, în funcție de date, el rămîne în continuare în fața unei întrebări destul de nebuloase: Ce se poate face cu y? (Cum îl poate utiliza pe y)? Aceasta, bineînțeles, cu excepția unui caz fericit: a avut noroc și a reușit să-l exprime în funcție de date chiar pe F, și atunci și-a rezolvat și el problema.

(3) Atît o cale de planificare a rezolvării, cea regresivă, cît și cealaltă, cea progresivă, pot reuși, și atît o cale cît și cealaltă pot eșua. Lucrînd descendent, putem ajunge la o problemă auxiliară pe care n-o putem rezolva. Lucrînd ascendent, putem deduce din date noi și noi mărimi, dar aceste mărimi s-ar putea să nu fie utilizabile în sensul în care ne interesează pe noi: s-ar putea să nu fim în stare să deducem din ele necunoscuta inițială.

Ambele căi de planificare a rezolvării necesită o îmbinare de activități de diferite tipuri, de diferite orientări. În orice caz, fapt este că dacă lucrăm regresiv, trebuie să ne așteptăm că ne vom cheltui cea mai mare parte din timp rezolvînd probleme formulate net; iar dacă lucrăm progresiv, trebuie să ne așteptăm că ne vom cheltui mare parte din timp ezitînd între probleme pe care le-am putea rezolva, sau rezolvînd probleme care, de fapt, nu ne sînt de folos.

Ca apreciere de ansamblu, planificarea regresivă, procedeul descendent, „analiza" (în terminologia geometrilor greci) este de preferat. Nu poate fi vorba de reguli stricte și expeditive, dar cel mai judicios este, probabil, să se examineze mai întîi necunoscuta (concluzia, obiectul pe care vrem să-l obținem) și numai după aceea datele (condiția, ipoteza, obiectele pe care le avem).

Dacă n-aveți motive speciale să procedați altfel, începeți lucrul regresiv, descendent, pornind de la necunoscută — desigur dacă aveți de la început o idee strălucită care vă îndeamnă să porniți de la date, dați-i drumul!

(4) Să mai consemnăm (doar) cîteva scurte observații — deși ar mai fi multe de spus[3].

În unele cazuri, nu prea avem de ales. În multe probleme concrete, obiectul pe care vrem să-l găsim (construim dobîndim,...) este perfect definit, însă obiectele pe care le-am putea eventual folosi pentru a ne atinge scopul nu sînt de loc evidente, ele sînt atît de multe, încît este imposibil să le trecem în revistă. Poate fi foarte greu de găsit o

[3] Cf. *CRP*, „Pappus", pp. 142—148 și pp. 185—232, „„Reluarea problemei de la sfîrșit spre început".

raţiune valabilă de a începe cu un element anumit din noianul copleşitor de date, aşa că sîntem aproape obligaţi să elaborăm planul lucrînd regresiv.

După ce ne-am structurat planul de rezolvare lucrînd regresiv, trecem la realizarea lui acţionînd progresiv (revedeţi 7.5); însă ideile pe care le-am conceput anterior — toate, fără excepţie — le-am conceput nu pentru planificarea rezolvării, ci pentru realizarea rezolvării, şi ceea ce facem acum nu este altceva decît punerea lor în aplicare. Ceea ce poate duce chiar şi la bănuiala că cel care începe să elaboreze un plan de rezolvare lucrînd progresiv are, probabil, deja în minte unele idei directoare, pe care le-a conceput înainte de a se apuca de treabă — vreau să spun, pe care le-a conceput implicit, pe care le are eventual în subconştient.

O studentă explica toate acestea în felul următor: sinteza ca atare (fără o analiză prealabilă) ar fi o treabă foarte dificilă — este ca şi cum ai încerca să faci budincă avînd toate ingredientele la îndemînă, dar fără să ştii reţeta.

Şi, bineînţeles, nu trebuie să fim pedanţi sau formalişti. Lucrînd descendent, adică de la necunoscută spre date, s-ar putea să sesizăm la un moment dat o bună ocazie de a face un pas ascendent, de la date spre necunoscută; să nu pierdem ocazia şi să-l facem negreşit, cu orice preţ.

8.2. *Înţeleptul începe cu sfîrşitul.* Un prieten — bun matematician şi filozof remarcabil — îmi spunea cîndva că, deseori, cînd încearcă să găsească o demonstraţie pentru o teoremă, începe prin a scrie pe hîrtie Q.E.D. (*quod erat demonstrandum* — ceea ce era de demonstrat) şi că actul în sine de a scrie fraza tradiţională cu care se încheie o demonstraţie, îi creează o excelentă stare de spirit.

Există şi un proverb: *„Înţeleptul începe cu sfîrşitul, nebunul sfîrşeşte cu începutul"*[3]

8.3. Realizaţi efectiv planul indicat în 8.4(5).

8.4. *O alegere între trei planuri.* Fie a — raza şi h — înălţimea unui cilindru circular drept. Un plan care intersectează baza după un diametru este tangent la perimetrul ariei de sus a cilindrului (are cu el numai un singur punct comun) şi împarte volumul cilindrului în două părţi inegale. Calculaţi partea mai mică (volumul unei „copite"). cuprinsă între baza cilindrului şi planul de intersecţie.

Problema, ca şi prima ei rezolvare, ne-au rămas de la Arhimede[4].

Folosim geometria analitică în spaţiu. Axa cilindrului coincide cu axa Z, iar baza lui se află în planul (x, y) al unui sistem de coordonate rectangulare. Planul care divide volumul cilindrului intersectează planul (x, y) după axa y. Prin urmare, ecuaţia perimetrului bazei este

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

---

[3] Proberb englezesc: *A wise man begins in the end, a fool ends in the beginning* — vezi şi *CRP*, pp. 126—130, „Înţelepciunea proverbelor." — *N.T.*

[4] Vezi Propoziţia 11 din *Metoda*, pp. 36—38 din Suplimentul la *Opere* publicat de *T. L. Heath* (ed. Dover).

iar ecuația planului de intersecție

$$\frac{z}{h} = \frac{a}{a}.$$

Pentru a calcula volumul căutat, putem folosi fie calculul integral, fie principiul lui Cavalieri. În ambele cazuri, avem de considerat o familie de secțiuni paralele prin „copită". Există trei procedee evidente : putem alege secțiunile fie perpendiculare pe axa x, fie perpendiculare pe axa y, fie perpendiculare pe axa z.

Pe care îl preferați ? Realizați-l efectiv.

8.5. *O alegere între două planuri*

(1) Rezolvînd un joc de cuvinte încrucișate, ezitați între două cuvinte. Unul are patru litere dintre care una este cunoscută iar trei — necunoscute, celălalt are litere dintre care trei sînt cunoscute și cinci — necunoscute. Pe care din cele două cuvinte ar trebui să încercăm să-l găsim mai întîi ? *Pe baza datelor numerice puse la dispoziție,* se poate oare face o alegere rațională între cele două posibilități ?

Eu aș zice că nu — dar chestiunea lasă loc pentru discuții.

†(2) Întrebarea de mai sus poate fi enunțată într-o formă mai generală și (în măsura în care lucrul acesta este posibil) mai precisă.

Un cuvînt constă din $(k + 1)$ litere, dintre care k sînt cunoscute, iar l — necunoscute. Ne propunem să găsim cuvîntul, și examinăm *gradul de dificultate* al sarcinii pe care ne-am asumat-o.

Să presupunem mai întîi că informația despre cele k litere este *completă :* sînt date pozițiile literelor și literele ca atare (ca în exemplul

$$\text{PR} - - \text{L} - - -$$

în care $k = 3$, $l = 5$). În acest caz, putem defini drept „grad de dificultate" al găsirii cuvîntului — numărul N de cuvinte românești, din vocabularul actual, care constă din $(k + l)$ litere, dintre care k litere sînt de natura specificată și ocupă pozițiile indicate. (Bineînțeles, am putea alege drept grad de dificultate orice altă funcție crescătoare, bine definită, de variabila N, cum ar fi, de pildă, $\ln N$).

Teoretic, definiția aceasta poate părea rezonabilă ; cu cît numărul N de cuvinte admisibile este mai mare, cu atît și dificultatea de a alege unul din ele este mai mare. Practic însă există cîteva puncte nevralgice. Cum decidem (corect) dacă un cuvînt românesc face sau nu face parte din „vocabularul actual" ? Este oare această definiție satisfăcătoare din punctul de vedere al „crucișilogilor", al pasionaților de cuvinte încrucișate ? În orice caz, determinarea efectivă a numărului N pare inabordabil de laborioasă și sterilă.

†(3) În felul acesta, sîntem conduși să ne propunem un alt obiectiv, mai înalt, mai ambițios : ne propunem să determinăm „dificultatea" (gradul de dificultate) exclusiv în *măsura în care* aceasta depinde de k și de l — dificultatea *ceteris paribus,* „celelalte circumstanțe rămînînd neschimbate" — eventual, o „dificultate medie". Ne propunem să punem loialtă toate cazurile cu același k și același l, și să luăm în considerare numai

datele numerice k și l. Dacă ne-am putea atinge acest obiectiv mai ambițios, gradul de dificultate ar urma să fie o funcție numerică $f(k, l)$ de k și de l. Pare evident că $f(k, l)$ trebuie să fie o funcție descrescătoare de k și crescătoare de l. Dar chiar și atunci, n-am ști încă, de pildă, care dintre valorile $f(1,3)$ și $f(3,5)$ este mai mare.

†(4) Dacă literele din cuvintele românești ar fi *independente* între ele, numărul N de cuvinte românești cu k litere date și cu l litere care pot fi alese la întîmplare ar putea fi exprimat, foarte simplu, sub forma

$$N = 26^l.$$

Numărul N este folosit aici cu sensul definit în (2). De aici, am putea defini „dificultatea" (gradul de dificultate), de pildă, prin expresia

$$f(k, l) = \frac{\ln N}{\ln 26} = l.$$

Această alegere a lui $f(k, l)$ este consistentă în sine, dar eludează întrebarea crucială: în ce măsură cele k litere cunoscute limitează (îngrădesc) alegerea celor l litere rămase încă eligibile(dar care, de fapt, nu sînt complet arbitrar eligibile) ?

Este foarte îndoielnic că pentru $f(k, l)$ s-ar putea elabora o formulă cît de cît realistă. În orice caz, este de așteptat că o astfel de formulă să difere de cea propusă mai sus în cel puțin două privințe: ea trebuie să fie o funcție strict descrescătoare de k, și trebuie să fie adaptabilă, dacă nu la toate, cel puțin la cîteva limbaje.

(5) Iată o alternativă rudimentară și complet speculativă:

$$f(k, l) = \frac{\ln [26 - \alpha k][26 - \alpha(k+1)][26 - \alpha(k+2)] \ldots [26 - \alpha(k+l-1)}{\ln 26}.$$

O alegere convenabilă a parametrului pozitiv α ar urma să adapteze formula la o limbă care folosește în scris cele 26 litere din alfabetul latin. Formula trebuie folosită numai pentru cuvinte de lungime

$$k + l < \frac{25}{\alpha} + 1.$$

(6) Considerațiile de mai sus aruncă — poate — oareeare lumină asupra a ceea ce am putea numi sfera euristicii și asupra preciziei care poate fi, eventual, realizată în cadrul ei — și aceasta constituie, de altfel, singura lor justificare.

8.6, *Și acesta este un plan...* „O să stau, o să mă uit la figură, și o să aștept să-mi vină o idee bună". Este și acesta, un plan. Poate — cam prea optimist: se pare că vă bazați cam prea mult pe capacitatea dv. de a „produce" idei bune. Uneori, s-ar putea, totuși, ca și un asemenea plan să dea rezultate.

8.7. Recaptulînd din problemele de care v-ați ocupat cîndva, reconsiderați cîteva din cele pe care le-ați rezolvat, sau pe care *le-ați fi putut rezolva* folosind procedeul descendent.

8.8. *Nu vă angajați prea mult, păstrați-vă libertatea de acțiune.* Să considerăm un exemplu semiconcret. Ni se cere să demonstrăm o propoziție de geometrie elementară a cărei concluzie afirmă: „ ... în aceste condiții, unghiurile $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle EFG$ sînt egale". Această concluzie trebuie dedusă dintr-o anumită ipoteză, dar detaliile ei sînt irelevante pentru ceea ce ne propunem în acest comentariu, așa că le vom ignora.

Într-un anumit stadiu (probabil, incipient) al procesului de rezolvare ne concentrăm atenția asupra concluziei: *Care este concluzia?*

Trebuie să demonstrăm că

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle EFG.$$

Cum putem demonstra o astfel de concluzie? Din ce ipoteză am putea deduce o asemenea concluzie?

Izbutim să ne amintim cîteva fapte pertinente învățate în trecut, cîteva posibilități de a deduce o concluzie ca cea pe care o avem de demonstrat. Două unghiuri sînt egale dacă:

(1) sînt unghiuri corespondente în triunghiuri egale; sau

(2) sînt unghiuri corespondente în triunghiuri asemenea; sau

(3) sînt unghiuri corespondente formate de o secantă cu două drepte paralele; sau

(4) au drept complement un același al treilea unghi; sau

(5) sînt înscrise în același cerc și subîntind același arc.

Avem aici cinci teoreme cunoscute diferite, și pe oricare din ele am putea-o aplica în cazul nostru; cinci ipoteze distincte, și din oricare din ele am putea deduce concluzia dorită. Putem porni la lucru cu oricare din ele. Am putea încerca, de pildă, să folosim teorema (1): am putea introduce două triunghiuri aparent convenabile, să zicem ΔABC și ΔEFG, și am putea încerca apoi să demonstrăm că ele sînt într-adevăr egale. Dacă reușim, rezultă imediat concluzia dorită! Dar cum am putea demonstra că $\Delta ABC \cong \Delta EFG$? O dată cu această întrebare, ne angajăm într-o planificare regresivă. Dar la fel de bine am putea începe o asemenea planificare regresivă pornind de la oricare din celelalte teoreme citate — are vreuna șanse să reușească? Care din ele are șansele cele mai mari? Dacă nu putem răspunde la aceste întrebări, dacă răspunsul pe care-l inspiră este doar un fel de senzație (sentiment?) nebuloasă și nesigură, atunci alegerea pe care trebuie s-o facem este, realmente, discutabilă, plină de riscuri. Sîntem la o răspîntie. Avem de ales între mai multe drumuri; începutul fiecăruia este destul de clar, dar continuarea este nesigură, iar sfîrșitul este ascuns în ceață. Fig. 8.6 încearcă să exprime grafic această situație.

Acest exemplu nu vrea altceva decît să-l facă pe cititor să înțeleagă, să realizeze dificultatea dezorientată a situației, nesiguranța deciziei cînd este vorba de ales între mai multe planuri de rezolvare. Sfatul pe care aș vrea să-l dau într-o asemenea situație este: *Nu vă angajați prea de timpuriu, nu vă lansați pe o cale mai mult decît este necesar.* Faceți *un* lucru, dar nu le uitați pe *celelalte.*

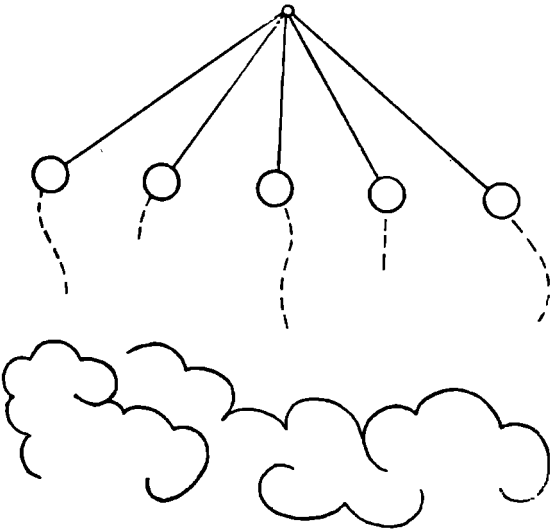


Fig. 8.6. O alegere discutabilă

Un bun rezolvator de probleme își planifică acțiunile ca un bun comandant de oști: el își dă seama că atacul plănuit poate să eșueze și nu uită să-și asigure calea de retragere. Un plan bun trebuie să aibă prevăzută în însăși structura lui o anumită flexibilitate, o anumită adaptabilitate la eventualele dificultăți neprevăzute[5].

[5] Vezi *MRP*, vol. II, pp. 174—177.

CAPITOLUL 9

Probleme în interiorul problemelor

Cînd într-o construcţie sau într-o demonstraţie, am admis [ca fiind adevărat] ceva care n-a fost dovedit, ci necesită argumentare, considerăm după aceea ceea ce am admis — drept îndoielnic ca atare şi vrednic de a fi cercetat şi numim aceasta lema.

Proclos, *Comentarii la prima carte a Elementelor lui Euclid :* Despre Propoziţia 1, Cartea I ; versiunea franceză de Paul Van Ecke, 1948, p. 187.

... de fiecare dată cînd apare vreo dificultate, (trebuie) să vedem pe loc dacă nu este util să examinăm mai întîi unele lucruri şi care anume, precum şi în ce ordine.

Descartes, *Reguli pentru îndrumarea minţii,*
Regula VI, p. 23.

Cum este cel mai bine de procedat cu această problemă?
Cel mai bine este s-o lăsăm şi să învetăm alta
Profesorul de matematică tradiţional

9.1. PROBLEMELE AUXILIARE: MIJLOC DE A ATINGE UN SCOP

Cîteva observaţii ale lui Wolfgang Köhler în legătură cu comportarea maimuţelor antropoide prezintă un deosebit interes pentru noi. Să descriem, schematic, una din experienţele făcute de el[1].

Într-o cuşcă se află un cimpanzeu şi cimpanzeului îi este foame. În afara cuştii, jos pe pămînt, se află o banană. Cimpanzeul îşi poate trece braţul printre gratiile cuştii, dar banana este prea departe şi n-o poate ajunge. Cimpanzeul s-a străduit în fel şi chip s-o apuce, dar n-a reuşit, şi acum stă liniştit. Tot pe pămînt, în afara cuştii, dar destul de aproape ca să poată fi apucat se află şi un băţ, însă cimpanzeul pare să nu-i dea nici o atenţie. Deodată sare ca ars, apucă băţul, şi cu mişcări stîngace împinge banana pînă o poate ajunge cu braţul, după care o ia şi o mănîncă.

Acest cimpanzeu a rezolvat două probleme :

A. Să apuce banana ;

B. Să apuce băţul.

Problema A a apărut prima. La început, cimpanzeul n-a manifestat nici cel mai mic interes pentru băţ — nu era ceva de mîncare ; şi totuşi, prima pe care a rezolvat-o a fost problema B. Rezolvarea

[1] Wolfgang Köhler, *The Mentality of Apes*, Brace & Co., Harcourt, pp. 32—34.

problemei B i-a netezit drumul spre rezolvarea problemei lui inițiale, problema A. Direct interesat cimpanzeul era numai de problema A, în timp ce de problema *B* nu era interesat decît indirect; A era ținta, B — doar mijlocul de a o atinge; A era problema lui principală, problema originară, B — doar o *problemă auxiliară* (o problemă „ajutătoare", o subproblemă).

Să schițăm în general înțelesul acestui termen important; *O problemă auxiliară este o problemă căreia îi acordăm atenție, sau de care ne ocupăm, nu din interes pentru ea ca atare, ci fiindcă sperăm că examinarea sau rezolvarea ei ne-ar putea ajuta să rezolvăm o altă problemă, problema noastră inițială.* O problemă auxiliară este un mijloc de a atinge un scop, ea trebuie să deschidă calea spre o anumită țintă, s-o facă accesibilă; țelul, sau scopul, este problema inițială[2].

A-ți deschide calea spre rezolvarea unei probleme aparent inaccesibile elaborînd și rezolvînd în prealabil o problemă auxiliară adecvată este tipul cel mai caracteristic de acțiune conștientă, inteligentă. Și ar fi greu de negat că performanța cimpanzeului trebuie considerată o manifestare de inteligență.

Ne propunem, în continuare, să clasificăm problemele auxiliare, pornind de la exemple matematice.

9.2. PROBLEME ECHIVALENTE: REDUCEREA BILATERALA

Începem cu un exemplu. Scopul nostru este să rezolvăm următorul sistem de trei ecuații cu trei necunoscute:

$$(A)\quad \begin{cases} x - y = -4 \\ x + y + z = 5 \\ x + y - z = 31 \end{cases}$$

Din sistemul (A) deducem un alt sistem (B):

(1) lăsăm neschimbată prima ecuație din (A);

(2) adunăm între ele a doua și a treia ecuație din (A);

(3) scădem din a doua ecuație din (A) ecuația a treia; obținem în felul acesta un nou sistem de trei ecuații:

$$(B)\quad \begin{cases} x - y = -4 \\ 2(x + y) = 36 \\ 2z = -26 \end{cases}$$

Din însuși modul în care am dedus sistemul (B) rezultă că numerele x, y, z care satisfac (A) trebuie, în mod necesar, să satisfacă și (B).

[2] *CRP*, „Problema auxiliară" pp. 155–160.

Reciproca este şi ea adevărată: numerele x, y, z care satisfac (B) trebuie să satisfacă şi (A). Faptul pare plauzibil, dar îl putem şi demonstra în diferite moduri, de pildă în felul următor. Împărţind la 2 ultimele două ecuaţii din (B) obţinem:

$$(C)\quad \begin{cases} x - y = -4 \\ x + y = 18 \\ z = -13 \end{cases}$$

şi de la (C) ne putem întoarce la (A), lăsînd prima ecuaţie din (C) neschimbată, iar pe celelalte două mai întîi adunîndu-le, iar apoi scăzîndu-le una din alta. Pe scurt, dacă trei numere x, y şi z satisfac unul din cele două sisteme (A) şi (B), ele trebuie, în mod necesar, să-l satisfacă şi pe călălalt.

Sistemele (A) şi (B) nu sînt identice; ele nu sînt formate din aceleaşi ecuaţii. De aceea, nu este corect să spunem că cele două probleme care constă, una — în rezolvarea sistemului (A), cealaltă în rezolvarea sistemului (B), sînt identice. Dar putem spune, în mod justificat, că aceste două probleme sînt *echivalente.* Iată şi definiţia generală a acestei utilizări a termenului: *Două probleme sînt echivalente din punctul nostru de vedere dacă ştim că rezolvarea oricăreia din ele antrenează automat rezolvarea celeilalte*[3].

Trecerea de la o problemă dată la o problemă echivalentă se numeşte *reducere bilaterală* (sau reversibilă, sau convertibilă, sau echivalentă). De pildă, trecerea de la problema noastră iniţială care constă în rezolvarea sistemului (A) la problema care constă în rezolvarea sistemului (B) este o reducere bilaterală. Ea este în acelaşi timp şi o reducere utilă fiindcă sistemul (B) este mai aproape de rezolvarea căutată decît era sistemul (A). Într-adevăr, (B) este mai aproape de (C) decît era sistemul (A), iar (C) este undeva foarte aproape de capătul drumului: există de acum valoarea lui z, şi n-a mai rămas decît foarte puţin de făcut pentru a-i obţine şi pe x şi pe y.

9.3. LANŢURI DE PROBLEME ECHIVALENTE

Să ne întoarcem la sistemul (C) din 9.2; din el, prin adunare şi scădere, obţinem sistemul:

$$(D)\quad \begin{cases} 2x = 14 \\ 2y = 22 \\ z = -13 \end{cases}$$

[3] *CRP*, „Problema auxiliară", (6), p. 157.

şi de aici

$$(E)\quad \begin{cases} x = & 7 \\ y = & 11 \\ z = -13 \end{cases}$$

Obţinem astfel o succesiune de cinci sisteme (fiecare de cîte trei ecuaţii)

$$(A),\quad (B),\quad (C),\quad (D),\quad (E).$$

Fiecare din ele are asociată o problemă : să se găsească valorile x, y şi z care satisfac sistemul respectiv. În cazul sistemului (E), „problema" este de fapt complet rezolvată, aşa că termenul „problemă" este folosit nu în sensul strict, ci într-unul mai larg. Fiecare din aceste probleme este echivalentă cu problema precedentă (precum şi cu cea următoare), aşa cum fiecare verigă a unui lanţ se îmbină cu veriga vecină ; avem deci un *lanţ de probleme echivalente*.

În lanţul considerat de noi, (A) este începutul, iar (E) sfîrşitul ; (A) este sistemul propus iniţial, iar (E) prezintă, pur şi simplu, soluţia. Ceea ce avem deci aici este o cale perfectă, ideală, de a ajunge la soluţie. Pornind de la problema propusă, elaborăm (imaginăm !) o succesiune de (alte) probleme : fiecare problemă este echivalentă cu cea precedentă, dar este mai apropiată de soluţia căutată decît era cea dinaintea ei ; trecînd astfel din problemă în problemă, ajungem într-o ultimă etapă — la soluţia care ne interesează.

Dar, chiar şi în matematică, sîntem deseori nevoiţi — căutînd o necunoscută sau străduindu-ne să găsim o demonstraţie — să ne mulţumim şi cu mai puţin decît „perfecţiunea" ideală. Aşa că, să ne întoarcem, şi să trecem în revistă şi alte tipuri de probleme auxiliare.

9.4. PROBLEME AUXILIARE MAI AMBIŢIOASE, SAU MAI PUŢIN AMBIŢIOASE: REDUCEREA UNILATERALA

Să considerăm, pentru început, o problemă enunţată schematic :

A. Să se găsească volumul unei piramide, fiind date ...

Presupunem aici că datele sînt suficiente pentru a determina piramida, dar că printre ele nu figurează nici baza, nici înălţimea ; nici una din aceste două mărimi nu este dată. Precizarea aceasta este importantă, însă în rest, este cu totul neimportant pentru discuţia care urmează, care anume sînt datele, aşa că nici nu le vom mai enumera[4].

[4] Pentru o problemă concretă de forma A, vezi ex. 4.17.

Ştim că volumul unei piramide poate fi calculat dacă se cunoaşte baza şi înălţimea piramidei — dar, aşa cum am mai spus, nici una din aceste mărimi nu este dată. Şi deoarece ele nu sînt date, vom încerca să le calculăm, aşa că abordăm o altă problemă:

B. Să se găsească baza şi înălţimea unei piramide, fiind date...

Problema A are o necunoscută, problema B are două necunoscute şi ambele probleme au aceleaşi date (neenumerate explicit). Între aceste două probleme există o relaţie asimetrică, o relaţie într-un singur sens. Dacă reuşim să rezolvăm B, avem baza şi înălţimea piramidei, şi deci putem să-i calculăm volumul, aşa că putem rezolva şi problema A. Dacă însă reuşim să rezolvăm A, nu este nicidecum sigur că vom putea rezolva şi B: cu toate că rezultatul lui A dă o relaţie simplă între cele două necunoscute ale lui B, determinarea lor separată s-ar putea să rămînă grevată de dificultăţi serioase. Prin urmare, realizăm mai puţin rezolvînd pe A, decît rezolvînd pe B. Putem spune că, dintre cele două probleme, A este o problemă *mai puţin ambiţioasă* iar B *una mai ambiţioasă*[5].

Să reformulăm cele de mai sus în termeni generali. Avem două probleme, A şi B, ambele nerezolvate, iar situaţia cunoştinţelor noastre despre aceste probleme este următoarea: *ştim cum am putea deduce din soluţia lui B soluţia lui A, dar nu ştim cum ar trebui procedat ca din soluţia lui A să deducem soluţia lui B.* În aceste circumstanţe, spunem că A este (o problemă) mai puţin ambiţioasă decît B şi că (ceea ce înseamnă, de fapt, acelaşi lucru) B este (o problemă) mai ambiţioasă decît A.

Trecerea de la o problemă iniţială la o problemă auxiliară care este mai ambiţioasă, sau mai puţin ambiţioasă, decît problema iniţială (în orice caz, la o problemă care nu este echivalentă cu problema iniţială) se numeşte *reducere unilaterală* (sau ireversibilă). În exemplul nostru, problema iniţială A este mai puţin ambiţioasă decît problema auxiliară B, aşa că reducerea lui A la B este unilaterală. Un cititor mai experimentat îşi aminteşte probabil imediat cîteva exemple similare cu cel prezentat aici în care o asemenea reducere unilaterală i-a fost de real folos.

Şi reducerea unilaterală de celălalt tip, în care problema auxiliară este mai puţin ambiţioasă decît problema iniţială, se dovedeşte, deseori utilă. Iată un exemplu schematic:

A. Să se calculeze necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ şi x_n, fiind date ...

B. Să se calculeze necunoscuta x_1, fiind date ...

---

[5] *CRP*, "Problema auxiliară", (8), p. 159.

Presupunem că datele şi condiţia determină complet necunoscutele şi că ele sînt aceleaşi în ambele probleme, în A şi în B, dar că nu are aici nici o importanţă în ce constă ele, aşa că le vom elimina din discuţie. Observaţie cu totul banală — rezolvarea lui A înseamnă automat rezolvarea lui B, dar, în general, rezolvarea lui B poate să nu însemne automat rezolvarea lui A : conform definiţiei noastre, A este o problemă mai ambiţioasă decît problema B. Totuşi, se întîmplă foarte frecvent, cînd ni se cere să rezolvăm A, să fie avantajos să introducem B ca problemă auxiliară ; aşa am procedat în repetate rînduri în cap.3, cînd am rezolvat A prin recurenţă şi cînd, alegînd pe x, drept necunoscută iniţială, am început prin a rezolva problema auxiliară B, pe care am folosit-o apoi ca punct de sprijin pentru a rezolva pe A.

9.5. RPOBLEME AUXILIARE MAI ÎNDEPĂRTATE

Începem cu un exemplu. Să considerăm următoarea problemă :

A. Fiind dată lungimea muchiei unui tetraedru regulat, să se găsească raza sferei circumscrise tetraedrului.

Dacă nu vedem nici o altă cale de a ataca problema A, putem încerca s-o abordăm considerînd următoarea problemă :

B. Fiind dată lungimea laturii unui triunghi echilateral, să se găsească raza cercului circumscris triunghiului.

Trecerea de la A la B nu este nici reducere bilaterală, nici reducere unilaterală, în sensul 9.2 şi 9.4. Într-adevăr, este greu de văzut *a priori* în ce fel rezolvarea lui B ar duce automat la rezolvarea lui A, sau rezolvarea lui A — la cea a lui B ; problemele A şi B nu par echivalente, şi nici una nu pare mai ambiţioasă decît cealaltă, în sensul definiţiilor noastre.

Şi totuşi, problemele A şi B nu sînt complet fără legătură între ele. Problema B este analogă cu problema A ; avem aici în mic o mostră a acelei mari analogii care există între geometria plană şi geometria în spaţiu. Mai mult, pentru cei mai mulţi dintre noi, problema B pare, probabil, mai uşoară decît problema A ; s-ar putea chiar s-o fi întîlnit cîndva, şi acum, cu oarecare efort, să ne putem aminti şi rezolvarea ei. În această situaţie, este firesc să ne întrebăm — n-ar merita oare să ne ocupăm de problema B ? Există oare vreo şansă ca ocupîndu-ne de B, să ne uşurăm rezolvarea lui A ?

S-ar putea foarte bine întîmpla ca luarea în considerare a problemei B să nu contribuie apreciabil la rezolvarea problemei A ; şi

aceasta se poate întîmpla chiar şi atunci cînd vedem clar analogia dintre A şi B şi cînd dispunem efectiv de rezolvarea completă a lui B. Dar se poate întîmpla şi altfel — ca B să ne ajute, cu toate că aparent este cu totul sterilă. Compararea lui A cu problema analogă B poate face problema propusă A mai interesantă, şi într-un asemenea caz, *B este* utilă. Dar contribuţia lui B la rezolvarea lui A poate fi şi mai netă; există şansa ca analogia dintre A şi B să ne sugereze vreo observaţie utilă. De pildă, în problema „plană" B, raza căutată este o fracţie simplă (2/3) din înălţimea triunghiului echilateral. Acest fapt ne poate sugera întrebarea: cum stau lucrurile cu problema analogă „în spaţiu" A?; nu cumva şi acolo raza căutată este o fracţie simplă din înălţimea tetraedrului regulat? Nu-i exclus ca această întrebare, sau o alta similară, să introducă elemente utilizabile şi să ne netezească drumul, spre rezolvarea lui A. Sau, în cursul rezolvării lui A, s-ar putea să avem nevoie de înălţimea uneia din feţele tetraedrului; şi atunci, dacă cunoaştem raportul dintre înălţimea şi raza cercului circumscris unui triunghi echilateral (cel menţionat mai sus), răspunsul la problema B poate contribui cu o verigă la lanţul pe care îl avem de făurit pentru a obţine răspunsul la problema A.

În general, există cazuri în care ne putem aştepta că examinarea unei anumite probleme B va contribui, într-un fel sau altul, la rezolvarea problemei propuse A, cu toate că B nu este nici echivalentă cu A, nici mai ambiţioasă sau mai puţin ambiţioasă decît A. Despre o asemenea problemă B spunem că este o problemă auxiliară mai îndepărtată de problema A.

9.6. AJUTOR MATERIAL, AJUTOR METODOLOGIC, INFLUENŢĂ STIMULANTĂ, CĂLĂUZĂ, PRACTICĂ (EXERCIŢIU)

O problemă auxiliară poate ajuta la rezolvarea problemei iniţiale în nenumărat de multe şi de diferite moduri.

O problemă auxiliară echivalentă dă, o dată rezolvată, *soluţia completă* a problemei iniţiale, iar o problemă auxiliară mai ambiţioasă decît problema iniţială face la fel. (Diferenţa dintre aceste două tipuri de probleme auxiliare iese pregnant în evidenţă în momentul în care constatăm că nu sîntem în stare să le rezolvăm. Dacă o problemă auxiliară echivalentă depăşeşte net posibilităţile noastre de rezolvare, atunci şi problema iniţială este la fel de grea; dacă însă o problemă auxiliară mai ambiţioasă se dovedeşte inaccesibilă, aceasta nu înseamnă că şi perspectivele de rezolvare a problemei iniţiale sînt neapărat sumbre.)

Celelalte genuri de probleme auxiliare, chiar rezolvate, nu garantează rezolvarea completă a problemei inițiale, dar ne poate oferi, eventual, un *ajutor material.* O parte din soluția problemei auxiliare (sau chiar soluția în întregime) poate deveni o parte a soluției problemei inițiale, la rezolvarea căreia poate contribui cu o concluzie, cu o construcție, cu un fapt pe care se bazează o asemenea concluzie sau construcție și așa mai departe.

Dar chiar și atunci cînd ajutorul material nu este iminent, problema auxiliară poate interveni cu un *ajutor metodologic*; ea poate sugera o metodă de rezolvare, sau liniile mari ale rezolvării, sau direcția în care trebuie să începem să căutăm și așa mai departe. O problemă auxiliară analogă celei inițiale, dar mai ușor de rezolvat decît aceea, este — ca să spunem așa — „bine plasată" pentru a oferi un astfel de ajutor metodologic.

S-ar putea ca, *a posteriori*, să nu fim în stare să relevăm ce parte, sau ce aspect al soluției finale a problemei inițiale, a fost preluată dintr-o anumită problemă auxiliară; și totuși este perfect posibil ca *influența stimulantă* a acelei probleme să fi contribuit considerabil la descoperirea rezolvării problemei inițiale. Poate că problema aceea auxiliară, prin analogie sau prin contrast, a făcut problema inițială mai comprehensibilă, sau mai interesantă; sau poate că ne-a pus memoria în mișcare — a declanșat o succesiune de gînduri, de idei din care, în cele din urmă, a ieșit la iveală vreun fapt relevant, esențial pentru investigația noastră.

Problemele auxiliare ne pot ajuta și într-un alt mod, într-un mod mai subtil. A lucra la o problemă implică a lua decizii. Ne putem continua lucrul în două direcții, avem în față două căi, două drumuri, unul — spre dreapta, altul — spre stînga; pe care ar trebui să-l alegem? Care din ele este mai plauzibil că ne va conduce la soluție? Este foarte important să evaluăm rezonabil perspectivele, și în această privință, problemele auxiliare pot constitui o călăuză cu totul binevenită. Atenția acordată unei probleme auxiliare, efortul depus pentru rezolvarea ei, precum și experiența cîștigată prin aceasta, toate acestea la un loc și fiecare în partea au mari șanse să ne influențeze salutar discernămîntul.

Uneori ne putem ocupa de o problemă auxiliară pur și simplu pentru a cîștiga experiență, ca un *exercițiu*. Se poate întîmpla ca problema inițială să implice concepte cu care nu sîntem obișnuiți să lucrăm. Într-o asemenea situație, s-ar putea să fie indicat să încercăm să rezolvăm mai întîi o problemă mai ușoară, în care sînt implicate aceleași concepte, problemă care devine, în felul acesta, o problemă auxiliară (destul de îndepărtată) a problemei inițiale.

Deşi, potenţial, avem atît de multe şi de diferite lucruri de cîştigat, în practică, se întîmplă frecvent să constatăm că, ocupîndu-ne de o problemă auxiliară, am cîştigat puţin şi am cheltuit o groază de timp şi multă, multă osteneală. De aceea, înainte de a ne angaja foarte departe în rezolvarea unei asemenea probleme, trebuie să încercăm să cîntărim bine perspectivele şi să ne evaluăm judicios şansele.

EXEMPLE ŞI COMENTARII LA CAPITOLUL 9

9.1. *Surse „sigure" de probleme auxiliare?*

O problemă auxiliară poate să „apară spontan" din problema propusă. Dar se poate întîmpla ca tocmai cînd am dori mai mult să descoperim o problemă auxiliară care să ne stimuleze gîndirea, să nu ne vină nimic în minte. Într-o asemenea situaţie ne-ar plăcea să avem la dispoziţie o listă de surse „sigure" din care să putem extrage cu toată încrederea probleme auxiliare utile. Şi într-adevăr, există diferite procedee, sau metode, folosite curent cînd se caută probleme auxiliare; pe cele mai evidente, le vom examina în cele ce urmează: ele conduc efectiv, în majoritatea cazurilor, la unele probleme auxiliare, dar nu se poate garanta că vor conduce negreşit la probleme auxiliare utile.

Problemele auxiliare pot apărea în orice stadiu al procesului de rezolvare a problemei. Vom presupune, însă, că încă n-am depăşit decît cu foarte puţin faza incipientă. Am trecut de acum în revistă şi am înţeles bine părţile principale ale problemei de care ne ocupăm — necunoscuta, datele şi condiţia, sau ipoteza şi concluzia — precum şi subdiviziunile mai evidente (clauzele etc.) ale acestor părţi principale. Dar nu vedem încă nici un plan promiţător, şi am dori să ne propunem vreun obiectiv mai accesibil, sau mai stimulant. Or, este bine de ştiut că însăşi examinarea minuţioasă a părţilor principale ale problemei ne poate duce la descoperirea unui asemenea obiectiv, ne poate oferi o problemă auxiliară utilă. În cele ce urmează, vom trece în revistă cazurile cele mai demne de reţinut.

9.2. *Respice finem.* Dorinţa de a atinge un scop este o dorinţă „productivă", ea „naşte" gînduri, idei despre acţiuni care ar putea, eventual, să conducă la scopul urmărit. Scopul sugerează mijloacele. De aceea, „ai în vedere sfîrşitul", nu pierde nici o clipă din vedere scopul pe care-l urmăreşti; fiindcă el îţi călăuzeşte, îţi canalizează gîndirea.

Respice finem înseamnă (liber) „ţine seama de scop" şi era o frază curentă pe vremea cînd şi latina însăşi era folosită mai curent[6]. Hobbes dezvoltă ideea: „Priveşte necontenit la ceea ce ai vrea să ai, ca la ceea ce îţi călăuzeşte toate gîndurile pe calea spre a-l dobîndi"[7].

---

[6] Dintr-un hexametru medieval: *Quidquid agis prudenter agas et respice finem*: orice faci, fă cu prudenţă şi ai în vedere sfîrşitul.

[7] *Leviathan*, cap. III.

Gîndindu-ne intens la ceea ce urmărim, aşteptăm să ne vină în minte ideea unei acţiuni oportune, a unui mijloc adecvat. Pentru a scurta timpul de aşteptare, trebuie să înţelegem cu acuitate scopul, să-l înţelegem profund şi sub toate aspectele: *Ce urmărim? Ce tip de obiect căutăm? Care este necunoscuta? Care este concluzia?* Şi trebuie, de asemenea, să facem un efort hotărît pentru a evoca din memorie vrun mijloc adecvat: *Cum putem obţine acest tip de obiect? De unde putem obţine acest tip de obiect? În ce magazin putem cumpăra acest tip de obiect? Cum putem găsi o necunoscută de acest tip? Cum putem deduce o concluzie ca aceasta?*

Ultimele două întrebări se referă specific la problemele de matematică, una — la problemele de aflat, cealaltă — la problemele de demonstrat. Să examinăm separat aeste două cazuri.

(1) *Probleme de aflat.* Să considerăm, aşa cum am făcut şi în 9.4, o problemă semiconcretă: „Să se găsească volumul unei piramide, fiind date...". Necunoscuta — volumul unei piramide — este specificată, în timp ce condiţia şi datele rămîn neprecizate. *Cum putem găsi o necunoscută de acest tip?* Cum putem calcula volumul unei piramide? *Din ce date* putem obţine acest tip de necunoscută? Bineînţeles, problema propusă are date, dar necazul este că, cel puţin pentru un moment, din datele propuse nu putem deduce necunoscuta. Ceea ce vrem efectiv sînt nişte *date mai uşor de mînuit*; în fapt, noi vrem o altă problemă, şi anume o problemă mai accesibilă dar o problemă *cu aceeaşi necunoscută.*

Dacă reuşim să descoperim o astfel de problemă, noua situaţie pe care o avem în faţă poate fi de mai multe tipuri.

(2) *O problemă cu aceeaşi necunoscută, rezolvată anterior.* Dacă am fost atît de norocoşi încît ne-am amintit o astfel de problemă, putem merge mai departe alegînd *datele acelei probleme drept ţintă a unei probleme auxiliare.* Deseori, chiar foarte frecvent, procedeul acesta se dovedeşte util, eficient. Să-l ilustrăm pe exemplul nostru (semiconcret, menţionat mai înainte).

Necunoscuta problemei este volumul V al unei piramide. În problemele cele mai des întîlnite cu această necunoscută, datele sînt B — aria bazei şi h — înălţimea. Să presupunem că am găsit cîndva soluţia acestei binecunoscute probleme ($V = Bh/3$) şi că neam reamintit-o. Cum putem folosi această soluţie? Cel mai firesc este să încercăm să calculăm B şi h din datele problemei propuse (nerezolvate). Făcînd această tentativă, alegem pe B şi pe h drept (noi) ţinte: introducem două probleme auxiliare, necunoscuta uneia este B, necunoscuta celeilalte este h, iar datele, în ambele probleme, sînt tocmai datele problemei de care ne ocupăm. (Pentru un caz concret, vezi ex. 4.17, 4.18).

(3) Procedeul descris mai sus este deseori aplicabil şi nu puţine sînt cazurile în care el trebuie aplicat chiar *de mai multe ori la rînd* în cadrul aceleiaşi probleme.

Să notăm cu x necunoscuta iniţială, necunoscuta problemei propuse. Căutăm date uşor de mînuit şi remarcăm că l-am putea găsi pe x, dacă i-am avea pe y', y'', y''', ... (folosind soluţia unei probleme rezolvate anterior). Alegem pe y', y'' y''', ... drept noi ţinte pe care ne propunem să le atingem, drept necunoscute secundare. Observăm în continuare că pe y', y'',y''', ... i-am putea găsi dacă i-am avea pe z', z'' z''', ... (folosind

soluția cîtorva probleme rezolvate anterior), așa că introducem pe z', z'', z''', ... drept ținte, drept necunoscute terțiare; și așa mai departe. Procedăm deci *regresiv* (vezi 8.2).

Pentru a fi în măsură să aplicăm o asemenea procedură, trebuie să dispunem desigur de un stoc de probleme gata rezolvate (probleme simple, utilizabile în multe situații), și stocul acela trebuie să fie bine organizat și bine asortat (ex. 12.3).

(4) *O problemă cu aceeași necunoscută, dar încă nerezolvată.* Dacă ne amintim o asemenea problemă, o putem folosi ca punct de sprijin în rezolvarea problemei propuse: o introducem ca problemă auxiliară și încercăm s-o rezolvăm — și un asemenea procedeu se poate dovedi rentabil. De data aceasta însă perspectivele *-ceteris paribus* — sînt mai puțin favorabile decît în cazul (2). Într-adevăr, pentru a trage folos, pe calea cea mai evidentă, dintr-o astfel de problemă, trebuie, în primul rînd, s-o rezolvăm și, după aceea, trebuie, în plus, să fim în stare s-o folosim în maniera descrisă în (2).

(5) Dacă nu avem nici cea mai mică idee cum am putea găsi acel tip de necunoscută cu care este „opropsită" problema de care ne ocupăm — dacă nu izbutim nici să ne amintim o problemă cu același tip de necunoscută rezolvată anterior, nici să ne imaginăm vreuna nouă, mai ușor de mînuit — putem căuta o problemă cu un *tip similar de necunoscută.* De pildă, dacă avem de găsit volumul unei piramide și nu vedem nici o altă cale, putem încerca să ne amintim cum am găsit aria unui triunghi, și putem examina diferite moduri de abordare a acestei probleme, căutînd necontenit analogii sugestive.

(6) *Probleme de demonstrat.* Am putea repeta aici, cu foarte puține modificări, toate cele spuse mai înainte în legătură cu problemele de aflat, dar și o trecere în revistă mai rapidă va fi suficientă.

Și aici, este bine să pornim de la un exemplu semiconcret. Avem de demonstrat o teoremă de forma: „Dacă..., atunci unghiul este drept". Concluzia acestei propoziții este specificată: „unghiul este drept", însă ipoteza rămîne neprecizată. *Cum putem demonstra o asemenea concluzie? Din ce ipoteze putem deduce o astfel de concluzie?* Aceste întrebări ne incită să căutăm *o teoremă cu aceeași concluzie,* în care afirmația „unghiul este drept" este dedusă din alte ipoteze, mai ușor de mînuit.

Dacă am avut norocul să ne amintim *o teoremă demonstrată anterior, cu aceeași concluzie,* putem alege ipoteza ei drept *țintă* a unei probleme auxiliare: putem încerca să demonstrăm ipoteza teoremei pe care ne-am amintit-o, pornind de la ipoteza teoremei pe care încercăm s-o stabilim

Acest procedeu este deseori aplicabil. În multe cazuri, îl putem aplica *de mai multe ori la rînd* în cursul aceleiași demonstrații și putem descoperi demonstrația concluziei dorite lucrînd regresiv.

Dacă dăm de o teoremă care are aceeași concluzie ca cea a teoremei propuse, dar care nu este, nici ea, demonstrată, putem încerca s-o demonstrăm. Și un asemenea experiment se poate dovedi rentabil, însă perspectivele lui trebuie cîntărite cu grijă.

În fine, dacă nu reușim să ne amintim vreo teoremă cu aceeași concluzie, demonstrată anterior, și nici să ne imaginăm una nouă, dar mai ușor de mînuit, putem căuta o teoremă cu o *concluzie similară.*

(7) Oricare ar fi problema de care ne ocupăm, este dinainte sigur că la rezolvarea ei va trebui să folosim unele din cunoştinţele dobîndite anterior. Dar nu putem prezice cu certitudine *care* sînt elementele din cunoştinţele acumulate pe care va trebui să reuşim să le utilizăm — mai ales dacă problema noastră este dificilă. Orice problemă rezolvată anterior, orice teoremă demonstrată anterior s-ar putea să se dovedească utilizabilă, mai ales dacă are unele puncte de contact cu problema care ne preocupă acum — dar, evident, n-avem timp să le examinăm, la rînd, pe toate. Discuţia de mai sus ne canalizează atenţia spre punctul de contact cu şansele cele mai mari: dacă avem o problemă „de aflat", probabilitate mai mare de a se dovedi utilizabile au *probleme cu acelaşi tip de necunoscută, rezolvate anterior*; iar dacă avem o problemă „de demonstrat" — *teoremele cu aceeaşi concluzie, demonstrate anterior.* Prin urmare, întrebările: *Cum putem găsi acest tip de nescunoscută? Cum putem demonstra o astfel de concluzie?* trebuie să se bucure de prioritate absolută.

9.3. *Suprimarea, sau adăugarea, unei clauze.* Cînd rezolvarea progresează lent, sau nu progresează de loc, devii nerăbdător şi ai vrea să te ocupi de o altă problemă. De aceea, este bine să fii avizat de modificările problemei care conduc la probleme înrudite a căror considerare are şanse să se dovedească utilă. Iată o listă a modificărilor cele mai evidente de acest tip.

Probleme de aflat:

(1) Suprimarea unei clauze a condiţiei.

(2) Adăugarea la condiţie a unei noi clauze.

Modificarea (1) face condiţia *mai largă*, (2) o face *mai îngustă, mai exigentă.*

Probleme de demonstrat:

(1) Suprimarea unei presupuneri din ipoteză.

(2) Adăugarea la ipoteză a unei noi presupuneri.

(3) Suprimarea unei afirmaţii din concluzie.

(4) Adăugarea la condiţie a unei noi afirmaţii.

Atît (1) cît şi (4) fac teorema *mai puternică*, (2) sau (3) o fac *mai slabă.*

Efectele acestei modificări sînt discutate în ex. 9.4 şi 9.5.

9.4. *Lărgirea, sau îngustarea, condiţiei.* Considerăm două condiţii, $A(x)$ şi $B(x)$, referitoare la obiecte x de aceeaşi categorie. Spunem că $A(x)$ este „mai îngustă" decît $B(x)$, sau (ceea ce este acelaşi lucru) că $B(x)$ este „mai largă" decît $A(x)$ dacă — şi numai dacă — orice obiect care satisface $A(x)$, satisface în mod necesar şi $B(x)$. (Folosim deci aceşti termeni în sensul „incluziunii" din teoria mulţimilor, vezi ex. 1.51; în fiecare din termenii „mai îngust", „mai larg" este inclus şi cazul în care $A(x)$ şi $B(x)$ au exact aceeaşi sferă de cuprindere.)

(1) *Lărgirea condiţiei* înseamnă trecerea de la problema propusă la o altă problemă care are condiţia mai largă decît cea propusă. Cititorul îşi dă, probabil, seama că în capitolele precedente am recurs foarte frecvent la această operaţie (bineînţeles, fără s-o descriem în exact aceşti termeni). De pildă, într-o problemă de construcţie geometrică formulată (sau reformulată) convenabil, condiţia se referă la un punct; obţinem un loc

geometric pentru acel punct *reținînd numai o parte a condiției* și suprimînd restul, adică lărgind condiția. Sau, construind o ecuație a unui sistem de ecuații cu mai multe necunoscute, ținem seama numai de o parte (cerință, clauză, stipulație ...) a condiției complete, ceea ce înseamnă, de fapt, lărgirea condiției.

Lărgirea condiției este, fără îndoială, utilă dacă reușim să realizăm două lucruri. În primul rînd, trebuie să reușim să găsim (descriem, enumerăm ...) mulțimea formată din toate obiectele care satisfac condiția mai largă. În al doilea rînd, trebuie să reușim să eliminăm din această mulțime acele obiecte care nu satisfac condiția inițială. Cititorul își dă seama, cred, *cum* sînt atinse aceste două obiective în schema celor două locuri geometrice ; ar trebui, de asemenea, să revadă 6.3(3), precum și unele exemple și comentarii referitoare la jocurile distractive (vezi și ex. 6.21).

Dar lărgirea condiției poate fi utilă și într-un alt mod, fapt de care cititorul familiarizat cu schema carteziană își poate da seama foarte ușor.

(2) *Îngustarea condiției* înseamnă trecerea de la problema propusă la o altă problemă care are o condiție mai îngustă, mai exigentă decît cea propusă. La nivelul la care ne menținem de regulă nu avem prea multe ocazii să folosim acest procedeu, dar iată totuși un exemplu.

Avem de rezolvat ecuația

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

de grad n destul de înalt, ai cărei coeficienți $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere întregi. Este indicat să începem prin a căuta rădăcini întregi. De fapt, impunînd lui x clauza suplimentară că trebuie să fie un număr întreg, îngustăm condiția, o facem mai exigentă. Însă căutarea rădăcinilor întregi (ele — *dacă* există — trebuie să fie divizori ai ultimului coeficient, a_n) este relativ ușoară, și dacă reușim să găsim o astfel de rădăcină, putem micșora gradul ecuației propuse și în felul acesta, ne ușurăm căutarea celorlalte rădăcini. (Pentru un caz concret, vezi ex. 2.31.).

9.5. *Examinarea unei teoreme mai puternice, sau a unei teoreme mai puțin puternice.* Considerăm două propoziții clar formulate A și B. Dacă știm că A decurge din B (dacă putem deduce pe A, presupunînd că B este adevărată) spunem că A este mai slabă, mai puțin puternică, decît B și (ceea ce înseamnă același lucru) că B este mai puternic decît A. Această relație între A și B devine deosebit de interesantă cînd nu putem nici să demonstrăm sau să infirmăm pe A, nici să demonstrăm sau infirmăm pe B.

(1) *Examinarea unui temei posibil de veridicitate.* Vrem să demonstrăm că două mărimi date sînt inegale. De pildă, vrem să demonstrăm teorema A care afirmă că

$$e < \pi.$$

Am avut norocul să observăm (sau să descoperim) o a treia mărime cu care poate fi comparată comod fiecare din cele două mărimi date. În exemplul nostru, atît e cît și π pot fi comparate comod cu numărul foarte simplu 3. Prin urmare, pentru a stabili A, considerăm teorema B care afirmă că

$$e < 3 \quad \text{și} \quad 3 < \pi.$$

Evident, A decurge imediat din B. Propoziția nou introdusă B afirmă mai mult, așa că este mai puternică decît propoziția A, a cărei demonstrare constituia problema noastră inițială.

De remarcat că dacă avem de demonstrat o inegalitate între două numere iraționale, sîntem aproape obligați să procedăm așa cum am făcut în exemplul nostru: trebuie să descoperim un număr rațional care „separă" cele două numere iraționale. Procedînd astfel, reducem propoziția inițială la o alta, mai puternică, ca în exemplul nostru; descoperirea numărului rațional cuprins între cele două numere iraționale face noua propoziție mai puternică.

În cercetările de nivel superior, situații de felul acesta intervin la tot pasul: pentru a demonstra o teoremă propusă A, trebuie să imaginăm o teoremă mai puternică B din care A „decurge", dar care, din anumite motive, este mai ușor de mînuit decît A. Demonstrînd pe B, automat prezentăm un „temei", o „rațiune", pentru verdicitatea lui A. Bineînțeles, cînd căutăm să descoperim o teoremă B din care A „decurge", nu știm încă dacă vom fi sau nu în stare să demonstrăm pe B, nu știm încă dacă B este sau nu adevărată. De aceea, pentru un moment, o asemenea propoziție B (din care A decurge) nu constituie încă un „temei" pentru veridicitatea propoziției A propusă, ci este doar un „temei posibil", o „rațiune posibilă". Totuși, examinarea lui B — a acestui „temei posibil" pentru A — poate fi o operație oportună utilă.

(1) *Examinarea unei consecințe.* Vrem să demonstrăm că două mărimi sînt egale. De pildă, notînd cu S suprafața sferei de rază r, vrem să demonstrăm teorema A care afirmă că

$$S = 4\pi r^2.$$

S-ar putea să fie util să începem prin a încerca să demonstrăm mai puțin, și anume să începem cu o teoremă B care afirmă că

$$S \leqslant 4\pi r^2.$$

(B ar putea fi, eventual, demonstrată aproximînd sfera printr-un poliedru circumscris.) În orice caz, B decurge în mod evident din A, B este o consecință a lui A, teorema B este mai slabă decît teorema A.

Demonstrarea teoremei mai slabe B s-ar putea însă să ne conducă, în cele din urmă, la demonstrarea teoremei A. Într-adevăr, considerațiile folosite pentru a demonstra pe B s-ar putea să ne sugereze, eventual, o demonstrație pentru o altă teoremă mai slabă, o demonstrație pentru inegalitatea contrară

$$S \geqslant 4\pi r^2$$

(trecînd, eventual, de la poliedrul circumscris, la poliedrul înscris). Or, din combinarea celor două teoreme mai slabe, ar decurge (imediat și riguros) teorema inițială A.

Situații de felul acesta survin la tot pasul în cercetările de nivel superior.

Dacă nu reușim să demonstrăm o teoremă propusă A, imaginăm o teoremă mai slabă, B, pe care o putem demonstra. După aceea, încercăm să ne aranjăm în așa fel

încît să folosim teorema B ca un fel de trambulină, şi mulţumită elanului căpătat de la B, să ajungem la A. Aşa ceva se poate întîmpla şi cînd este vorba de teoreme cu totul elementare. De pildă, putem ajunge la o teoremă A care se ocupă de cazul general, demonstrînd mai întîi o teoremă mai slabă, B, care se ocupă de un caz particular, şi folosind apoi pe B drept trambulină.

Cunoaşteţi vreun exemplu?

9.6. Fie m şi n doi întregi pozitivi, $m > n$. Comparaţi între ele următoarele probleme:

A. Să se găsească divizorii comuni ai lui m şi n.

B. Să se găsească divizorii comuni ai lui n şi $m-n$.

Care este relaţia logică dintre A şi B?

Dacă vi se cere să rezolvaţi A, vedeţi vreun avantaj în trecerea de la A la B?

Folosiţi această sugestie pentru a găsi divizorii comuni ai numerelor 437 şi 323.

† **9.7.** Comparaţi între ele următoarele probleme:

A. Să se găsească maximul funcţiei $f(x)$.

B. Să se găsească abscisa x în care $f'(x)$ (derivata lui $f(x)$) se anulează.

Care este relaţia logică între A şi B?

Vedeţi vreun avantaj în trecerea de la A la B?

9.8. Considerăm un triunghi şi introducem notaţiile:

O — centrul cercului circumscris

G — centrul de greutate

E — punctul de pe dreapta care trece prin O şi G (dreapta lui Euler) pentru care $2\,OG = GE$ (G este între O şi E).

Considerăm următoarele două teoreme:

A. Cele trei înălţimi ale triunghiului trece printr-un acelaşi punct.

B. Cele trei înălţimi ale triunghiului trec prin punctul E.

Care este relaţia logică între A şi B?

Vedeţi vreun avantaj în trecerea de la A la B?

Demonstraţi B.

† **9.9.** Comparaţi între ele următoarele două probleme (rădăcinile pătrate sînt luate cu semnul plus):

A. Să se demonstreze că

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = 0.$$

B. Fiind dat un număr pozitiv ε, să se găsească valorile pozitive ale lui x pentru care

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \varepsilon.$$

Care este relaţia logică între A şi B?

Vedeţi vreun avantaj în trecerea de la A la B?

Rezolvaţi B.

9.10. Comparați între ele următoarele două probleme (n reprezintă un întreg pozitiv):

A. Să se demonstreze (sau să se infirme) propoziția: Dacă $2^n - 1$ este număr prim, n trebuie să fie număr prim.

B. Să se demonstreze (sau să se infirme) propoziția: Dacă n este număr compus ($=$ neprim), $2^n - 1$ trebuie să fie număr compus (neprim).

Care este relația logică dintre A și B?

Vedeți vreun avantaj în trecerea de la A la B?

Rezolvați B.

9.11. *Căutarea unui contraexemplu.* Un *contraexemplu* distruge o afirmație presupusă aplicabilă tuturor obiectele de o anumită categorie: contraexemplu este un obiect din categoria vizată, la care afirmația pretins-generală *nu* se aplică. Căutarea contraexemplelor are cîteva particularități interesante pe care va trebui să le discutăm, cu toate că, pentru a le ilustra suficient de instructiv, vom fi obligați să depășim puțin nivelul la care ne-am menținut de regulă.

† (1) *O problemă de demonstrat.* Să se demonstreze, sau să se infirme, următoarea afirmație:

Dacă seria infinită, cu termeni reali, $a_1, a_2, a_3 + \ldots$ *este convergentă, seria infinită* $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots$ *este și ea convergentă.*

După eforturi mai mult sau mai puțin îndelungate de a demonstra afirmația, s-ar putea să ajungem la bănuiala că afirmația propusă este falsă, și atunci încercăm să o „dărîmăm" printr-un contraexemplu.

† (2) *O problemă de aflat, ca problemă auxiliară la o problemă de demonstrat.* Căutăm un contraexemplu, adică un șir infinit care satisface ipoteza, dar *nu* și concluzia afirmației propuse la punctul (1). Ceea ce ne propunem atunci este, de fapt, o problemă de aflat. Să vedem care sînt părțile ei principale.

Care este necunoscuta? — Un șir infinit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de numere reale.

Care este condiția? — Ea constă din două clauze:

(I) seria $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ este convergentă

(II) seria $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 \ldots$ este divergentă.

De reținut că această problemă de aflat apare ca o problemă auxiliară la o problemă de demonstrat.

3) *Ni se cere să găsim UN obiect* (oarecare) *care satisface condiția.* La nivelul elementar, de obicei nu se cere să găsim *toate* soluțiile, *toate* obiectele care satisfac condiția problemei. Însă în cazul de față, este suficient să găsim *o* soluție, *un singur* asemenea obiect; un singur contraexemplu este suficient pentru a da peste cap afirmația pretins-generală.

Această situație, diferită de cea obișnuită, poate cere și o strategie diferită. Leibniz[8] ține să ne facă o anumită recomandare: „Se poate să se ceară toate soluțiile, sau numai unele (cîteva) dintre ele. Dacă se cere numai o soluție oarecare, trebuie să inventăm

[8] *Opuscules et fragments inédits*, p.166.

condiții suplimentare compatibile cu condițiile inițiale, care [condiții inițiale], deseori cer multă dibăcie [pentru a fi satisfăcute]".

(4) *Îngustarea condiției.* Trecem în revistă serii convergente care satisfac clauza (I) a condiției, sperînd să dăm peste o serie care satisface și clauza (II). Este firesc să începem căutînd mai întîi printre cazurile cele mai simple și mai familiare.

Astfel, ne putem gîndi mai întîi la serii convergente cu termeni a_n pozitivi. Însă într-o asemenea serie, $a_n < 1$ cînd n este mare, și deci $a_n^3 < a_n$, așa că seriile cu termenul general a_n^3 sînt și ele convergente; clauza (II) nu este îndeplinită. Trebuie să examinăm serii convergente cu termeni și pozitivi și negativi.

Aici, cazul cel mai familiar este cel al seriilor alternate, în care semnele termenilor formează succesiunea

$$+ - + - \quad + - + - + - \ldots$$

Dacă termenii a_n ai unei asemenea serii scad continuu spre 0, în valoare absolută, seria este convergentă — dar atunci și termenii a_n^3 se comportă la fel, ei formează o serie convergentă, și din nou clauza (II) nu este îndeplinită. Și în felul acesta, sîntem nevoiți să trecem la domenii mai puțin familiare.

Deoarece nu ne surîde de loc ideea de a ne aventura prea departe de cele binecunoscute, ne-ar putea veni în minte ideea de a impune o restricție, o clauză suplimentară:

(III) semnele termenilor a_n trebuie să formeze succesiunea

$$+ - - + - - + - - + - - \ldots .$$

Dar chiar după suplimentarea clauzelor (I) și (II) cu clauza (III), rămîne încă o marjă largă de incertitudine și de alegere arbitrară; ceea ce ne poate da ideea să mai impunem o restricție (de fapt, o restricție nu foarte precis formulată):

(IV) seria $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots$ trebuie să fie divergentă în maniera seriei binecunoscute

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Clauzele suplimentare (III) și (IV) pe care singuri ni le-am impus *îngustează condiția*, și chiar o îngustează considerabil (vezi ex. 9.4). Ele pot canaliza căutarea unui contraexemplu, dar o pot și îngreuia. După părerea mea, ele ajută mai mult decît îngreuiază, dar cititorul trebuie să încerce să găsească singur un contraexemplu, și să-și formeze propria sa opinie.

(5) *Procedeul alternant.* Cred că momentul este oportun pentru a atrage atenția asupra unui procedeu cu care trebuie să fie familiarizat oricine vrea să capete o oarecare abilitate în rezolvarea problemelor de demonstrat. (La nivelul școlii medii, nu se ivesc — de regulă — prea multe ocazii de a căpăta sau de a pune în practică o asemenea abilitate.)

Într-o problemă de demonstrat este vorba de o afirmație clar formulată, A, despre care nu știm dacă este adevărată sau falsă: sîntem în dubiu. Scopul pe care-l propune

problema (ceea ce se cere) este să se înlăture acest dubiu, să se demonstreze A, sau să se infirme A.

Uneori reuşim să elaborăm un mod de abordare care poate funcţiona la fel de bine atît într-o direcţie, cît şi în cealaltă, care ne duce mai aproape de demonstrare sau de infirmare oricare ar fi „pisica din sac", şi, în felul acesta, se apropie de rezolvare, oricare ar fi situaţia de fapt. Însă asemenea moduri de abordare sînt rare. Şi dacă n-am avut norocul să descoperim unul, avem de luat o decizie: cum este mai bine de procedat — trebuie să încercăm să demonstrăm afirmaţia A, sau trebuie să încercăm s-o infirmăm? Aici avem de ales între două orientări diferite. Pentru a demonstra A, trebuie să căutăm propoziţii din care, sau strategii prin care, am putea deduce afirmaţia A. Pentru a infirma A, trebuie să căutăm un contraexemplu.

Un procedeu judicios este să lucrăm alternativ, cînd într-o direcţie, cînd în cealaltă. Cînd speranţa de a reuşi într-o direcţie începe să ne părăsească, sau cînd am obosit (sau ne-am plictisit) lucrînd în acea direcţie, abordăm cealaltă direcţie, pregătiţi însă să revenim, la nevoie, asupra acestei decizii şi să reluăm lucrul în prima direcţie; şi în felul acesta, învăţînd necontenit cîte ceva din ceea ce realizăm lucrînd dintr-o direcţie şi în cealaltă, s-ar putea, în cele din urmă, să reuşim ...

6) Există şi o variantă mai sofisticată a acestui procedeu alternant, care se poate dovedi absolut necesară în cazuri mai dificile şi cu care se poate atinge obiective mai pretenţioase.

Dacă nu reuşim să demonstrăm afirmaţia propusă A, putem încerca să demonstrăm, în locul ei, o afirmaţie mai slabă (mizînd pe faptul că avem mai multe şanse să o demonstrăm); iar dacă nu putem infirma afirmaţia propusă, putem încerca să infirmăm, în locul ei, o propoziţie mai puternică (în ideea că avem mai multe şanse de a descoperi o infirmare). Dacă *reuşim să demonstrăm* o propoziţie P (mai slabă decît A), încercăm în continuare *să infirmăm* o propoziţie (convenabil aleasă) mai puternică decît P. Iar dacă *reuşim să infirmăm* o propoziţie P (mai puternică decît A), încercăm în continuare *să demonstrăm* o propoziţie (convenabil aleasă) mai slabă decît P. Mergînd spre propoziţia propusă A din ambele direcţii, s-ar putea să reuşim, în cele din urmă, să demonstrăm pe A. Sau, putem merge mai departe de A, şi, *fie* demonstrăm o propoziţie mai puternică decît A, *fie* reuşim să infirmăm A salvînd totuşi o parte din ea, demonstrînd o propoziţie mai slabă decît A.

În felul acesta, lucrînd alternativ la demonstraţii şi la contraexemple, putem ajunge la o cunoaştere mai completă a faptelor. Putem descoperi o teoremă despre care ştim nu numai că este adevărată (am demonstrat-o), ci şi că nu este de loc simplă de ameliorat (am infirmat teoreme mai exigente). Cele de mai sus ne dau o idee sumară despre rolul demonstraţiilor în constituirea unei ştiinţe. (Cf. G. Pólya şi G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, vol. I, p. VII; de asemenea, *MRP*, vol. I, p. 147, ex. 14).

(7) Pentru alte variante de mai mare subtilitate, pentru exemple istorice pregnante şi rezonanţe filozofice ale procedeului alternant discutat, vezi lucrarea lui I. Lakatos citată în Bibliografie.

9.12. *Particularizarea şi generalizarea* sînt surse importante de probleme auxiliare utile.

Să luăm drept exemplu o problemă din teoria numerelor. Vrem să studiem *numărul de divizori* ai unui întreg pozitiv n, şi introducem pentru el notaţia $\tau(n)$. De exemplu (în momentul acesta *particularizăm*), 12 are 6 divizori: 1, 2, 3, 4, 6 şi 12 şi deci, $\tau(12) = 6$; am numărat aici şi „divizorii banali" ai lui 12, pe 1 şi pe 12, şi vom proceda la fel pentru orice n.

O cale de a *particulariza* constă în a considera numere izolate, observînd, de pildă, că $\tau(30) = 8$. Sau, putem consemna sistematic valorile lui $\tau(n)$ pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$ construind un tabel care „începe" în felul următor:

$$\begin{aligned} \tau(1) &= 1 & \tau(6) &= 4 \\ \tau(2) &= 2 & \tau(7) &= 2 \\ \tau(3) &= 2 & \tau(8) &= 4 \\ \tau(4) &= 3 & \tau(9) &= 3 \\ \tau(5) &= 2 & \tau(10) &= 4 \end{aligned}$$

O altă cale de a particulariza problema constă în a considera anumite *clase* de numere. Dacă p este număr prim, atunci

$$\tau(p) = 2, \qquad \tau(p^2) = 3, \qquad \tau(p^3) = 4$$

şi acum, *generalizînd*, putem găsi răspunsul pentru orice putere a lui p:

$$\tau(p^a) = a + 1.$$

Dacă p şi q sînt numere prime diferite, pq are numai patru divizori, $1, p, q$ şi pq, aşa că

$$\tau(pq) = 4.$$

În continuare, putem considera produsul a trei numere prime şi aşa mai departe. Generalizînd, putem încerca să găsim $\tau(n)$, cînd $n = p_1 p_2 \ldots p_l$ este produsul a l numere prime diferite. Şi tot aşa, cînd particularizînd, cînd, din nou, generalizînd, putem descoperi o expresie generală pentru $\tau(n)$. (Găsiţi-o!)

Cam de tipul acesta sînt căile descoperirii nu numai în teoria numerelor (a numerelor întregi şi pozitive), ci şi în alte ramuri ale matematicii, şi în ştiinţă în general. Particularizînd, încercăm să delimităm, să izolăm o parte mai tangibilă, mai accesibilă a problemei; generalizînd, încercăm să extindem ceea ce am reuşit să stabilim investigînd un domeniu restrîns[9].

9.13. *Analogia* este o altă sursă fertilă de descoperiri. În cazurile simple, putem copia practic pas cu pas rezolvarea unei probleme evident analoge. În cazurile mai delicate, o eventuală analogie mai subtilă s-ar putea să nu ne dea un ajutor material imediat, dar ne poate indica direcţia în care ar trebui să lucrăm.

---

[9] Vezi *CRP*, „Generalizarea", pp. 106—107, „Particularizarea", pp. 148—153; şi *MRP*, cap. II *et passim*.

Utilizările analogiei sînt de o varietate inepuizabilă; ele sînt ilustrate de numeroase exemple din capitolele precedente (şi din cele care urmează). Vom cita numai unul [vezi 1.6(3)]. Problema cere să se construiască un unghi dintr-un triunghi sferic ale cărui trei laturi sînt date. Construcţia foloseşte, ca problemă auxiliară, problema analogă din geometria plană; să se construiască un unghi dintr-un triunghi obişnuit ale cărui laturi sînt date.

Amintiţi-vă cîteva alte perechi de probleme analoge.

Există însă, aşa cum am mai menţionat, încă multe alte moduri de a folosi analogia[10].

9.14. ***Şi dacă nu reuşim?*** Speranţele cu care pornim la un drum abordînd o problemă auxiliară ne pot fi înşelate: tentativa noastră poate eşua. Aceasta nu înseamnă automat că timpul şi efortul cheltuit cu problema auxiliară au fost irosite în zadar: putem învăţa cîte ceva şi dintr-un eşec.

Vrem să demonstrăm teorema A. Remarcăm o teoremă B mai puternică din care A decurge. Începem să studiem B — dacă reuşim să demonstrăm B, atunci şi A va fi automat demonstrată. Constatăm însă că B este falsă. Desigur, constatarea ne dezamăgeşte, dar experienţa căpătată cu B s-ar putea să ne ducă la o mai judicioasă evaluare a perspectivelor lui A.

Sau: vrem să demonstrăm teorema A. Remarcăm teorema B, o consecinţă a lui A, care pare mai uşor de demonstrat decît A. Încercăm să demonstrăm B — dacă am reuşi să demonstrăm B, am putea-o folosi ca punct de sprijin în demonstrarea lui A. Reuşim, efectiv, să demonstrăm B, dar toate tentativele noastre de a-l folosi pe B ca punct de sprijin în demonstrarea lui A eşuează. Faptul, desigur, ne dezamăgeşte, dar experienţa cîştigată cu B ne poate duce la o mai bună evaluare a prespectivelor lui A.

9.15. ***Alte probleme.*** Observînd că o problemă auxiliară v-a fost de folos în rezolvarea unei probleme, încercaţi să înţelegeţi de ce v-a fost de folos şi cum aţi ajuns la acea problemă auxiliară.

De ce? Clarificaţi relaţia dintre problema iniţială şi problema auxiliară (vezi ex. 9.6 — 9.10).

Cum aţi ajuns la ea? Problema auxiliară a fost, sau ar fi putut fi, sugerată de o rezolvare regresivă (procedeu descendent), de o generalizare, de o particularizare, sau de o analogie? Sau a existat vreo altă origine, mai puţin obişnuită?

---

10 Vezi *CRP*, „Analogia", — *pp.* 57—64 şi *MRP*, cap. II *et passim.*

11 Cf. *MRP*, mai ales vol. II, pp. 24—26.

CAPITOLUL 10

Naşterea ideii

Un fulger îmi străpunse biata minte şi-ntr-însul vrerea mea fu-ndestulată.
Dante, *Paradisul*, Cîntul XXXIII[1].

10.1. ŞI DINTR-O DATĂ – LUMINĂ...

Soluţia unei probleme poate surveni cît se poate de brusc. După ce-ai „rumegat" îndelung o problemă şi fără nici un progres aparent îţi „fulgeră" dintr-o dată în minte o idee strălucită, o sclipire de inspiraţie, şi parcă ţi se face lumină în faţa ochilor. Este ca şi cum ai intra, noaptea tîrziu, într-o cameră necunoscută de hotel, şi n-ai şti nici măcar unde este întrerupătorul: bîjbîi într-o cameră cufundată în întuneric, percepi confuz nişte forme întunecoase, pipăi ici o mobilă, colo o alta, şi cauţi, cauţi mereu — încerci să dibui pe undeva întrerupătorul; şi în clipa cînd l-ai găsit şi ai aprins lumina, totul devine dintr-o dată clar. Masele pînă atunci confuze capătă contururi distincte, forme binecunoscute, şi vezi că totul este la locul lui şi perfect adaptat unei funcţionalităţi evidente.

Cam de această natură poate fi şi experienţa pe care o trăieşti cînd rezolvi o problemă: o clarificare fulgerătoare care face lumină, care ordonează, structurează şi dă scop unor detalii care păreau pînă atunci obscure, confuze, haotice şi fără nici o semnificaţie.

Dar în acest domeniu, o fărîmă de experienţă este mai de folos decît un noian de descrieri; şi pentru a ne apropia cît mai mult de experienţa fiecăruia, ar trebui să trecem la un exemplu concret. Exem-

[1] Traducere de Eta Boeriu, Ed. pentru Literatură Universală, Bucureşti, 1965, — *N.T.*

plele foarte elementare de matematică sînt, poate, cele mai potrivite pentru a ne face să simţim efortul, suspensul şi plăcerea unei descoperiri, şi pentru „a ne obişnui ochii să vadă adevărul clar şi distinct". (Ultima frază este împrumutată de la Descartes).

10.2. EXEMPLU

Îmi iau libertatea să fac cu cititorul o mică experienţă. Voi enunţa o teoremă simplă, dar nu prea banală, de geometrie şi după aceea, voi încerca să reconstitui succesiunea ideilor care conduc la demonstrarea ei. Voi proceda fără grabă, chiar foarte lent, revelînd indiciile unul după altul, şi pe fiecare în parte — nu dintr-o dată, ci treptat. Am credinţa că cititorul va sesiza ideea principală încă înainte ca eu să-mi fi terminat povestea (dacă, bineînţeles, nu-l va împiedica cine ştie ce circumstanţă stînjenitoare). Totuşi, ideea principală este destul de neaşteptată, aşa că cititorul va putea „trăi" pe viu plăcerea unei mici descoperiri.

A. *Dacă trei cercuri de aceeaşi rază trec printr-un punct, atunci şi cercul care trece prin celelalte trei puncte de intersecţie are aceeaşi rază.*

Aceasta este teorema pe care o avem de demonstrat. Enunţul este scurt şi clar, dar nu prezintă detaliile suficient de distinct. Dacă *desenăm o figură* (fig. 10.1) şi *introducem notaţii convenabile*, ajungem la următoarea reformulare mai explicită:

B. Trei cercuri, k, l şi m, au aceeaşi rază r şi trec prin acelaşi punct O. În plus, l şi m se intersectează în punctul A, m şi k — în punctul B, k şi l — în punctul C. În aceste condiţii, cercul e care trece prin A, B şi C are, şi el, raza r.

Fig. 10.1 înfăţişează cele patru cercuri, k, l, m şi e, şi cele patru puncte de intersecţie A, B, C şi O. Figura aceasta nu este însă de natură să ne satisfacă, fiindcă nu este simplă şi (totuşi!) este încă incompletă; din ea s-ar părea că lipseşte ceva; am omis — se pare — să ţinem seama de ceva esenţial.

Avem de-a face cu cercuri. Ce este un cerc? Un cerc este determinat de centru şi de rază; toate punctele lui sînt la aceeaşi distanţă, măsurată de lungimea razei, faţă de centru. Am omis să introducem raza comună r, şi, prin urmare, am omis *să ţinem seama de o parte esenţială a ipotezei.* Să introducem, de aceea, centrele K la cercul k, L la cercul l, şi M la cercul m. Unde anume ar trebui să punem în evidenţă raza r? După toate aparenţele, ne-avem nici un motiv să dăm preferinţă vreunuia dintre cele trei cercuri, k, l şi m, sau vreunuia din cele trei puncte de intersecţie A, B şi C; ceea ce ne determină

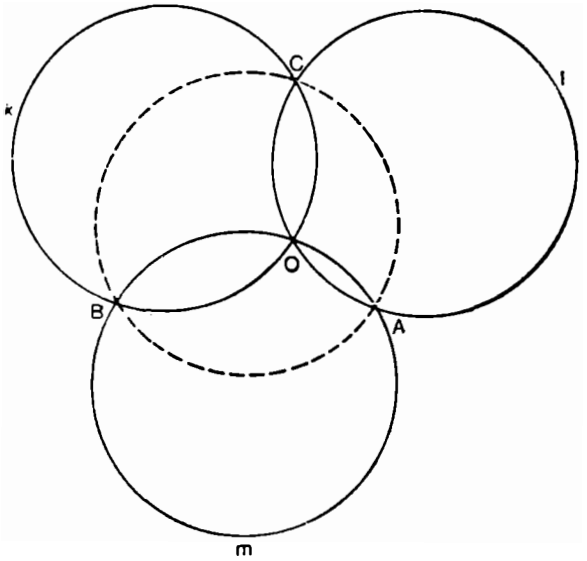


Fig. 10.1. Trei cercuri printr-un punct

să unim toate cele trei centre cu toate cele trei puncte de intersecţie ale cercului respectiv: K cu B, C şi O şi aşa mai departe.

Figura care rezultă (fig. 10.2) este descumpănitor de încîlcită: sînt pe ea atît de multe „linii" — drepte şi cercuri, încît ne vine foarte greu s-o „vedem" în mod satisfăcător: figura „nu vrea să stea liniştită". Ea seamănă cu anumite desene din revistele de modă veche. Desenul ca atare nu are o interpretare univocă: dacă-l priveşti în modul obişnuit, el îţi reprezintă o anumită figură, dar dacă îl roteşti într-o anumită poziţie şi-l priveşti într-un anumit mod special, vezi dintr-o dată altceva, îţi sare în ochi o altă figură, care-ţi sugerează unele comentarii, mai mult sau mai puţin ingenioase, în legătură cu prima figură. Dumneavoastră puteţi sesiza în această figură deconcertantă, supraîncărcată cu segmente şi cercuri, o a doua figură comprehensibilă, o figură căreia să-i puteţi atribui o anumită semnificaţie?

. . . . . .

S-ar putea să descoperim într-o clipă figura corectă, ascunsă în desenul acesta supraîncărcat, sau s-ar putea s-o identificăm numai treptat. Putem ajunge la ea conduşi de logica efortului de rezolvare, dar şi de vreo împrejurare fortuită, secundară, neesenţială. De pildă,

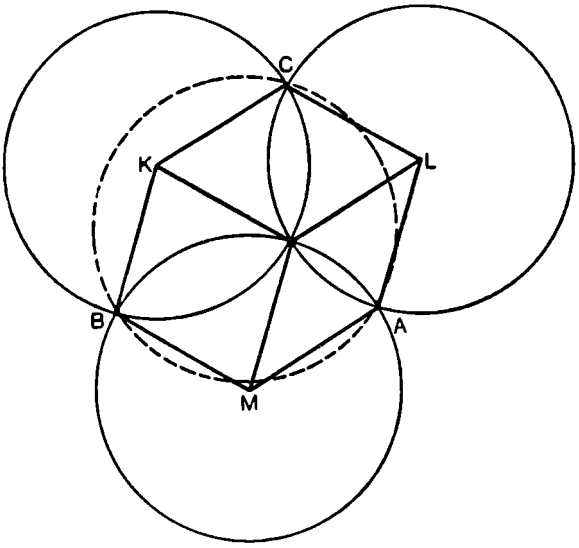


Fig. 10.2. Prea încîlcită

dacă ne punem problema să redesenăm această figură care nu ne nesatisface, s-ar putea să sesizăm că *întreaga* figură este complet determinată de *detaliile ei rectilinii* (fig. 10.3).

Această observaţie pare să fie semnificativă. Ea simplifică, în mod cert, tabloul geometric, şi nu-i exclus să uşureze şi conjuncturа logică ; ceea ce ne determină să reformulăm teorema propusă în felul următor :

C. *Dacă cele nouă segmente* (din fig. 10.3)

$$KO, \qquad KC, \qquad KB,$$
$$LC, \qquad LO, \qquad LA,$$
$$MB, \qquad MA, \qquad MO,$$

sînt, toate, de lungime r, atunci există un punct E, astfel încît cele trei segmente

$$EA, \quad EB, \quad EC,$$

să fie, şi ele, de lungime r.

Această formulare ne concentrează atenţia asupra fig. 10.3 : este o figură atrăgătoare şi ne aminteşte ceva foarte familiar. (Ce anume ?)

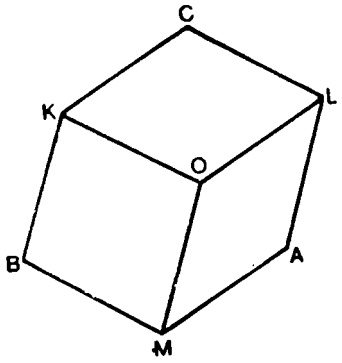


Fig. 10.3. Asta ne amintește — ce?

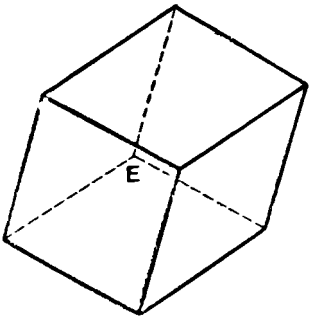


Fig. 10.4. Desigur!

Exact! — anumite patrulatere din fig. 10.3, cum este, de pildă patrulaterul *OLAM*, au, prin ipoteză, toate laturile egale, ele sînromburi. Rombul este un „obiect" familiar: descoperindu-i prezența, putem „vedea" figura mai bine. (Ce ne amintește figura *în ansamblu*?)

Într-un romb, laturile opuse sînt paralele. Insistînd asupra acestei observații, ne dăm seama că cele nouă segmente din fig. 10.3 sînt de fapt de trei tipuri; segmentele de același tip, cum sînt *AL*, *MO* și *BK*, sînt paralele între ele. (Ce ne amintește *acum* figura?)

Să nu uităm concluzia la care ni se cere să ajungem. Să presupunem că concluzia este corectă. Dacă introducem în figură centrul *E* al cercului *e*, și cele trei raze respective, cu extremitățile în *A*, *B* și *C*, obținem (așa decurge din presupunerea făcută) și mai multe romburi, și mai multe segmente paralele (vezi fig. 10.4). (Ce ne amintește *acum* figura în ansamblu?)

. . . . . .

Desigur! — fig. 10.4 este proiecția celor 12 muchii ale unui paralelipiped care are particularitatea că proiecțiile tuturor muchiilor au aceeași lungime.

Fig. 10.3 este proiecția unui paralelipiped „opac"; vedem numai trei fețe, șapte vîrfuri și nouă muchii; trei fețe, un vîrf și trei muchii nu se văd pe această figură. Fig. 10.3 nu este decît o parte a fig. 10.4, însă această parte definește întreaga figură. Dacă paralelipipedul și direcția de proiecție sînt alese în așa fel încît proiecțiile celor nouă muchii reprezentate pe fig. 10.3 să fie toate egale cu *r* (și ele trebuie să fie egale cu *r*, prin ipoteză), atunci și proiecțiile celor trei muchii

rămase trebuie să fie egale cu r. Aceste trei segmente de lungime r provin din proiectarea celui de-al optulea vîrf, invizibil, şi această proiecţie E este centrul unui cerc care trece prin punctele A, B şi C, şi a cărui rază este r.

Teorema este demonstrată, şi este demonstrată interpretînd, surprinzător şi elegant, o figură plană drept proiecţia unui solid, a unui corp spaţial.

(Demonstraţia recurge la noţiuni de geometrie în spaţiu. Sper însă că defectul nu este prea mare, iar dacă este, el nu-i de loc greu de reparat. Acum, cînd putem caracteriza atît de simplu situaţia centrului E, este uşor de examinat lungimile EA, EB şi EC independent de orice consideraţii de geometrie în spaţiu. Dar nu vom insista aici asupra acestui aspect.)

10.3. ÎN GENERAL, DESPRE NATURA IDEII REVELATOARE

Cele de mai sus exemplifică „pe viu" diverse aspecte legate de natura ideii revelatoare. Apariţia acestei idei a fost prezentată aici extrem de lent; în loc s-o trîmbiţăm triumfător, am gîngăvit-o. (De fapt, am procedat intenţionat aşa, ca să-i dăm posibilitatea cititorului să participe la descoperire.) Dar şi în alte privinţe exemplul prezentat de noi este oarecum unilateral — cum, de altfel, este, în mod inerent, orice exemplu, din cauza diversităţii infinite a fenomenului. Totuşi, dacă cititorul îl va analiza cu înţelegere binevoitoare şi în lumina cuvenită, în contextul potrivit, şi pe fondul propriei sale experienţe în materie, exemplul la care am recurs poate constitui o ilustrare utilă a diferitelor aspecte esenţiale, manifeste frecvent în rezolvarea problemelor.

De foarte multe ori ideea revelatoare apare *spontan*. Ea introduce un *element nou şi pregnant*, şi *modifică modul în care concepem problema*. Ea aduce după sine (este urmată îndeaproape de) *convingerea* fermă că scopul urmărit ne este de acum la îndemînă, ne-a devenit accesibil.

Spontanitatea este o trăsătură cu totul caracteristică, dar destul de greu de descris. Ce înseamnă ea — asta o va înţelege cel mai bine cititorul căruia, din vălmăşagul de linii şi litere de pe fig. 10.2, i-a „sărit" în ochi pe neaşteptate imaginea unui paralelipiped; şi el va mai înţelege, poate, într-o oarecare măsură, ce înseamnă inspiraţia, cum este posibil să interpretezi apariţia bruscă a unei idei electrizante drept şoaptă a unei voci interioare, sau „semn călăuzitor" din partea vreunei fiinţe supranaturale.

Elementul nou şi pregnant care a apărut în cazul nostru este ideea paralelipipedului. Este destul de straniu că apariţia unei figuri spaţiale a însemnat pasul decisiv în rezolvarea unei probleme de geometrie plană. Mult mai frecvent, elementul nou şi decisiv este descoperit în limitele domeniului din care face parte problema investigată. Dacă problema este de geometrie plană, este de aşteptat ca elementul nou să fie o nouă linie adăugată figurii, sau o teoremă pertinentă de care ne amintim brusc, sau ceva de acest gen.

Modificarea modului în care concepem problema este foarte spectaculară, în cazul de faţă. Cercurile se retrag şi se estompează pe planul al doilea, liniile drepte avansează şi capătă pregnanţă în prim-plan. Dar noi nu le mai concepem ca raze, noi referim acum totul la paralelipiped. Fostele raze, extremităţile lor, patrulaterele pe care le mărginesc ele, capătă o nouă semnificaţie, ele reprezintă acum muchii, vîrfuri, feţe ale corpului spaţial. Modificarea modului în care concepem elementele problemei este spectaculoasă, dar tipică ; fiindcă o restructurare radicală, de acelaşi tip, a concepţiei de ansamblu este introdusă de ideea decisivă în rezolvarea mai tuturor problemelor, de orice natură ar fi ele. Cînd apare ideea, elementele îşi asumă noi roluri, capătă noi semnificaţii. La rezolvarea problemelor de geometrie, elementele sînt reamestecate (ca un pachet de cărţi de joc) şi sînt regrupate în alte asociaţii : sînt asamblate în triunghiuri cu laturi corespondente, sau în romburi, sau în orice configuraţie familiară rezolvatorului şi utilă scopului urmărit în investigaţie. O linie care înainte de apariţia ideii revelatoare nu era decît o linie şi nimic mai mult capătă acum o anumită semnificaţie : ea devine latură a unui triunghi a cărui egalitate cu un alt triunghi este esenţială pentru rezolvare ; sau devine o secantă a două paralele ; sau se înscrie în vreun alt fel într-un tablou comprehensibil. După apariţia ideii, *vedem mai multe* — semnificaţii mai multe, potenţe mai multe, şi corelări mai multe. Apariţia ideii este ca lumina pe care o aprinzi într-o cameră întunecoasă.

Ideea revelatoare apare simultan cu *convingerea* că ţelul a devenit accesibil. O idee care apare brusc, dezvăluind un element nou şi spectaculos printr-o rearanjare dramatică a elementelor, degajă un aer de importanţă cu totul impresionant şi insuflă o convingere fermă. Această convingere se exteriorizează prin exclamaţii de genul „Am găsit !", „Ştiu acum cum să fac !", „Ăsta era trucul" ! Dacă, în cazul de faţă, aţi văzut doar paralelipipedul, dar n-aţi sesizat că el duce la rezolvarea problemei, înseamnă că încă n-aţi avut ceea ce se numeşte o idee hotărîtoare. Vă mai trebuie ceva. Nu-i neapărat nevoie să vedeţi în detaliu *în ce fel* paralelipipedul conduce la rezolvarea problemei, dar trebuie să aveţi senzaţia fermă că el *va conduce negreşit* la rezolvare.

Aveţi o idee? Aţi răspuns „Da"? Ei bine, înseamnă că sînteţi un om norocos. Fiindcă ideile folositoare nu pot fi constrînse să apară. Iată, eu mă ocup de problema mea cu toată conştiinciozitatea: mi-o pun, mi-o formulez, mi-o întipăresc în minte sub toate aspectele — sînt absorbit de problemă. Şi aştept să-mi vină o idee utilă; dar va veni ea oare? Poate da — poate nu; poate — imediat, poate — după un timp, poate — niciodată.

Avem nevoie de idei „bune", de idei utile, şi am vrea, firește, să avem oricînd la dispoziţie asemenea idei; în realitate, însă, ele sînt cele care dictează, nu noi; şi sînt capricioase, şi îndărătnice. Ele ne pot fulgera în minte pe neaşteptate, dar mult mai adesea se lasă aşteptate îndelung; iar uneori nu facem decît să aşteptăm, şi iar să aşteptăm, fiindcă nu vin de loc.

Ideile vin cînd vor ele să vină, nu cînd vrem noi. A aştepta să-ţi vină o idee este un fel de rămăşag cu hazardul.

Dar dacă ideile ar veni cu totul la întîmplare, rezolvarea problemelor ar depinde în principal de şansă ... Mulţi oameni cred că aşa şi este. Samuel Butler exprimă această opinie într-un catren spiritual:

Invenţiile — toate — pe lume cîte sînt,
Nu creier, nici raţiunea le-a născut întîi;
Noroc avut-au unii, şi-au dat de ele — aşa —
Din neatenţie, întîmplare, sau greşeală ...

Este greu de crezut că o opinie atît de răspîndită ar putea fi cu totul nefundantă, pe de-a întregul falsă. Dar, să fie ea pe de-a întregul corectă? Să depindem, oare, exclusiv de şansă, cînd avem de rezolvat o problemă? Sper că, după toate capitolele precedente, cititorul şi-a format de acum o opinie.

EXEMPLE ŞI COMENTARII LA CAPITOLUL 10

10.1. *Spontaneitatea ideilor. Un citat şi un comentariu*

(1) Citez din *The Age of Reascn*, Partea I, de Thomas Paine.

Oricine a studiat, observîndu-se pe sine însuşi, starea şi progresul gîndirii omeneşti nu poate să nu fi observat că aşa-numitele „gînduri" sînt de două categorii distincte: cele pe care le producem noi înşine prin reflecţie şi prin actul gîndirii, şi cele care ne vin în minte şi se zăvoresc acolo, după bunul lor plac. Mi-am făcut totdeauna o regulă din a-i trata cu toată deferenţa pe aceşti vizitatori voluntari, avînd grijă să analizez, cît am putut mai bine, dacă merită sau nu să le accept compania; şi tocmai de la ei am dobîndit mai toate cunoştinţele pe care le am.

(2) Lichtenberg observa că n-ar trebui să spunem: „eu cred că ...", ci să folosim mai curînd, o formă impersonală, „este de crezut că ..." sau „se crede că ...", așa cum spunem „plouă" sau „tună". Lichtenberg sugerează că există acțiuni spontane ale intelectului pe care nu le putem comanda, așa cum nu putem comanda marilor forțe ale naturii.

Am putea adăuga că intelectul nostru se comportă uneori ca un fel de cal, sau de catîr, ca un fel de animal straniu căruia trebuie să-i intrăm în voie și pe care, din cînd în cînd, trebuie să-l ciomăgim bine, ca să obținem de la el serviciul dorit — pe care, foarte frecvent, nu-l obținem ...

(George Christoph Lichtenberg, 1742—1799, fizician și scriitor german; *Aforismele* sînt, probabil, opera lui de care ne amintim cel mai mult.)

10.2. *Două experiențe.* Timpul pe care-l cheltuim (fără însă să exagerăm!) rezolvînd cuvinte încrucișate s-ar putea să ne fie răsplătit cu prisosință, fiindcă putem învăța cîte ceva despre rezolvarea problemelor, despre cum gîndim și despre cum ar trebui să gîndim.

(1) Într-un joc de cuvinte încrucișate găsim (pe orizontală) următoarea definiție: „De la tinerețe pînă la bătrînețe (zece litere)". La început, s-ar putea să nu avem nici cea mai mică bănuială despre ce fel de cuvînt este vorba, sau despre ce vrea să însemne definiția aceasta. Dar iată că un cuvînt de pe verticală, pe care am reușit să-l găsim între timp, ne dă o anumită informație: o literă de la mijloc. Apoi un alt cuvînt de pe verticală ne furnizează o a doua literă; după aceea găsim și o a treia literă, sau o a patra — și, dintr-o dată, cuvîntul dorit „ne vine în minte și se zăvorăște acolo".

Luați o foaie de hîrtie și căutați rezolvarea acestei probleme la p .... La început acoperiți cu hîrtie toată rezolvarea. Apoi, făcînd-o să alunece în jos, descoperiți un singur rînd — acum știți care-i cuvîntul? Dacă nu, mai descoperiți un rînd, apoi și pe cel următor și așa mai departe. Puteți, în felul acesta, trăi pe viu ce înseamnă o idee care îți „vine în minte".

† (2) Dacă știți ceva calcul infinitezimal (dar nu prea mult!) puteți încerca o experiență similară căutînd primitiva unei integrale nedefinite. Luați o foaie de hîrtie și deschideți la p. 445

Activitatea gîndirii

Mariotte spune că mintea omenească [ingeniul] este ca un sac: cînd gîndeşti, scuturi sacul pînă ce cade ceva din el. Nu încape, prin urmare, nici o îndoială că rezultatul gîndirii depinde, într-o anumită măsură, de întîmplare. Eu aş adăuga că mintea omenească seamănă mai mult cu o sită: cînd gîndeşti, scuturi sita, pînă ce trec prin ea unele lucruri mărunte. Iar cînd au trecut, atenţia care stă la pîndă [în original: speculatrix ratio] reţine totceea ce i se pare relevant. Şi iată cu ce mai seamănă: pentru a prinde un hoţ, diriguitorul cetăţii ordonă ca toţi cetăţenii să treacă printr-o anumită poartă unde stă de veghe păgubaşul. Însă pentru a cruţa timpul şi osteneala, se poate folosi o metodă care exclude (o parte din cei care urmează să treacă). Astfel, dacă păgubaşul spune că hoţul era un bărbat, nu o femeie; un adult, nu un tînăr sau un copil, atunci cei neavizaţi sînt scutiţi (de a trece prin poartă).

Leibniz, *Opuscules et fragments, inédits* editate de L. Couturat, p. 170.

11.1. CUM GÎNDIM

Cel care rezolvă problema este dator să-şi cunoască intelectul, şi atletul este dator să-şi cunoască corpul, cam aşa cum jocheul îşi cunoaşte caii. Fiindcă îmi închipui că acesta din urmă studiază caii, nu de dragul ştiinţei pure, ci pentru a-i face să realizeze performanţe mai bune, şi că el studiază mai mult comportarea şi capriciile unor cai luaţi individual, decît fiziologia sau psihologia cabalină, în general.

Ceea ce urmează să citiţi în continuare nu este un capitol de manual de psihologie; dar nici o simplă conversaţie între rezolvatori de probleme care discută despre habitudinile intelectului lor, aşa cum ar discuta jocheii despre năravurile cailor; şi totuşi, este mai curînd o conversaţie, decît o prezentare formală.

11.2. CE ÎNSEAMNĂ „A AVEA O PROBLEMĂ"

O componentă esenţială a problemei este dorinţa, voinţa, hotărîrea de a o rezolva. O problemă pe care urmează s-o rezolvaţi, chiar una pe care aţi înţeles-o destul de bine, nu este încă o problemă „a dumneavoastră". Ea devine problema dumneavoastră, o aveţi

realmente ca problemă, în momentul cînd vă decideţi s-o rezolvaţi, în momentul cînd doriţi s-o rezolvaţi.

Problema „dumneavostră" vă poate preocupa mai mult, sau mai puţin profund — dorinţa de a rezolva poate fi mai intensă sau mai puţin intensă. Ei bine, atîta timp cît dorinţa aceasta nu este extrem de intensă, şansele de a rezolva o problemă realmente dificilă sînt infime.

Dorinţa de a rezolva o problemă este o dorinţă *productivă:* ea vă poate furniza în cele din urmă soluţia, ea determină, în mod sigur, o modificare a comportamentului dumneavoastră intelectual.

11.3. RELEVANŢĂ

Poţi „avea o problemă" cu o asemenea intensitate, încît problema, pur şi simplu, pune stăpînire pe tine: nu mai poţi scăpa de ea, te urmăreşte pretutindeni.

Un om care „are o problemă" poate fi chiar obsedat de problema lui. El apare cu gîndul aiurea; nu mai observă lucruri evidente pentru cei din jur, şi uită lucruri pe care nimeni din preajmă nu le-ar uita. Lucrînd intens la problemele lui, Newton uita adesea să mănînce.

Da, atenţia celui care rezolvă o problemă devine *selectivă:* ea refuză să stăruie asupra lucrurilor care i se par irelevante pentru problemă, şi adulmecă chiar şi lucrurile cele mai mărunte care i se par relevante. Cum spunea Leibniz, este o atenţie „care stă la pîndă".

11.4. PROXIMITATE

Un student dă examen scris la matematică. Nu i se cere să „facă" toate problemele propuse, dar trebuie să rezolve cît mai multe. Într-o asemenea situaţie, strategia cea mai bună constă, probabil, în a trece în revistă mai întîi toate problemele, într-un tempo convenabil, şi în a le alege pe acelea pe care este cel mai probabil că le va putea soluţiona.

De remarcat că această operaţie preliminară presupune că rezolvatorul este capabil să evalueze într-o oarecare măsură dificultatea problemelor care i-au fost propuse, că el poate estima cu o anumită marjă „distanţa psihologică" care îl separă de rezolvarea problemei. Într-adevăr, oricine este preocupat în mod serios de problema lui capătă un deosebit de sensibil simţ al proximităţii soluţiei şi al ritmului cu care înaintează spre soluţie. Poate să nu folosească cuvinte,

dar el simte acut: „merge bine, soluția e colea după colț", sau „merge greu, mai e mult pînă la soluție", sau: „m-am împotmolit, bat pasul pe loc", sau: „m-am abătut de la rezolvare."

11.5. PREVIZIUNE

Imediat ce ne-am pus în mod serios o problemă, încercăm să prevedem, încercăm să ghicim; ne așteptăm că vom obține ceva, anticipăm în linii mari forma soluției. Această anticipare în linii mari poate fi mai mult sau mai puțin bine definită — și, desigur, poate fi mai mult sau mai puțin eronată, deși eu n-aș zice că se întîmplă prea des să fie foarte eronată.

Toți rezolvatorii de probleme ghicesc, dar rezolvatorul subtil, rafinat, ghicește oarecum altfel decît cel care n-a dobîndit aceste calități.

Un individ primitiv se așază, pur și simplu, în fața problemei, se scarpină în cap sau își mestecă creionul, și așteaptă să-i vină o idee strălucită; dar nu face nimic, sau aproape nimic, pentru a-și apropia acea idee strălucită. Iar cînd îi vine, în cele din urmă, ideea dorită (*dacă* îi vine!) și-i inspiră o supoziție plauzibilă, el acceptă, acea supoziție, considerînd-o drept soluție, fără pic de spirit critic — sau cu foarte puțin.

Un rezolvator mai subtil și mai rafinat își acceptă mai sceptic supozițiile, conjecturile[1]. Prima lui conjectură poate fi, de pildă, „Sînt 25" sau „Trebuie să-i supun cutare și cutare". Însă după aceea, el își verifică conjectura și o poate modifica: „Nu, nu-s 25, ia să încerc cu 30" sau „Nu. N-are nici un rost să-i spun asta, fiindcă el mi-ar putea răspunde așa și așa. Dar aș putea să-i spun că..." Și în cele din urmă, „prin încercări și corecții" prin aproximații succesive, poate ajunge la răspunsul corect, la un plan potrivit[2].

Un rezolvator și mai subtil și cu și mai multă experiență, cînd nu reușește să ghicească răspunsul complet, încearcă să ghicească măcar o parte a răspunsului, măcar o trăsătură particulară a rezolvării, un mod de a aborda rezolvarea, sau măcar o trăsătură particulară a unui mod de a aborda rezolvarea. După aceea, caută să-și lărgească conjectura, dar caută și ocazii potrivite de a-și verifica conjectura;

---

[1] În toate lucrările lui, autorul folosește frecvent acești termeni ca sinonime și cu sensul de afirmație făcută fără un studiu aprofundat al situației, mai mult pe baza intuirii, a ghicirii (*guess*), a adevărului enunțat. Ținînd seama de semantica echivalentului românesc, mai adecvată aici este probabil, forma „conjectură". Vezi însă și *CRP*, nota de la p. 53. — *N. T.*

[2] Vezi 2.2(1) și 2.2(5).

şi în felul acesta, el se străduieşte să-şi adapteze permanent conjectura la informaţia optimă de care dispune în acel moment.

Bineînţeles, orice rezolvator, de la cel mai sofisticat pînă la cel mai primitiv, ar vrea să dea peste o conjectură realmente reuşită, să-i vină dintr-o dată în minte o idee strălucită.

În afară de aceasta, orice rezolvator ar vrea să ştie ce şanse are conjectura lui de a se dovedi corectă. Şansele acestea nu pot fi evaluate cu exactitate (nu este aici locul să discutăm eventuale posibilităţi mai vagi de evaluare). De multe ori însă, cel ce rezolvă probleme „simte" — şi aceasta în mod indiscutabil — cam ce perspectivă are conjectura lui. La oamenii simpli, care nici măcar nu ştiu ce-i aceea o demonstraţie, se poate ca simţămintele acestea în legătură cu supoziţiile făcute să se manifeste în salturi extreme; cei subtili şi cu experienţă este posibil să le sesizeze şi în nuanţe fine; dar toţi cei care au conceput o conjectură, o supoziţie, simt, într-o măsură sau alta, cam ce soartă va avea, probabil, aserţiunea la care a ajuns. Să consemnăm deci, pe lîngă simţul relevanţei şi cel al proximităţii, şi un alt tip de „simţ", în mintea celui care rezolvă probleme.

Este sau nu relevant detaliul acesta? Cît de departe este rezolvarea? Cît de reuşită este conjectura aceasta? Întrebări ca acestea însoţesc fiecare mişcare, fiecare iniţiativă a celui care rezolvă probleme, însă ele sînt mai mult „simţite" decît formulate, iar răspunsurile, tot aşa, sînt mai mult simţite decît formulate. Dar aceste „simţăminte" călăuzesc oare pe cel ce rezolvă probleme sau nu fac decît să-i însoţească deciziile? Ele sînt cauze sau simptome? Nu ştiu, dar ştiu că dacă nu trăiţi asemenea simţăminte, înseamnă că nu sînteţi realmente preocupat de problemă.

11.6. DOMENIUL DE CĂUTARE

Se întîmplă rar să-mi scot ceasul de la mînă, dar cînd o fac, după aceea, de regulă, mi-e destul de greu să-l regăsesc. Cînd îmi pierd ceasul, încep de obicei prin a-l căuta într-un anumit loc, bine definit: pe birou, sau pe un anumit raft, unde obişnuiesc să-mi ţin mărunţişurile, sau în vreun al treilea loc, dacă se întîmplă să-mi amintesc că acolo mi-am scos ceasul de la mînă.

O asemenea comportare este tipică. De îndată ce devenim serios preocupaţi de problemă, anticipăm în linii mari o schiţă, o schemă sumară de rezolvare. Schiţa aceasta poate fi cu totul vagă, se poate chiar nici să nu ne dăm prea bine seama că o avem în minte, dar ea este manifestată în comportarea noastră. Se poate să încercăm diferite soluţii — dar ele sînt, toate, pe acelaşi calapod, de acelaşi tip:

ele se înscriu, toate, în acea schiță preconceptă, eventual — inconștient preconceptă. Cînd nici una dintre soluțiile încercate nu se potrivește problemei, ne simțim pierduți, nimic nu ne mai vine în minte; nu putem evada din limitele acelei schițe preconcepute. Noi nu căutăm, orice tip de soluție, ci căutăm un anumit tip, un tip din cadrul unei scheme sumare dar delimitate. Noi nu căutăm o soluție oriunde în lumea mare, ci căutăm o soluție într-un anumit *domeniu de căutare*[3].

A începe căutarea cu o regiune plauzibil limitată poate fi o treabă rezonabilă. Cînd încerc să-mi regăsesc ceasornicul pierdut, este cu totul rezonabil să nu-l caut în tot universul, sau în tot orașul, sau în toată casa, ci exact pe birou, acolo unde l-am mai găsit de cîteva ori în trecut. Este cu totul rezonabil să începi prin a căuta necunoscuta în acea regiune limitată, dar este cu totul nerezonabil să preseverezi s-o cauți acolo și după ce a devenit mai mult sau mai puțin clar că ea nu se află acolo.

11.7. DECIZII

Rezolvarea unei probleme poate fi un act pur contemplativ; la oamenii simpli ea poate fi o „rumegare" mută; sau poate însemna un drum lung, obositor și întortocheat spre soluție, cu fiecare curbă marcată printr-o decizie. Deciziile acestea sînt sugerate (sau, poate, doar însoțite) de senzația de relevanță și de proximitate, de speranță care cînd reînvie, cînd se destramă. Deciziile și senzațiile acestea declanșatoare sînt rareori exprimate în cuvinte, dar uneori se întîmplă să prindă și glas:

„Și-acum, ia să vedem noi asta..."

„Nu, aici nu-s prea multe de văzut; ia s-o vedem și pe aceea...".

„Nici aici nu-s prea multe de văzut, dar parcă ar fi ceva în aer. Ia să mă mai uit puțin..."

Un tip important de decizie constă în lărgirea domeniului de căutare, în debarasarea de o limitare a cărei îngustime începe să ne dea o senzație de constrîngere.

11.8. MOBILIZARE ȘI ORGANIZARE

Activitatea cerebrală a celui care rezolvă probleme nu este decît foarte schematic, foarte imperfect cunoscută, și complexitatea ei s-ar putea să se dovedească chiar insondabilă. Și totuși un

[3] *Region of Search*; vezi Karl Duncker, *On problem solving*, în „Psychological Monographs", vol. 58, nr. 5, 1945, p. 75.

rezultat al acestei activităţi este cu totul evident: pe măsură ce rezolvatorul înaintează, el adună tot mai mult şi mai mult material.

Să comparăm reprezentarea rezolvatorului despre o problemă matematică la început, cînd abia a luat cunoştinţă de problemă, cu reprezentarea despre aceeaşi problemă la sfîrşit, după ce a rezolvat-o. Cînd îşi pune problema, tabloul este simplu: rezolvatorul vede problema ca un tot nesubdivizat — fără detalii, sau cu foarte puţine detalii; s-ar putea, de pildă, ca el să nu vadă decît părţile principale ale problemei, necunoscuta, datele şi condiţia, sau ipoteza şi concluzia. Tabloul final este însă cu totul diferit: este un tablou complex, plin cu detalii adăugate şi cu materiale a căror relevanţă în cazul dat — a căror legătură cu problema în cauză — i-ar fi fost foarte greu rezolvatorului s-o bănuiască de la început. Există acum linii auxiliare pe figura geometrică iniţial aproape goală, există necunoscute auxiliare, materiale extrase din cunoştinţele dobîndite anterior de rezolvator, în special teoreme aplicate la problema în cauză. Rezolvatorul nu poate nicicum să prevadă de la început că tocmai acele teoreme, şi nu altele, se vor dovedi aplicabile.

De unde provin toate aceste materiale, elemente auxiliare, teoreme etc.? Le-a adunat cel care rezolvă problema; el a trebuit să le extragă din memorie şi să le coreleze deliberat cu problema. Numim această acumulare — *mobilizare*, şi această corelare — *organizare*[4].

Rezolvarea unei probleme seamănă cu construirea unei case. Trebuie să adunăm materialul potrivit; dar adunarea materialului încă nu-i totul; un morman de pietre nu este încă o casă. Pentru a construi o casă, sau o rezolvare, trebuie să împreunăm părţile şi să le organizăm într-un tot premeditat, adaptat scopului.

Mobilizarea şi organizarea nu pot fi separate efectiv una de alta, ele sînt aspecte complementare ale unuia şi aceluiaşi proces complex — ale activităţii noastre canalizate, spre obţinerea soluţiei. Cînd este dusă susţinut şi cu intensitate, această activitate aruncă în joc toate resursele noastre psihice, ne solicită întreaga gamă de activităţi intelectuale, şi prezintă o varietate inepuizabilă de aspecte. Putem fi totuşi ispitiţi să distingem din mulţimea de operaţii intelectuale, implicate în rezolvare, cîteva şi să le atribuim denumiri, cum ar fi izolarea şi combinarea, recunoaşterea şi reamintirea, regruparea şi suplimentarea.

Rîndurile care urmează încearcă să descrie aceste activităţi. Bineînţeles, cititorul nu trebuie, şi nu poate să se aştepte în mod rezonabil, la distincţii nete şi ferme, sau la definiţii stricte şi exhaustive.

---

[4] Cf. ex. 2.74.

11.9. RECUNOAȘTERE ȘI REAMINTIRE

Analizîndu-ne problema, ne înviorăm, ne înveselim cînd *recunoaștem* o trăsătură familiară, un aspect binecunoscut. Astfel, examinînd o figură geometrică, putem sesiza cu satisfacție prezența unui triunghi pe care nu-l remarcasem pînă atunci, sau a unei perechi de triunghiuri asemenea, sau a vreunei alte configurații pe care o cunoaștem în amănunt. Sau: examinînd o expresie algebrică putem recunoaște un pătrat complet, sau vreo altă combinație familiară. Putem recunoaște, desigur — și poate fi chiar foarte util să recunoaștem — și vreo altă situație mai complexă, căreia deocamdată nu-i putem ataşa un nume și pentru care nu avem încă o definiție formală dar care ne frapează prin structura ei familiară și pe care o bănuim importantă.

Avem motive serioase să ne bucurăm cînd am recunoscut, în figura propusă, un triunghi. Într-adevăr, cunoaștem deja o serie de teoreme despre triunghiuri și am rezolvat, în trecut, diferite probleme cu triunghiuri; s-ar putea ca vreuna dintre aceste teoreme cunoscute sau dintre soluțiile deja obținute să fie aplicabilă la problema de care ne ocupăm acum. Sesizînd prezența unui triunghi, stabilim contactul cu un strat întins de cunoștințe din bagajul cognitiv dobîndit anterior, și s-ar putea ca vreunul din filoanele acestui strat să se dovedească util în cazul de față. Și astfel, vorbind în general, recunoașterea poate duce la *reamintirea* vreunui element folositor, la mobilizarea vreunei cunoștințe relevante.

11.10. SUPLIMENTARE ȘI REGRUPARE

Am recunoscut un triunghi în figură și am reușit să ne reamintim o teoremă despre triunghiuri care are oarecare șanse să fie aplicabilă cu folos în situația de acum. Însă pentru a aplica efectiv această teoremă trebuie să adăugăm triunghiului nostru vreo linie auxiliară, de pildă, o înălțime. Așadar, vorbind în general, putem adăuga la viziunea noastră asupra problemei elemente potențial utile, proaspăt mobilizate, cu scopul de a o îmbogăți, de a o face mai completă, de a-i umple lacunele, de a-i suplini deficiențele, într-un cuvînt, cu scopul de a o întregi, de a o *suplimenta*.

Suplimentarea introduce elemente noi în viziunea noastră asupra problemei și constituie un pas important spre organizarea, spre structura acestei viziuni. Uneori însă putem progresa considerabil în structurarea concepției fără să introducem elemente noi, modificînd pur și simplu dispunerea elementelor prezente, concepîndu-le altfel

legate între ele, rearanjînd, sau *regrupînd* elementele. Regrupîndu-i elementele, noi modificăm „structura" viziunii noastre asupra problemei. Aşadar, regruparea înseamnă *restructurare*[5].

Să formulăm însă ceva mai concret aceste consideraţii. Pasul decisiv în rezolvarea unei probleme de geometrie poate consta, de pildă, în introducerea unei linii auxiliare adecvate. Uneori însă putem face pasul decisiv fără să introducem vreo linie nouă, pur şi simplu concepînd în alt mod liniile deja prezente. Bunăoară, putem sesiza că anumite linii formează o pereche de triunghiuri asemenea. Sesizînd această configuraţie familiară, sesizăm relaţii pînă atunci neobservate între elementele figurii, „vedem" elementele grupate altfel, vedem o structură nouă, vedem figura ca un tot mai bine organizat, mai armonios, mai promiţător — am restructurat elementele problemei.

Regruparea poate aduce cu sine o modificare a importanţelor relative. Elementele şi relaţiile care înainte de regrupare se aflau în prim-plan s-ar putea să-şi cedeze acum locurile privilegiate şi să treacă pe planul al doilea; ba chiar se pot estompa într-atît, încît să dispară, practic, din viziunea asupra problemei. Pentru o mai bună organizare a elementelor problemei, trebuie, cînd şi cînd, să eliminăm lucruri pe care, pînă atunci, le consideram relevante. Însă, în ansamblu, noi adăugăm sensibil mai mult decît eliminăm.

11.11. IZOLARE ŞI COMBINARE

Cînd examinăm un ansamblu complex, atenţia ne poate fi atrasă cînd de un detaliu, cînd de un altul. Ne concentrăm asupra unui anumit detaliu, îl prindem în focar, îl scoatem în evidenţă, îl singularizăm, îl distingem det ot ce-l înconjură, într-un cuvînt: îl *izolăm*. După aceea centrul atenţiei se deplasează la un alt detaliu, şi izolăm încă un detaliu, apoi altul şi aşa mai departe.

După ce am examinat diferite detalii şi am reevaluat importanţa unora, putem simţi nevoia să vizualizăm din nou situaţia de ansamblu. Într-adevăr, după reevaluarea unor detalii, aspectul ansamblului, „vederea de ansamblu" *(vue d'ensemble, Gestalt)*[6], s-ar putea să se fi schimbat. Efectul combinat al reevaluării anumitor detalii s-ar putea să se traducă printr-un nou tablou (mintal) al situaţiei de ansamblu, printr-o nouă îmbinare, mai armonioasă, a tuturor detaliilor.

Izolarea şi combinarea pot face să progreseze rezolvarea, completîndu-se una pe alta. Izolarea duce la descompunerea întregului în

[5] Cf. Duncker, *op. cit.*, pp. 29—30.
[6] Sub această formă, în original. — *N.T.*

părți, o combinare subsecventă reasamblează părțile într-un tot mai mult sau mai puțin diferit de cel precedent. S-ar putea ca descompunînd-o și recombinînd-o, și iar descompunînd-o și din nou recombinînd-o, viziunea noastră asupra problemei să evalueze spre un tablou de ansamblu mai promițător.

11.12. O DIAGRAMĂ

Fig. 11.1 oferă cititorului un rezumat grafic al paragrafelor precedente, însă cititorul nu trebuie să-i supraestimeze pertinența. Nouă termeni sînt aranjați în formă de pătrat; unul este plasat în centru, patru — în cele patru vîrfuri, și alți patru sînt scriși de-a lungul laturilor pătratului.

Mobilizarea și *organizarea* sînt reprezentate de cele două extremități ale diagonalei orizontale a pătratului. Într-adevăr, ele sînt activități complementare. Mobilizarea este extragerea de elemente relevante din memorie, organizarea este corelarea deliberată a unor astfel de elemente.

Izolarea și *combinarea* sînt reprezentate de extremitățile diagonalei verticale. Într-adevăr, ele sînt activități complementare. Izolarea înseamnă selectarea unui detaliu particular din întregul înconjurător, combinarea este asamblarea detaliilor disparate într-un tot, într-un întreg cu o anumită semnificație.

Laturile adiacente vîrfului atribuit mobilizării sînt etichetate *recunoaștere* și *reamintire*. Într-adevăr, mobilizarea elementelor rele-

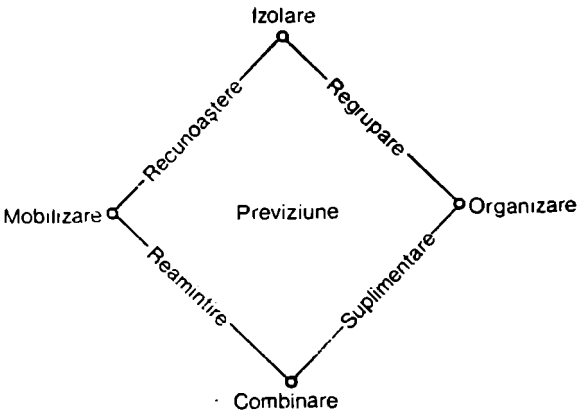


Fig. 11.1. Cum gîndim

vante pentru problemă începe, deseori, cu recunoaşterea unui anumit element dat o dată cu problema, şi constă în rememorarea elementelor conexe.

Laturile adiacente vîrfului atribuit organizării sînt etichetate *suplimentare* şi *regrupare*. Într-adevăr, organizarea înseamnă suplimentarea viziunii asupra problemei, completarea ei prin adăugarea de noi detalii şi prin umplerea lacunelor ; şi mai înseamnă regruparea întregii viziuni de ansamblu.

Cînd citim termenii, de la stînga la dreapta, în lungul laturilor pătratului, mergem de la detalii mobilizate la întregul organizat ; un detaliu recent sesizat, izolat cu grijă şi bine pus în lumină, poate induce o regrupare a întregii concepţii de ansamblu ; tot astfel, un detaliu rememorat care „se potriveşte" se înscrie perfect într-o combinaţie, se adaugă în mod reuşit viziunii globale şi suplimentează ansamblul.

Previziunea este centrul activităţii noastre canalizate spre construirea soluţiei, aşa cum punctul care îi corespunde pe fig.11.1 este centrul pătratului simbolic construit de noi. Folosim mobilizarea şi organizarea, izolarea şi recombinarea, recunoaşterea şi rememorarea a tot felul de elemente, regruparea şi suplimentarea viziunii noastre asupra problemei, cu scopul unic de a prevedea soluţia, sau o trăsătură distinctivă a soluţiei, sau măcar o porţiune din drumul care duce la soluţie. Dacă previziunea se produce brusc, într-o străfulgerare, o numim inspiraţie, sau idee revelatoare ; dorinţa noastră centrală este să ne vină o asemenea idee.

Cînd sînt aplicate la un material concret dat, operaţiile intelectuale trecute în revistă în fig.11.1 capătă forme mai specifice. Astfel, iată — enumerate în corespondenţă cu cele patru laturi ale pătratului — lista celor patru operaţii intelectuale importante la *rezolvarea problemelor de matematică :*

Recunoaşterea :	**Regruparea :**
utilizarea definiţiilor	**transformarea problemei**
Rememorarea :	**Suplimentarea :**
teorema şi probleme cunoscute	**introducerea de elemente auxiliare**

Mai există un aspect. Acţiunile celui care rezolvă probleme sînt ghidate, sau numai acompaniate, de simţămîntul relevanţei şi de cel al proximităţii, precum şi de simţăminte care estimează validitatea conjecturii avansate. Vorbind despre ele, am menţionat în treacăt că rezolvatorii mai subtili şi mai rafinaţi au şi simţăminte mai diferenţiate, mai nuanţate, referitoare la aceste aspecte. N-aş

vrea să omit aici o remarcă destul de speculativă făcută cîndva[6]: s-ar putea ca unele asemenea nuanţări ale acestor simţăminte să fie corelate cu operaţiile intelectuale trecute în revistă în fig.11.1.

Într-adevăr, ne bucurăm cînd viziunea noastră de ansamblu asupra problemei ni se pare *bine echilibrată* şi *coerentă*, *completă* în toate detaliile, iar detaliile ei ne sînt, toate, *binecunoscute*, *familiare*. Dacă avem *detalii distincte* într-un *ansamblu armonios*, avem senzaţia că ideea centrală a rezolvării este undeva pe *aproape*. Or, ceea ce exprimăm cînd folosim toţi aceşti termeni este — cel puţin, aşa mi se pare mie — că *anumite activităţi din cele considerate mai sus progresează satisfăcător*, sau şi-au atins de acum ţelul.

Viziunea noastră de ansamblu asupra problemei ni se pare bine echilibrată, cînd nu simţim nevoia să o *regrupăm*, şi ni se pare coerentă cînd ne *reamintim* fără dificultate detaliile ei, iar fiecare detaliu în parte ne aminteşte cu uşurinţă pe toate celelalte. Cînd nu este nevoie s-o *suplimentăm*, viziunea ni se pare completă, şi ni se pare familiară, cînd au fost de acum *recunoscute*, sesizate, toate detaliile ei. Perceptibilitatea distinctă a detaliilor este urmarea faptului că am *izolat* în prealabil fiecare detaliu şi ne-am concentrat atenţia asupra lui, iar armonia întregii viziuni de ansamblu este rezultatul *combinării* fericite a detaliilor. Spunem că ideea este aproape, cînd simţim că progresăm cu succes spre o *previziune* mai completă, mai cuprinzătoare.

În dorinţa de a obţine o prezentare sistematică a acestor indicii de progres, a acestor „semne favorabile" care ne accentuează speranţa în reuşită, să le dispunem în aşa fel încît poziţiile lor relative să fie exact cele ale termenilor corespunzători lor din pătratul din fig.11.1. Vom aranja, aşadar, şapte termeni (şapte indicii de progres), exact aşa cum sînt dispuse cele patru laturi ale acelui pătrat şi cele trei puncte importante de pe diagonala verticală a acestuia. Iată schema:

Izolare reuşită: detalii distincte

Regrupare completă: viziune familiară — **Grupare reuşită: viziune bine echilibrată**

Previziune promiţătoare: ideea este aproape ...

Rememorare lesnicioasă; viziune coerentă — **Suplimentare satisfăcătoare: viziune completă**

Combinare fericită ansamblu armonios

[6] Cf. *CRP*, „Indicii de progres" (4) pp. 114—115.

11.13. PARTEA SUGEREAZĂ ÎNTREGUL

M-a depăşit pe stradă un băiat care fluiera voios şi am prins din zbor o măsură sau două dintr-o melodie care îmi plăcea foarte mult, dar pe care n-o mai auzisem de multă vreme. Şi dintr-o dată, melodia aceea mi-a umplut întreaga fiinţă, gonindu-mi din minte toate necazurile, la care mă gîndeam pînă atunci.

Această mică întîmplare ilustrează destul de bine aşa-numita „asociaţie de idei", un fenomen descris încă de Aristotel şi, după el, de mulţi alţii. Bradley dă o descriere remarcabilă: „Orice parte a unei stări de spirit unitare tinde, cînd este reprodusă, să reinstaleze restul [stării de spirit]". Într-adevăr, în cazul meu, o singură măsură a fost de ajuns ca să retrăiesc întreaga impresie pe care mi-o lăsase acea melodie, şi să-mi reamintesc, curînd după aceea, şi restul măsurilor. Iată şi o altă descriere, o descriere care omite detalii esenţiale, dar care este uşor de memorat: „Partea sugerează întregul"; să reţinem această scurtă sentinţă ca o prescurtare convenabilă a formulării mai precise date de Bradley.

De reţinut cuvintele — importante — „tinde" şi „sugerează". Afirmaţiile:

„Partea sugerează întregul"

„Partea tinde să reconstituie întregul"

„Partea are şansa să reconstituie întregul"

Sînt afirmaţii eventual acceptabile, însă sentinţa:

„Partea reconstituie întregul"

este cu siguranţă inacceptabilă ca exprimare (formulare) a „legii asocierii (ideilor)": reamintirea nu se produce nicidecum cu necesitate — există doar o şansă, o tendinţă. Cunoaştem, de asemenea, cîte ceva şi despre intensitatea (forţa) acestei tendinţe; cu cît ne concentrăm mai mult şi mai îndelung atenţia asupra unei părţi, cu atît ea ne sugerează mai intens întregul; mai multe părţi luate împreună sugerează întregul mai intens decît o face una din ele, luată separat. Aceste completări sînt importante — dacă vrem să înţelegem rolul asociaţiilor în activitatea intelectuală a celui care rezolvă probleme.

Să considerăm un exemplu foarte schematic. O problemă de matematică poate fi rezolvată rapid aplicînd o anumită teoremă decisivă D, dar fără teorema D este foarte greu de rezolvat. La început, rezolvatorul n-are nici cea mai mică bănuială că teorema D este relevantă pentru problema de care se ocupă, deşi este pe deplin familiarizat cu teorema D ca atare. Cum poate el descoperi rolul decisiv al lui D? Sînt posibile mai multe cazuri.

Dacă problema propusă și teorema D au o componentă comună, cazul este relativ simplu. După ce a încercat în diferite feluri, rezolvatorul va da, probabil, și peste acea parte componentă, o va izola și o va examina cu atenție; și atunci, acea parte comună are șanse să-i reamintească, sau să-i „reconstituie" în minte, întreaga teoremă D.

Cazul este mai puțin simplu dacă viziunea inițială asupra problemei și teorema decisivă D n-au nici o componentă comună. Totuși, dacă există o altă teoremă, C, de asemenea cunoscută de rezolvator, care are o componentă comună cu problema, și o altă componentă comună cu D, s-ar putea ca rezolvatorul să ajungă la D, stabilind mai întîi legătura cu C și trecînd, apoi de la C la D.

Bineînțeles, lanțul asociațiilor poate fi și mai lung; problema propusă poate fi în contact asociativ cu A, A — în contact asociativ cu B, B cu C, și, în fine, C cu D. Cu cît lanțul este mai lung, cu atît și rezolvatorul va trebui să „scuture sacul", sau „sita", mai îndelung, pînă ce va „pica" D-ul decisiv.

„A scutura sacul" sau „sita", este un mod metaforic de a descrie procesul din intelectul celui care rezolvă probleme (vezi citatul din motoul acestui capitol). Paragrafele precedente, rezumate în fig.11.1, au încercat să descrie acest proces ceva mai puțin metaforic. Or, există o interpretare perfect plauzibilă a activităților descrise: cu ajutorul lor, rezolvatorul caută să stabilească contacte asociative utile.

Într-adevăr, „recunoscînd" un element, rezolvatorul îl plasează într-un anumit context cu care acel element se află într-un puternic contact asociativ. Orice element proaspăt „mobilizat", adăugat viziunii asupra problemei de rezolvat, creează șanse de a atrage după sine alte elemente, cu care el este în contact asociativ. Cînd rezolvatorul „izolează" un element și își concentrează atenția asupra lui, atenția pe care i-o consacră creează noi șanse de a introduce elemente asociate. Este posibil ca o „regrupare" să aducă laolaltă elemente care, împreună, ar putea exercita o atracție asociativă mai puternică decît ar putea-o face unul oarecare, luat separat.

Este totuși greu de presupus că procesul din mintea celui care rezolvă problema ar putea fi descris și explicat *exclusiv* pe baza asociației; trebuie să mai existe și altceva, nu numai atracție asociativă, pentru a face distincție între relevant și irelevant, între dezirabil și indezirabil, între asocieri și combinări de elemente — utile și inutile[7].

---

[7] Cf. Duncker, *op. cit.*, p. 18.

EXEMPLE ŞI COMENTARII LA CAPITOLUL 11

11.1. *Experienţa dumneavoastră, propria dumneavoastră judecată.* Scopul acestei cărţi este să vă îmbunătăţească deprinderile de lucru. De fapt, însă, numai dumneavoastră singur vă puteţi îmbunătăţii deprinderile. Dumneavoastră înşivă trebuie să descoperiţi ce diferenţe există între ceea ce faceţi de obicei, şi ceea ce ar trebui să faceţi. Capitolul acesta a fost scris pentru a vă ajuta să înţelegeţi mai bine ceea ce faceţi dumneavoastră de obicei.

Exerciţiile care urmează, ex. 11.2—11.6, vă solicită să ilustraţi în concret pasaje din textul precedent. Încercaţi, în primul rînd, să găsiţi ilustrări din propria dumneavoastră activitate — exemplele care vă vin spontan în minte au şansele cele mai mari să se dovedească relevante. Străduiţi-vă să judecaţi fără idei preconcepute dacă descrierile din text sau ilustrările din rezolvările de la sfîrşitul cărţii concordă sau nu cu propria dumneavoastră experienţă.

11.2. *Mobilizare.* Reamintiţi-vă o problemă de geometrie pe care aţi rezolvat-o, şi la care, pe măsură ce rezolvarea progresa, figura, la început aproape goală, se „umplea" din ce în ce mai mult cu elemente auxiliare.

11.3. *Previziune.* Vă puteţi reaminti vreun caz în care, la un moment pe care l-aţi putea numi aproape cu precizie, aţi devenit dintr-o dată convins că rezolvarea va reuşi?

11.4. *Părţi mai multe sugerează întregul mai intens.* Sînteţi de acord cu această afirmaţie — dacă judecaţi după propria dumneavoastră experienţă?

11.5. *Recunoaştere.* Vă puteţi reaminti vreun caz în care recunoaşterea unui anumit element (sesizarea rolului lui cu totul familiar, dar pînă atunci neremarcat) a însemnat, în fapt, momentul critic, punctul hotărîtor, după care totul a fost foarte uşor?

11.6. *Regrupare.* Vă puteţi reaminti vreun caz în care regruparea figurii a însemnat, în fapt, cheia rezolvării?

11.7. *Efort din interior, efort din exterior.* Stabilirea de contacte între problema propusă şi experienţa anterioară constituie, fără îndoială, o parte esenţială a performanţei pe care o realizează cel care rezolvă probleme. El poate încerca să descopere asemenea contacte „din interior" sau „din exterior". El poate rămîne în interiorul problemei, examinîndu-i elementele pînă ce găseşte unul care este în măsură să „atragă" vreun element utilizabil, din exterior — adică din cunoştinţele dobîndite anterior; sau poate ieşi în afara problemei, căutînd printre cunoştinţele dobîndite anterior, pînă ce găseşte vreun element aplicabil la problema dată. Lucrînd din interior, rezolvatorul analizează în amănunt problema, părţile ei componente, diferitele ei aspecte. Lucrînd din exterior, el îşi trece în revistă cunoştinţele disponibile răscolind acele zone ale cunoştinţelor sale care au probabilitatea maximă de a se dovedi aplicabile la problema în cauză. Cele două jumătăţi ale fig. 11.2 încearcă să exprime vizual ce înseamnă a lucra „din interior" şi „din exterior".

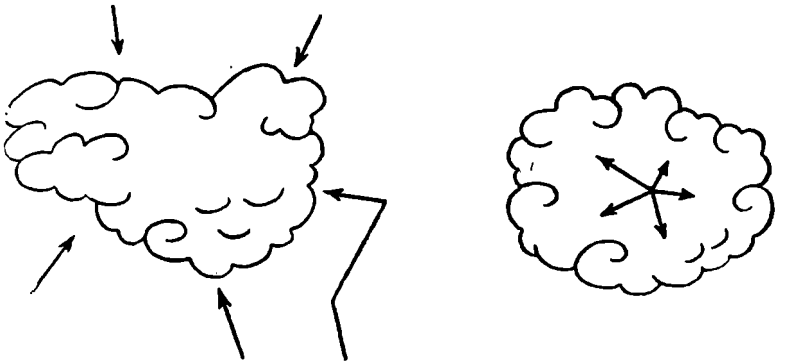


Fig. 11.2. Efort „din interior", efort „din exterior" — pentru a străpunge ceaţa

11.8. *Euristica şoarecelui în labirint.* Fig. 11.3 poate reprezenta potecile deschise de tăietori de pădure, fără prea multă judiciozitate, într-un masiv împădurit, şi apoi abandonate de ei. Punctul *E* marchează intrarea în zona exploatată. Fig.11.3 poate reprezenta, de asemenea, un labirint prin care sînt puşi să „bîjbîie" şoareci într-o experienţă de psihologie animală.

Dar fig. 11.3 poate reprezenta — simbolic, bineînţeles — şi activitatea rezolvatorului de probleme cînd acesta procedează într-un anumit fel. După un început rectiliniu, el se angajează pe o „potecă" curbă, pînă ce ajunge într-un impas (real sau numai aparent) ; el face atunci cale-întoarsă şi începe să reconstituie în sens invers drumul străbătut, dar remarcînd un drum lateral, se angajează pe acea ramificaţie pînă la un alt impas, care îl determină din nou să facă cale-întoarsă ... Şi continuă tot aşa — încer-

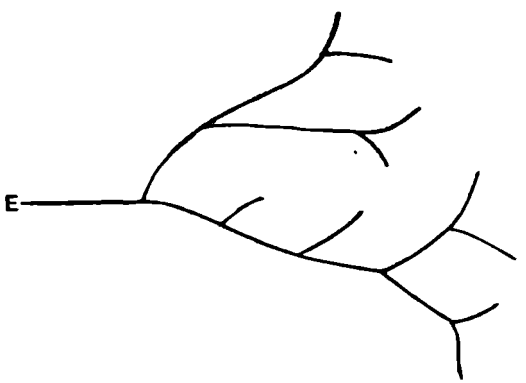


Fig. 11.3. Încercări, încercări, impasuri şi drumuri laterale

cînd diferite „poteci", făcînd în repetate rînduri cale-întoarsă, descoperind noi şi noi „ieşiri" posibile, explorîndu-şi problema dar, în ansamblu, avansînd — să sperăm — în direcţia bună.

11.9. *Progres.* Pe măsură ce rezolvarea progresează, viziunea rezolvatorului asupra problemei se modifică necontenit; în particular, el colectează noi şi noi materiale legate de problemă. Să presupunem, cu titlu de încercare, că într-un fel sau altul am putea măsura în fiecare moment amploarea („cantitatea") materialului colectat, şi că această cantitate este într-un fel proporţională cu pertinenţa viziunii rezolvatorului asupra problemei investigate. Presupunerea aceasta este desigur cu totul grosieră şi foarte puţin verosimilă, dar ea ne permite să reprezentăm grafic progresul rezolvării.

Într-un sistem de coordonate (vezi fig. 11.4), luăm timpul ca abscisă, iar „măsura" viziunii asupra problemei în momentul considerat, ca ordonată corespunzătoare momentului considerat. Curba care rezultă reprezintă viziunea asupra problemei ca funcţie de timp; ea exprimă vizual evoluţia procesului de elaborare a soluţiei în mintea rezolvatorului.

Să presupunem că rezolvarea se desfăşoară fără reculuri, fără nici o retractare a celor afirmate anterior; corespunzător acestei presupuneri, fig. 11.4 înfăţişează o curbă ascendentă, care reprezintă o funcţie nedescrescătoare de timp. Curba începe (din stînga) cu o porţiune punctată care urcă lent, aproape uniform, şi care vrea să simbolizeze „preistoria", maturizarea subconştientă a problemei. Punctul *C*, începînd de la care curba este trasată cu linie plină, marchează începutul activităţii *conştiente*. Panta curbei în fiecare punct reprezintă ritmul de înaintare, în momentul corespunzător. Ritmul variază; el este cel mai lent în punctul *S*, care este un punct de *stagnare* momentană; tangenta la curbă în punctul *S* este orizontală. Ritmul este cel mai rapid în punctul *I*, unde panta are un maxim; *I*, care este un punct de inflexiune, marchează apariţia ideii decisive.

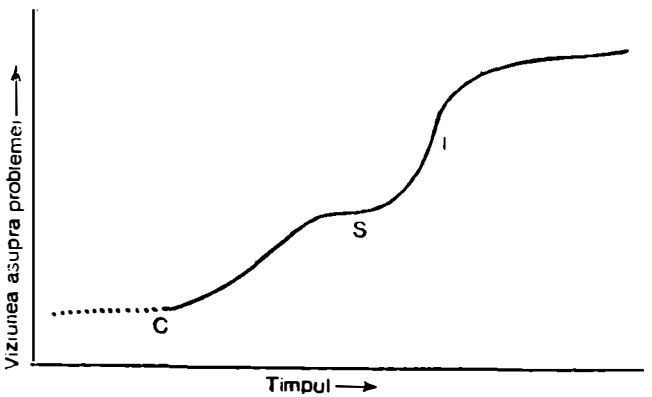


Fig. 11.4. Început „conştient" — stagnare — idee, inspiraţie, punct de inflexiune

momentul de *inspirație*. (Și punctul *S* este un punct de inflexiune, dar de tipul opus: în *S* panta este minimă.)

Elaborarea planului de aflare a soluției în mintea celui care rezolvă probleme este un proces complex cu nenumărat de multe și de variate aspecte. Fig. 11.4 nu pretinde că ar epuiza aceste aspecte, dar poate că adaugă cîte ceva la cele spuse cu alte ocazii; ea ar putea completa, de pildă, sugestiile din fig. 7.8.

11.10. *A, și dumneata la fel* ... Mare parte din ceea ce știu, sau îmi imaginez că știu, despre rezolvarea problemelor este rodul reflecțiilor mele asupra cîtorva, relativ puține, experiențe sugestive. Citind o carte, discutînd cu un prieten, vorbind cu un student, sau observînd fizionomiile unui auditoriu, sesizam brusc ceva, și eram tentat să-mi spun: „A, și dumneata la fel ... și dumneata procedezi aproape exact în același mod!" De fapt, mi s-a întîmplat uneori să am acest sentiment al lui „A, și dumneata la fel ..." observînd chiar comportarea unor animale: cîini, păsări, și, o dată, observînd un șoarece.

11.11. *Șoareci și oameni.* Gospodina se năpusti în curtea de serviciu, puse jos cursa de șoareci (era un model vechi — o cușcă cu o trapă) și strigă fie-si să aducă pisica. Șoarecele din cușcă părea să înțeleagă miezul acestor gesturi, alergînd înnebunit prin cușcă, se năpustea desperat cînd într-o parte cînd în alta, izbindu-se violent de gratii, și reuși, în ultimul moment, să se strecoare din cușcă, dispărînd imediat în cîmpul învecinat. Probabil că în partea aceea a cursei exista o deschizătură ceva mai largă între gratii. Gospodina păru dezamăgită, ca și pisica — de altfel, care a sosit prea tîrziu. Simpatia mea fusese însă încă de la început de partea șoarecelui, așa că mi-a fost greu să adresez vreun cuvînt de consolare, gospodinei sau pisicii; în schimb, îl felicitam, în sinea mea, pe șoarece. El rezolvase o problemă colosală, și dăduse un excelent exemplu.

Așa se rezolvă problemele. Trebuie să încerci, și iarăși să încerci, pînă ce sesizezi, în cele din urmă, acea mică diferență dintre diferitele „deschizături", de care depinde totul; trebuie să încerci în toate chipurile, în așa fel încît să poți explora toate laturile problemei, fiindcă nu poți ști dinainte pe ce parte se află acea unică deschizătură practicabilă prin care te vei putea strecura.

La șoareci și la oameni, metoda de bază este aceeași: încerci, și iar încerci, și *variezi încercările* — ca nu cumva să ratezi puținele posibilități favorabile. Este adevărat că omul se pricepe, de obicei, mai bine decît șoarecele să rezolve probleme. Un om n-are nevoie să se năpustească fizic asupra obstacolului — o poate face în minte; un om își poate varia incomparabil mai mult tentativele, și poate învăța mai mult din eșecul tentativelor sale, decît o poate face un șoarece.

CAPITOLUL 12

Disciplina gîndirii

Toată metoda constă în a pune în ordine acele lucruri asupra cărora trebuie să ne îndreptăm agerimea minții ...
Descartes, *Reguli pentru îndrumarea minți*, Regula V, p. 22.

12.1. CUM AR TREBUI SĂ GÎNDIM

Capitolul 11 a încercat să descrie comportamentul intelectual tipic al celui care rezolvă probleme. Bine, dar „tipic" înseamnă oare și „rațional"? Da, este adevărat că ne putem comporta așa, dar trebuie oare să ne comportăm așa?

Este greu de răspuns la aceste întrebări — ele sînt prea generale și, implicit, prea vagi, dar ne putem servi de ele pentru a pune în evidență firul conducător al acestui capitol. Călăuziți de procesul din intelectul celui care rezolvă probleme, proces pe care l-am analizat în capitolul 11, vom încerca să trecem în revistă operații mintale (pași, procedee etc.) care sînt tipic utile în rezolvarea problemelor și, enumerîndu-le una cîte una, vom încerca s-o așezăm pe fiecare la locul cuvenit în procesul de rezolvare a problemelor.

Vom exprima operațiile tipic utile, în rezolvarea problemelor într-o formă concisă, condensată, folosind întrebări și recomandări „stereotipe". Cititorul trebuie însă să fie conștient că aceste întrebări și recomandări pot fi interpretate în două feluri: fie ca citate dintr-un monolog al celui care rezolvă problema, fie ca fiind adresate de un profesor comprehensiv unui elev pe care vrea să-l ajute[1].

[1] I se recomandă insistent cititorului să compare expunerea din acest capitol cu pasajele corespunzătoare din *CRP*; pentru cele de mai sus, vezi pp. 10—14, „Introducere" „Intrebările și recomandările „stereotipe", pe care la consider drept o parte esențială a metodei mele, au fost prezentate în articolul meu nr. 2 (vezi Bibliografia).

Cînd „avem o problemă" ea ne revine deseori în minte, şi poate chiar atît de des, încît devine o obsesie. La problemă trebuie însă să ne gîndim nu numai în termeni vagi, la modul general, ea trebuie înfruntată deschis, trebuie înţeleasă clar — trebuie să ne întrebăm: *Ce urmărim? Ce vrem să obţinem?*

Se ivesc multe ocazii, în cursul rezolvării, de a ne pune această întrebare. Cînd ne-am angajat prea departe pe o cale lăturalnică care, la urma urmelor, s-ar putea dovedi irelevantă cînd gîndurile încep să o ia razna, poate fi util să ne întrebăm: *Ce vrem să obţinem, ce urmărim?* şi în felul acesta să ne concentrăm din nou asupra scopului urmărit, să-l readucem în centrul atenţiei, să-l precizăm din nou.

Ţinta unei probleme de aflat este necunoscuta: pentru a ne preciza această ţintă trebuie să întrebăm: *Care este necunoscuta?* Scopul unei probleme de demonstrat este concluzia, aşa că forma adecvată a întrebării este: *Care este concluzia?*

După ce am înţeles clar ţinta, scopul urmărit, obiectul pe care am vrea să-l obţinem, trebuie să inventariem, să luăm cunoştinţă de obiectele pe care le avem, de care dispunem, şi pe care le-am putea folosi pentru a ne atinge obiectivul urmărit; trebuie deci să ne întrebăm: *Ce avem? Ce este dat?*

În fapt, dacă vrem să stabilim o legătură între cele două puncte, să găsim o cale care duce de la un punct la altul, poate fi foarte util să examinăm alternativ cele două puncte, mai întîi unul, apoi pe celălalt, aşa că avem deseori ocazia să ne întrebăm în ordinea: Ce vrem să obţinem? Ce ni s-a dat?

Adaptate la problemele de aflat, întrebările sînt: Care este necunoscuta? Care sînt datele? Care este condiţia? Adaptate la problemele de demonstrat — *Care este concluzia? Care este ipoteza?*

Ce scop au aceste întrebări, ce ne incită ele să facem? Să ne îndreptăm atenţia asupra punctelor menţionate. După cum spunea Descartes (vezi motoul acestui capitol), metoda constă în a examina atent unul după altul, şi într-o succesiune adecvată, toate punctele relevante. Or, nu încape nici o îndoială că părţile principale ale unei probleme de aflat (necunoscutele, data şi concluzia) sau ale unei probleme de demonstrat (concluzia şi ipoteza) sînt, într-adevăr, relevante. Ba chiar, sînt atît de importante încît pare foarte potrivit să le examinăm foarte de timpuriu: după ce am înţeles bine problema în ansamblu, să ne îndreptăm, atenţia asupra părţilor ei principale.

Un rezolvator de probleme care este serios preocupat de problema lui „simte" acut proximitatea ţelului şi ritmul în care progresează spre ţinta urmărită ; el simte acut orice modificare de situaţie care afectează perspectivele planului pe care şi l-a făcut. Cînd şi cînd, este însă de dorit să mergem ceva mai departe de simpla impresie, să ne cîntărim mai lucid situaţia vizavi de problemă, să diagnosticăm problema, să-i evaluăm perspectivele — şi tocmai aceasta este intenţia, tendinţa întrebărilor care urmează.

Unele probleme sînt fără speranţă. Or, dacă întîmplător problema de care ne ocupăm este dintre cele fără speranţă, nu trebuie să ne complicăm prea mult cu ea şi de aceea, ne întrebăm: *Există oare răspuns la această întrebare?* Există oare un răspuns clar, un răspuns tangibil? *Şi dacă există un răspuns, aş putea oare să-l găsesc?*

Cînd avem de-a face cu o problemă de aflat, trebuie să (ne) întrebăm: *Există* (problema are) *oare soluţie?* Întrebarea poate fi şi mai elaborată: Cîte soluţii admite problema? *Există o singură soluţie, există mai multe, sau nu există nici una?* Condiţia propusă este exact cea necesară pentru determinarea necunoscutei, sau cere prea puţin (faţă de ceea ce ar putea pretinde), sau cere prea mult?

Cînd avem de-a face cu o problemă de demonstrat, întrebarea adecvată este: *Teorema este adevărată, sau este falsă?* Putem întreba şi ceva mai deliberat: *Există oare teoremă adevărată? Sau pentru a implica concluzia este nevoie de o ipoteză mai restrictivă? Teorema este judicios* (scrupulos) *formulată? Sau ar fi suficientă şi o ipoteză mai largă, pentru a implica concluzia?* Şi aşa mai departe.

De fapt la nici una din aceste întrebări nu putem da un răspuns definitiv, decît după ce am terminat lucrul şi am rezolvat problema. Dar întrebările nu urmăresc realmente un răspuns definitiv, ele nu pretind decît un răspuns provizoriu, o anticipare pe cît posibil judicioasă, o conjectură. Încercînd să anticipăm judicios, încercînd să ghicim deliberat[2], ne putem *clarifica poziţia* în raport cu problema, şi tocmai acesta este efectul pe care-l dorim. Am enunţat întrebările precedente într-o formă concisă, de discuţie liberă. Cu mai multă circumspecţie, s-ar fi cuvenit să (ne) întrebăm: este oare *plauzibil* să existe un răspuns, o soluţie? Teorema enunţată poate fi adevărată sau poate fi falsă: care din aceste posibilităţi este *mai plauzibilă?*

[2] Cititorul nu a uitat, desigur, elementul de deliberare care este subînţeles ori de cîte ori este vorba de „ghicit" ... (vezi şi nota de la p. 251 — *N.T.*).

Cînd, cît de timpuriu, trebuie să (ne) punem întrebările de mai sus? Reguli stricte şi rigide nu există (şi nici nu trebuie să existe). Foarte frecvent, ele urmează în mod firesc după întrebările din 12.2 referitoare la părţile principale ale problemei.

12.4. CE URMĂRIM – O CALE DE ACCES

Scopul sugerează mijloacele; examinarea ţelului (a necunoscutei, a concluziei) poate sugera o cale de acces. Într-adevăr, o întrebare antrenează o altă întrebare: *Ce urmărim? Care este necunoscuta? Cum putem găsi acest tip de necunoscută? Din ce date putem deduce acest tip de necunoscută?* Iar aceste întrebări pot iniţia o abordare regresivă a problemei: dacă sesizăm din ce „date" am putea deduce necunoscuta problemei propuse, putem alege acele date drept ţintă a unei probleme auxiliare, şi în felul acesta, putem începe să lucrăm descendent [vezi ex.8.1(2)].

La o problemă de demonstrat, întrebările corespunzătoare sînt: *Ce urmărim? Care este concluzia? Cum putem deduce acest tip de concluzie? Din ce ipoteză putem deduce acest tip de concluzie?*

În loc de a scoate în evidenţă necunoscuta (concluzia), putem pune accentul pe date (pe ipoteză): *Care sînt datele? Cum putem folosi aceste date? Ce putem deduce din astfel de date?* Există şi la probleme de demonstrat o înlănţuire corespunzătoare de întrebări: *Care este ipoteza? Cum putem folosi o astfel de ipoteză? Ce putem deduce dintr-o astfel de ipoteză?* Aceste întrebări pot iniţia o abordare progresivă (vezi ex.8.1; am arătat acolo, şi se cuvine s-o reamintim, că — în general — planificarea regresivă a rezolvării este de preferat celei progresive.)

Din nefericire, se poate foarte uşor întîmpla să nu reuşim să elaborăm un plan viabil, un plan utilizabil, nici lucrînd regresiv, nici lucrînd progresiv. Există însă şi alte întrebări care ne pot sugera o cale de acces, un mod de abordare a problemei, şi iată cîteva din cele pe care (ni) le putem pune cu folos încă de la începutul investigaţiei: *De ce tip este această problemă?* (Nu cumva) este înrudită cu vreo problemă cunoscută? (Nu cumva) seamănă cu vreo problemă cunoscută? Încercînd să clasificăm problema, încercînd să găsim legături şi asemănări cu probleme cunoscute, s-ar putea să sesizăm că problemei în cauză i se poate aplica o anumită schemă familiară (de rezolvare) şi atunci, avem ceva cu care putem începe — „vedem" cîţiva primi paşi pe calea care s-ar putea să ne ducă la soluţie.

Cînd încercăm să găsim o problemă înrudită utilizabilă, un procedeu este să trecem în revistă relaţiile (legăturile) despre care ştim

din experienţă că se întîmplă foarte frecvent să se dovedească utile: *Cunoaştem vreo problemă înrudită? Am putea imagina o problemă înrudită? Cunoaştem sau am putea imagina, vreo problemă de acelaşi tip, sau o problemă analogă, sau una mai generală, sau o problemă mai particulară?* Aceste întrebări ne pot însă îndepărta de problema propusă, aşa că, de regulă, este preferabil să (ni) le punem ceva mai tîrziu, cînd problema este de acum clarificată şi ne-am întipărit-o atît de bine în minte, încît nu riscăm s-o pierdem din vedere lucrînd la oarecare „distanţă" de ea.

12.5. CE URMĂRIM – UN ASPECT MAI PROMIŢĂTOR

Cînd manipulăm obiecte materiale (de pildă, cînd ne propunem să tăiem cu ferăstrăul craca unui pom) ne instalăm, automat, în poziţia cea mai comodă, cea mai convenabilă. Trebuie să procedăm în mod similar şi cînd sîntem în faţa unei probleme, de orice tip ar fi ea; trebuie să încercăm să ne plasăm într-o astfel de poziţie, încît să putem ataca problema pe partea ei cea mai accesibilă. Noi, în minte, întoarcem problema pe toate feţele, să încercăm atunci s-o întoarcem în aşa fel încît să ni se pară cît mai simplă. Aspectul sub care se prezintă problema în momentul de faţă s-ar putea să nu fie chiar cel mai favorabil; de aceea, să (ne) întrebăm: este oare exprimată problema sub forma cea mai simplă, cea mai clară, cea mai sugestivă? *N-am putea oare reformula problema?*

Bineînţeles, ceea ce urmărim este să reformulăm problema (sau să o transformăm într-o problemă echivalentă) nu oricum, ci în aşa fel încît ea să devină mai familiară, mai atrăgătoare, mai accesibilă, mai promiţătoare.

Scopul străduinţei noastre este să construim o punte peste prăpastia dintre ceea ce urmărim şi ceea ce avem, să legăm necunoscuta de date, concluzia de ipoteză. N-am putea oare reformula astfel problema încît necunoscuta şi datele, sau ipoteza şi concluzia, să ni se înfăţişeze *mai apropiate unele de altele?*

Să transformăm deci concluzia, sau să transformăm ipoteza, sau să le transformăm şi pe una şi pe cealaltă, dar s-o facem în aşa fel încît să le aducem mai aproape una de alta. Să transformăm necunoscuta, sau să transformăm datele sau condiţia, sau să transformăm întreaga problemă, dar s-o facem astfel încît să aducem necunoscuta mai aproape de date.

Pe măsură ce rezolvarea progresează, pe figura considerată apar noii linii; noi materiale şi noi relaţii se adaugă la structura care se cristalizează în mintea celui care rezolvă problema. Fiecare trans-

formare a problemei este capabilă să introducă elemente noi. O cale importantă de a adăuga noi materiale la viziunea asupra problemei o constituie *revenirea la definiții.*

De pildă problema în cauză se referă la un trunchi de piramidă (ca în cap.7). Ce este trunchiul de piramidă? Care este *definiția* lui? Trunchiul de piramidă este porțiunea care rămîne dintr-o piramidă completă cînd din aceasta se taie, cu un plan paralel cu baza, o piramidă mai mică. Acest răspuns ne aduce în atenție două noi solide, piramida completă și piramida mică, și s-ar putea să considerăm avantajos să le încorporăm, pe una sau pe celalaltă, poate chiar pe amîndouă, în viziunea noastră asupra problemei[3].

Revenind la definițiile elementelor date o dată cu problema, introducem elemente noi, care, la rîndul lor, introduc alte elemente noi, și continuînd în felul acesta, ne dezvoltăm, ne completăm, ne amplificăm viziunea asupra problemei. Deseori, o astfel de operație ne apropie de rezolvare, dar nu neapărat; uneori s-ar putea să nu facă altceva decît să încarce probleama cu date inutile.

Există multe modalități de a transforma problema, care ar merita să fie luate în considerare; unele sînt aplicabile numai anumitor tipuri speciale de probleme, altele însă sînt destul de generale. (Vezi ex.12.1, 12.2.)

12.6. CE URMĂRIM — CUNOȘTINȚE RELEVANTE

A rezolva o problemă înseamnă, în esență, a stabili legături între problema propusă și anumite elemente adecvate din cunoștințele dobîndite anterior. Cînd încercăm să reformulăm problema într-o formă mai promițătoare, în fapt, căutăm o asemenea legătură pornind de la problemă, încercăm să străpungem negura din jurul problemei lucrînd „din interior". Putem însă căuta legătura pornind și de la celălalt capăt, încercînd să găsim vreun element cunoscut utilizabil lucrînd la problemă „din exterior".

Este însă evident imposibil să trecem în revistă toate cunoștințele dobîndite anterior. În consecință, trebuie să începem prin a explora acele compartimente ale cunoștințelor noastre, despre care ni se pare cel mai plauzibil să se dovedească relevante pentru problema de care ne ocupăm.

Dacă sîntem familiarizați cu domeniul din care face parte problema, înseamnă că-i cunoaștem „elementele-cheie", faptele care vom avea cel mai des ocazia să le folosim. Să ni le pregătim, să ni le

---

[3] Cf. *CRP*, „Definiția", pp. 77—82.

împrospătăm în minte, ca să le putem utiliza oricînd, aşa cum îşi pregăteşte un bun meseriaş uneltele favorite, ca să le aibă oricînd la îndemînă.

Dacă avem o problemă de aflat — problemele cu aceeaşi necunoscută sînt cele la care merită să ne gîndim în mod deosebit ; o asemenea problemă s-ar putea să ne servească drept punct de plecare pentru un proiect de rezolvare regresivă a rezolvării (vezi cap. 8). Dacă avem o problemă de demonstrat — teoremele cu aceeaşi concluzie ca teorema de care ne ocupăm sînt cele la care merită să ne gîndim în mod deosebit, ca eventuale puncte de plecare.

Care sînt faptele-cheie (în acest domeniu)? Există vreo problemă (în special, vreo problemă rezolvată anterior) *cu acelaşi tip de necunoscută? Există vreo teoremă* (în special, vreo teoremă rezolvată anterior) *cu exact aceeaşi concluzie?* Aceste întrebări au multe şanse să „extragă" din cunoştinţele dobîndite de noi anterior vreun element utilizabil ; şi este, de aceea, foarte potrivit să începem cu ele, cînd vrem să adunăm fapte pertinente. S-ar putea însă ca ele să se dovedească sterile, şi să fim nevoiţi să examinăm şi fapte mai complexe sau mai subtile, sau probleme analizate anterior care au comun cu problema considerată vreun alt element, nu neapărat necunoscuta sau concluzia. În cunoştinţele noastre există — nu încape nici o îndoială — elemente pe care le-am putea utiliza la problema de acum — dar în ce fel sînt ele legate de această problemă ? Cum am putea ajunge la ele ? Putem recurge la generalizare, la particularizare, la analogie ; la urma urmei, putem răscoli întreaga zonă de cunoştinţe din care face parte problema în cauză.

Bineînţeles, cu cît cunoştinţele noastre sînt mai ample şi mai bine organizate, cu atît şi şansa de a găsi ceea ce ne trebuie este mai mare. [Vezi ex.12.3.]

12.7. CE URMĂRIM — O REEVALUARE A PERSPECTIVELOR

Nu sîntem de loc mulţumiţi de felul cum progresează rezolvarea ; toate ideile pe care le-am avut au dat greş, toate căile pe care le-am încercat au dus la un impas. Figura pe care o avem în faţă, întreaga noastră viziune despre problemă aşa cum o „vedem" în acest moment este deconcertantă şi de neînţeles, este supraîncărcată şi totuşi incompletă ; lipseşte ceva, vreun element hotărîtor, vreo verigă esenţială...

S-ar putea ca totul să vină de acolo că ne-am angajat pe un drum lăturalnic, că ne-au copleşit faptele irelevante pe care le cărăm după noi. Să încercăm să ne întoarcem la viziunea „nudă" asupra pro-

blemei, „despuiată" de tot ce-am îngrămădit pe drum ; să examinăm din nou necunoscuta, datele şi condiţia, sau ipoteza şi concluzia. *Am ţinut seama de întreaga condiţie? Am folosit toate datele? Am ţinut seama de întreaga ipoteză, i-am utilizat oare toate părţile?*

Aceste întrebări sînt deosebit de relevante dacă ne-am convins în prealabil că toate datele şi toate părţile condiţiei sînt realmente necesare pentru a determina necunoscuta, sau că este nevoie de întreaga ipoteză pentru a putea deduce concluzia. Dar chiar şi dacă nu ştim sigur lucrul acesta, şi doar bănuiţi că toate datele şi toate clauzele condiţiei, sau ale ipotezei, s-ar putea să fie esenţiale — chiar şi atunci întrebările precedente sînt justificate şi se pot dovedi utile. Ele ne sugerează că trebuie să încercăm să folosim o dată, sau o clauză, pe care pînă acum am neglijat-o şi în felul acesta ele ne pot conduce la veriga care lipseşte.

Sau s-ar putea ca totul să vină de acolo că n-am înţeles suficient de bine semnificaţia termenilor esenţiali ai problemei. *Am înţeles oare — ne-am reprezentat oare palpabil (vizual) — toate conceptele implicate esenţial în problemă?* Această întrebare ne poate incita *să revenim la definiţia* unor termeni, şi în felul acesta ne poate sugera că ar trebui să „dezghiocăm" mai bine problema ; există şansa ca în felul acesta să ajungem la o reformulare mai satisfăcătoare, la noi elemente utilizabile.

12.8. ARTA DE A PUNE ÎNTREBĂRI

În paragrafele precedente am trecut în revistă operaţii mintale tipice, sau „mişcări" (iniţiative) ale celui care rezolvă probleme. Descrierea fiecărei mişcări a culminat cu o întrebare (sau o recomandare — tipărită cu italice), care poate servi drept rezumat, drept exprimare condensată a mişcării[4]. Este însă foarte important să ştim şi în ce fel pot fi ele folosite de cel care rezolvă probleme (sau de profesor).

Dacă este pusă la momentul potrivit şi în locul potrivit, fiecare din întrebările adunate aici poate sugera, poate aduce în minte răspunsul corect, ideea cea bună, mişcarea adecvată care face să progreseze rezolvarea. În felul acesta, întrebarea poate acţiona ca un *stimulent* care incită exact reacţia de care este nevoie. Aceste întrebări sînt *„inspiratoare de idei"*.

[4] **Întrebările referitoare la „problemele de aflat" sînt enumerate în *CRP*, p. 12. Cititorului i se recomandă insistent să studieze această listă, precum şi explicaţiile şi lustrările aferente.**

Desigur, s-ar putea să nu ştim dintr-o dată ce întrebare trebuie să (ne) punem în circumstanţele concrete date. Putem însă încerca mai multe întrebări, una după alta, pînă ajungem la cea care ne este utilă. Putem aşadar folosi paragrafele precedente drept un *repertoriu* de întrebări potenţiale utile, drept un *nomenclator*.

Nomenclatorul acesta nu trebuie însă folosit la întîmplare, luînd întrebările oricum ne cad sub ochi; şi nici nu trebuie folosit mecanic, parcurgînd întrebările într-o ordine prestabilită. Lista aceasta de întrebări trebuie folosită aşa cum îşi foloseşte un meseriaş priceput *lada cu scule*. El se uită bine la ceea ce are de făcut şi numai după aceea îşi alege sculele. S-ar putea să fie nevoit să încerce mai multe unelte, pînă o va găsi pe cea potrivită, dar el nu le ia la întîmplare, sau într-o ordine stabilită mecanic; el îşi alege uneltele *în mod deliberat*. Tot aşa trebuie să alegem şi noi o întrebare, dintre cele adunate în acest capitol — cînd sîntem confruntaţi cu o problemă.

Bineînţeles, meseriaşul şi-a dobîndit măiestria probabil printr-o practică îndelungată, şi observînd cu atenţie cum procedează alţi meseriaşi. Tot aşa putem învăţa şi noi cum să folosim întrebările adunate aici. Reguli stricte, rigide, care să direcţioneze utilizarea lor nu există. Dacă însă dincolo de aceste întrebări există un fond de experienţă personală, de succese şi de eşecuri, şi dacă sîntem profund conştienţi de scopul urmărit, avem totuşi multe şanse s-o alegem pe cea adecvată.

Desigur, un bun meseriaş îşi păstrează uneltele într-o bună stare şi aranjate în perfectă ordine în lada lui de scule. Dacă cunoaştem întrebările şi „mişcările" subiacente lor, descrise în acest capitol, nu din simple descrieri, ci din experienţă, şi dacă am înţeles bine rolurile lor respective în procesul de rezolvare a problemelor avem — după părerea mea — toate şansele să tratăm problemele cu mai mult profesionalism, cu mai puţină stîngăcie, şi mai puţin la întîmplare decît o fac majoritatea oamenilor.

Şi poate chiar că orice disciplină a gîndirii, indiferent de domeniul la care se referă, constă, în esenţă, în însuşirea unui set de întrebări adecvate şi în utilizarea lor judicioasă. Dar cum putem învăţa arta de a pune întrebări? Să n-aibă oare această artă nici un fel de reguli?

EXEMPLE ŞI COMENTARII LA CAPITOLUL 12

12.1. *Reformularea problemei.* Ţinta problemei de care ne ocupăm este demonstrarea (sau infirmarea) afirmaţiei: „Dacă *A* este adevărată, atunci şi *B* este adevărată". Ştim că poate fi uneori avantajos să transformăm problema, şi să încercăm

să demonstrăm (sau să infirmăm) afirmaţia contrapozitivă echivalentă. „Dacă B este falsă, atunci şi A este falsă". (Vezi ex.9.10).

Iată o situaţie analogă. Fie că x reprezintă necunoscuta unei probleme de aflat, iar $a, b, c, \ldots l$, datele. (De pildă, necunoscuta şi datele sînt măsurile diferitelor părţi ale unei figuri geometrice.) S-ar putea să fie avantajos să permutăm între ele necunoscuta x şi una din date, să spunem a. Făcînd aşa, trecem, de la problema iniţială, la una nouă, în care necunoscuta este a iar datele — $x, b, c, \ldots, l$. [Vezi ex. 2.33, 2.34 şi 2.35.]

Am considerat aici două tipuri de transformări, *independent de subiectul în cauză.* Studierea unor astfel de tipuri ţine în mod specific de domeniul euristicii.

12.2. *Exprimarea problemei în limbaj matematic.* Marele proiect al lui Descartes despre care am vorbit în 2.1 ar putea fi condensat (în mare) într-o singură recomandare: Să transformăm problema, oricare ar fi ea, într-o problemă de matematică, exprimînd-o sub formă de ecuaţii algebrice. Proiectul lui Descartes a eşuat, dar l-am putea revitaliza generalizîndu-l: *Să exprimăm problema în limbaj matematic.* Succesul acestei recomandări depinde, fără îndoială, de diapazonul limbajului matematic de care dispunem. De exemplu dacă cunoaştem şi ştim să folosim nu numai simbolurile algebrice, ca Descartes, ci şi simbolurile calculului diferenţial şi integral, putem trata mult mai multe probleme.

Luat într-un sens foarte cuprinzător, „limbajul matematic" poate include orice proces de elaborare de concepte (cu condiţia ca ele să fie suficient de clare). În această interpretare foarte largă, recomandarea „exprimă în limbaj matematic" s-ar putea să fie excelentă din punct de vedere teoretic, dar este sterilă din punct de vedere practic: ea nu recomandă mai mult decît arhicunoscutul „străduieşte-te să fii clar".

Există însă o interpretare mai îngustă, şi chiar oarecum vagă, care se dovedeşte deseori utilă. Graficele, diagramele sau figurile geometrice folosite ca simboluri formează un fel de limbaj matematic. Desenarea unei figuri, exprimarea problemei în limbajul figurilor geometrice, este deseori de mare ajutor. Unii simt chiar un fel de impuls de a-şi exprima ideile sub formă de simboluri geometrice. (Cf. ex. 14.8.)

12.3. *Un bagaj de cunoştinţe bine „asortat" şi bine organizat* constituie un atu important al rezolvatorului de probleme. Buna organizare a cunoştinţelor, care asigură accesul uşor la oricare din ele, poate fi chiar mai importantă decît volumul cunoştinţelor, decît diapazonul lor. În orice caz, fapt este că există cazuri în care abundenţa de cunoştinţe poate constitui un obstacol, fiindcă s-ar putea să împiedice pe rezolvator să „vadă" o cale de acces deosebit de simplă; şi atunci, o bună organizare nu poate decît să ajute.

Într-un depozit bine orînduit articolele care sînt cerute cel mai frecvent se află în locurile cele mai accesibile, articolele folosite deseori împreună sînt depozitate împreună, iar etichetarea şi detaliile de aranjare sînt în aşa fel gîndite, încît să putem aduna uşor laolaltă oricare două, sau mai multe, articole înrudite.

O aranjare judicioasă a cărţilor în biblioteca personală, sau a sculelor în lada cu scule, poate fi, fără îndoială, utilă, dar poate şi mai utilă este „aranjarea" judicioasă a cunoştinţelor în memorie, şi poate că ea trebuie făcută cu şi mai multă grijă. Să examinăm cîteva aspecte ale organizării, importante pentru cel care rezolvă probleme.

(1) În orice domeniu, există anumite *fapte-cheie* (probleme-cheie, teoreme-cheie) pe care trebuie să le stocăm cumva în rîndul din față al memoriei. Cînd începem o problemă, trebuie să avem în jur, la îndemînă, cîteva fapte-cheie, așa cum meșteșugarul priceput, cînd își începe lucrul, își aranjează la îndemînă uneltele pe care le utilizează cel mai frecvent.

Cînd ne propunem să demonstrăm o propoziție elementară de geometrie plană, în maniera lui Euclid, putem considera drept fapte-cheie cele patru cazuri de egalitate și cele trei cazuri de asemănare a triunghiurilor. Cînd ne propunem să reducem la un sistem de ecuații, în maniera carteziană (cap. 2), o problemă de geometrie elementară, putem considera drept fapte-cheie teorema lui Pitagora și proporționalitatea laturilor în triunghiurile asemenea. Și tot așa, dacă avem suficientă experiență de lucru, putem numi faptele-cheie în problemele de convergență a seriilor sau în vreo altă clasă de probleme.

(2) Există două întrebări de permanență utilitate în rezolvarea problemei: *Din ce date putem determina acest tip de necunoscută? Din ce ipoteză putem deduce această concluzie?* Ținînd seama de utilizarea continuă a acestor întrebări, problemele rezolvate anterior, cu același tip de necunoscută, trebuie oarecum „depozitate împreună", ca și teoremele demonstrate anterior, cu aceeași concluzie.

(3) Vă cunoașteți orașul în care locuiți? Dacă-l cunoașteți foarte bine, trebuie să fiți în stare să găsiți drumul cel mai scurt și mijloacele de transport cele mai potrivite, între oricare două puncte din oraș. Cam așa este și cu organizarea cunoștințelor pe care este de dorit s-o realizăm; în domeniul în care lucrăm, trebuie să fim în stare să găsim explicit o conexiune — un „drum practicabil" — între oricare două puncte.

Examinarea corelată a problemelor înrudite este de natură să contribuie la o mai bună organizare a cunoștințelor. Astfel, în prima parte a acestei cărți, ne-am ocupat pe larg de grupuri de probleme înrudite între ele prin aceea că se rezolvă după o aceeași schemă. Tot astfel, am putea trece în revistă șiruri de probleme înrudite printr-o necunoscută comună, sau prin date comune, și așa mai departe.

(4) Euclid a scris nu numai *Elementele*, ci și cîteva alte lucrări. Una din ele, *Datele*, trece în revistă diferitele date din care pot fi determinate obiectele geometrice. Îmi place să cred că Euclid a scris *Datele* pentru a veni în ajutor celor care rezolvă probleme, punîndu-le la dispoziție o colecție de cunoștințe de geometrie într-o *formă ușor accesibilă* celor care își pun deseori întrebarea: *din ce date aș putea determina acest tip de necunoscută?*

12.4. *Din ce date ați putea deduce acest tip de necunoscută?* Enumerați „probleme de aflat" simple ale căror necunoscute sînt descrise de una din următoarele propoziții.

(1) ... să se găsească punctul P.

(2) ... să se găsească lungimea AB.

(3) ... să se găsească aria ΔABC.

(4) ... să se găsească volumul tetraedrului $ABCD$.

12.5. *Din ce ipoteză ați putea deduce această concluzie?* Enumerați teoreme simple de geometrie plană ale căror concluzii coincid cu una din cele de mai jos. (Majusculele *A, B, C, ...* reprezintă puncte.)

(1) ..., atunci $AB = EF$.

(2) ..., atunci $\sphericalangle ABC = \sphericalangle EFC$.

(3) ..., atunci $AB : CD = EF : GH$.

(4) ..., atunci $AB < AC$.

12.6. *O analogie: triunghiul și tetraedrul.* Iată o pereche de probleme, prima referitoare la triunghi, a doua — la tetraedru, care sînt analoge:

Să se înscrie un cerc într-un triunghi dat.

Să se înscrie o sferă într-un tetraedru dat.

Enumerați alte perechi de probleme, sau de teoreme, înrudite între ele în mod similar. Rezolvările sau demonstrațiile sînt oare și ele analoge, sau — în ce fel sînt legate între ele?

12.7. Enunțați o teoremă referitoare la triunghiuri: analogă următoarei teoremei referitoare la tetraedru:

Dreapta care unește punctele mediane de pe două muchii opuse ale unui tetraedru trece prin centrul de greutate al oricărei secțiuni prin tetraedru, care este paralelă cu cele două muchii.

Teorema referitoare la triunghiuri n-ar putea oare ajuta la demonstrarea teoremei referitoare la tetraedru? Răspundeți, de asemenea, la întrebările corespunzătoare, referitoare la teoremele din ex. 12.8 și ex. 12.9.

12.8. (Continuare) Orice plan care trece prin punctele mediane de pe două muchi opuse ale unui tetraedru împarte volumul în două părți egale.

12.9. (Continuare) În orice tetraedru, planul bisector al unui unghi diedru împarte muchia opusă în segmente proporționale cu ariile fețelor adiacente care cuprind între ele unghiul diedru.

12.10. *Atenția și acțiunea.*

(1) S-ar putea oare spune că metoda constă exclusiv în a examina atent toate punctele relevante, unul după altul, într-o succesiune adecvată? (Vezi motoul acestui capitol.) Eu unul nu m-aș încumeta s-o afirm. Este însă neîndoielnic că o bună parte din munca rezolvatorului care procedează metodic constă în a se concentra, succesiv, asupra elementelor relevante ale problemei de care se ocupă și asupra diferitelor lor combinații.

Întrebarea *„Care este necunoscuta"* și recomandarea *„Examinează necunoscuta"* urmăresc același efect: să atragă atenția rezolvatorului asupra necunoscutei din problema de care se ocupă. Cînd lucrează metodic, rezolvatorul procedează ca și cum l-ar călăuzi o voce interioară, care-i spune:

Examinează problema în ansamblul ei.

Examinează necunoscuta.

Examinează datele.

Examinează condiția.

Examinează separat fiecare dată.

Examinează separat fiecare clauză a condiției.

Examinează în mod special data pe care încă n-ai folosit-o.

Examinează în mod special clauza condiției pe care încă n-ai folosit-o.

Examinează combinația acestor două date.

Și așa mai departe.

(2) Atenția poate amorsa acțiunea.

Examinează necunoscuta! Care este necunoscuta? Cum am putea găsi acest tip de necunoscută? Din ce date am putea determina acest tip de necunoscută? Cunoaștem — am rezolvat deja — vreo problemă cu acest tip de necunoscută? Concentrîndu-și atenția asupra necunoscutei, rezolvatorul este *ipso facto* încintat să caute în memorie probleme rezolvate anterior, cu aceeași necunoscută; dacă reușește să găsească vreuna, el poate încerca în continuare să-și rezolve problema lucrînd descendent (vezi cap. 8).

Cazul considerat aici (procedeu descendent amorsat ca urmare a atenției acordate necunoscutei) este deosebit de frecvent și de folositor, dar nu numai necunoscuta, ci și oricare alt element relevant al problemei căruia i se acordă atenție poate duce la stabilirea unui contact folositor și, prin aceasta, la o acțiune folositoare. De pildă, examinarea atentă a unui termen care apare în formularea problemei poate sugera insistent o *revenire la definiția* acelui termen și, în felul acesta, poate conduce la o reformulare utilă a problemei, la introducerea în problema reformulată a unor noi elemente utilizabile.

(3) Rezolvatorul își concentrează atenția, succesiv, asupra diferitelor elemente ale problemei și asupra diferitelor lor combinații — el speră, să descopere vreun element, vreo combinație care să-i dea posibilitatea să întreprindă vreo acțiune folositoare, dar spera mai ales să descopere acel element, acea combinație, care îi deschide calea spre acțiunea cea mai eficientă: speră că în felul acesta îi va veni în minte o idee strălucită, care-i va arăta dintr-o dată ce trebuie să facă.

12.11. *Gîndire productivă, gîndire creatoare.* Gîndirea este „productivă" dacă „produce" — dacă reușește să elaboreze — rezolvarea problemei de față, și este „creatoare" dacă „creează" — elaborează — mijloace (procedee, metode) pentru rezolvarea unor probleme viitoare. Cu cît numărul și varietatea problemelor la care pot fi aplicate mijloacele nou-create este mai mare, cu atît și creativitatea este mai mare.

Rezolvatorul poate lucra „creator" chiar cînd nu reușește să rezolve efectiv problema de care se ocupă; efortul depus la acea problemă s-ar putea să-l conducă la procedee, metode etc. aplicabile la alte probleme. Apoi, un rezolvator de probleme poate „crea" indirect, prin aceea că formulează (fără să reușească s-o rezolve), o problemă-cheie, care îi va conduce, în cele din urmă, pe alți cercetători la descoperirea unor procedee și metode de rezolvare fertile.

După părerea mea, grecii care ne-au lăsat problema trisecțiunii unui unghi oarecare au „creat" ceva cu totul remarcabil, cu toate că n-au rezolvat această problemă, și în

profida faptului că, în secolele următoare, această problemă a făcut obiectul a enorm de multe tentative sterile. Această problemă a relevat însă un contrast : în timp ce orice unghi poate fi bisectat, numai anumite unghiuri particulare (cum este cel de 90°) poate fi trisectat uşor cu rigla şi compasul ; aceasta a adus la problema împărţirii unghiului în 5, 7 sau 17 părţi egale, a contribuit la rezolvarea ecuaţiilor prin radicali şi, în cele din urmă, la descoperirile lui Gauss, Abel şi Galois — care au creat metode aplicabile la nenumărate probleme, nebănuite de grecul care s-a gîndit primul la trisecţiunea unui unghi.

Reguli de „făcut" descoperiri?

Deşi este dificil să dai precepte generale într-un astfel de domeniu, şi fiecare trebuie să se călăuzească, în aceste operaţii, după propria sa măiestrie, mă voi strădui totuşi să indic începătorilor calea de urmat.
Newton, *Universal Aritmetick*, trad. din lb. latină în lb. engleză de Ralphson, 1769, p. 198.
Deoarece artele [meşteşugurile] se învaţă mai uşor prin exemple decît prin precepte, m-am gîndit că este nimerit să adaug şi rezolvările problemelor care urmează.
Newton, *op. cit.*, pp. 177—178.

13.1. REGULI ŞI REGULI

Pe măsură ce rezolvarea progresează, aspectul problemei se schimbă necontenit. În fiecare etapă, rezolvatorul este confruntat cu o nouă situaţie şi cu o nouă decizie: ce-ar fi bine să facă în acea situaţie, care ar trebui să fie pasul imediat următor? *Dacă* ar dispune de o metodă perfectă, de o strategie infailibilă de rezolvare a problemelor, el ar putea determina pasul următor din datele situaţiei din acel moment, printr-un raţionament clar, bazat pe anumite reguli precise. Din nefericire, o metodă universală, perfectă, de rezolvare a problemelor nu există, nu există reguli precise aplicabile în toate situaţiile, şi, după toate probabilităţile, asemenea reguli nici nu vor exista vreodată.

Există însă reguli şi reguli. Există reguli de conduită, maxime şi linii directoare care, fără a fi atît de stricte cum sînt regulile matematicii sau ale logicii, pot fi totuşi foarte utile şi rezonabile. O regulă matematică este ca „linia fără grosime" din geometrie, ea separă „albul" de „negru". Există însă reguli cu totul rezonabile care lasă o oarecare libertate de acţiune, lasă loc pentru consideraţii secundare; la ele nu mai există linii nete de demarcaţie, şi uneori nici măcar alb şi negru nu mai există — există doar diferite nuanţe de gri.

Există, se pare, anumite atitudini, anumite moduri de a gîndi, habitudini ale intelectului care se dovedesc utile în multe, poate chiar în majoritatea situaţiilor care survin în rezolvarea problemelor. În orice caz, fapt este că exemplele şi discuţiile din capitolele precedente par să sugereze asemenea atitudini. Prin urmare, nu este potrivit

să ne întrebăm — „Există oare reguli de făcut descoperiri?", ci problema ar trebui pusă altfel, eventual în felul următor: „Există oare ceva de genul maximelor, al sentinţelor, care exprimă condensat atitudini utile în rezolvarea problemelor?"[1]

13.2. RAŢIONALITATEA

Spunem despre un act, sau despre o convingere, că este *raţional* (*ă*) cînd are la bază o motivaţie clară şi bine deliberată, cînd nu-şi trage seva exclusiv din surse mai puţin limpezi şi mai mult vagi, cum ar fi o obişnuinţă, o impresie neanalizată, un sentiment sau, pur şi simplu, „inspiraţia". Creditul fără rezerve pe care-l acordăm unei teoreme matematice după ce i-am examinat critic şi pas cu pas demonstraţia este prototipul convingerii raţionale. Dintr-un anumit punct de vedere, meritul principal al studierii demonstraţiilor constă în aceea că ne apropie de acea comportare ideal raţională care trebuie să caracterizeze omul, *„fiinţa raţională"*.

Nu este însă de loc evident cum anume ar trebui să se comporte cel care rezolvă probleme pentru ca comportarea lui să fie raţională. Să examinăm ceva mai concret dificultatea căreia trebuie să-i facă faţă; să ne reprezentăm o situaţie tipică, frecvent întîlnită. Lucrînd la o anumită problemă A, un rezolvator îşi dă seama că acea problemă este legată de o altă problemă B. Studierea problemei B s-ar putea să-l apropie de scopul urmărit, rezolvarea problemei iniţiale, A. Pe de altă parte, însă, studierea problemei B s-ar putea să se dovedească sterilă şi să nu însemne decît pierdere de timp şi eforturi irosite. Şi astfel, rezolvatorul este pus în faţa unei decizii: n-ar trebui oare să abandoneze, pentru un timp, studierea problemei iniţiale, A, şi să se „comute" pe studierea noii probleme B? Dilema este dacă să introducă sau nu problema B ca problemă auxiliară. Într-o asemenea situaţie, poate oare rezolvatorul să ajungă la o decizie raţională?

Unul din foloasele importante pe care le poate trage rezolvatorul din problema B este că studierea lui B îi poate stimula memoria şi poate „scoate" la iveală elemente pe care le-ar putea utiliza la rezolvarea problemei iniţiale, problema A. Ce şansă există însă ca faptul de a lucra la B să aibă într-adevăr efectul acesta dorit? Evaluarea unei astfel de şanse exclusiv pe baza unui raţionament clar, raţional,

[1] Majoritatea „regulilor" discutate în acest capitol au fost prezentate, într-o formulare oarecum diferită, în articolul nr. 13 al autorului (vezi Bibliografia).

pare imposibilă, într-un anumit fel, într-o anumită măsură, rezolvatorul trebuie să se bazeze pe presentimente, pe simţăminte indefinite.

Pe de altă parte, s-ar putea să existe raţiuni clare, explicite, pro sau contra introducerii lui B ca problemă auxiliară; am trecut în revistă cîteva asemenea raţiuni în capitolul 9. Cum ar trebui să procedeze cel care rezolvă probleme, pentru a ţine seama atît de simţămintele (presentimentele) lui indefinite, cît şi de raţiunile pe care le poate formula explicit? O posibilitate — şi procedeul acesta pare rezonabil — este să se ocupe un anumit timp, judicios drămuit, cu analizarea atentă a argumentelor explicite şi după aceea, pentru a lua decizia finală, să se refere la simţăminte. Într-adevăr, procedînd în felul acesta, el dă posibilitatea analizei atente a argumentelor explicite să-i influenţeze simţămintele în direcţia cea bună; mai raţional decît aşa, este greu de imaginat cum ar fi putut acţiona.

În orice caz însă, rezolvatorul trebuie să înveţe să-şi cumpănească bine simţămintele indefinite cu argumentele explicite. Poate chiar că acesta este lucrul cel mai important pe care trebuie să-l înveţe. După părerea mea, principala regulă de conduită, maxima de bază a celui care rezolvă probleme trebuie să fie:

Nu acţiona niciodată împotriva simţămintelor tale, dar străduieşte-te să cîntăreşti fără părtinire raţiunile pro şi contra proiectelor tale.

13.3 ECONOMIE, DAR NU LIMITARE PREDETERMINATA

Ştim cu toţii că, făcînd o anumită treabă dată, fiecare încearcă să-şi menajeze bunurile, resursele, se străduieşte să cheltuiască pe cît posibil mai puţin timp, mai puţin efort, mai puţin bani. Or, mintea, gîndirea noastră este bunul nostru poate cel mai de preţ, iar economia de efort cerebral, tipul de economie poate cel mai important. *Nu fă cu mai mult, ceea ce poţi face cu mai puţin* — iată principiul general al economisirii; şi respectăm acest principiu cînd rezolvăm probleme, dacă ne străduim să ajungem la soluţie introducînd pe cît posibil mai puţine elemente din exterior.

Evident, trebuie să examinăm cu atenţie problema ca atare, şi elementele care ţin nemijlocit de ea; este bine să ne străduim mai întîi să găsim o cale care duce la rezolvare, fără examinarea altor elemente. Dacă nu reuşim să sesizăm o astfel de cale, examinăm elementele care nu mai ţin chiar nemijlocit de problemă, dar care sînt totuşi foarte aproape de ea. Dacă nici aşa nu reuşim să sesizăm vreo observaţie utilă, putem trece şi la detalii mai îndepărtate dar — şi aceasta este atitudinea generală pe care trebuie să ne-o dorim — refuzăm cu premeditare să cheltuim timp şi efort cu lucruri aduse de

departe, cît mai există speranţa că vom putea rezolva problema propusă pornind de la lucruri mai apropiate de ea. Acest tip de *economie* a bunului-simţ ar putea fi exprimat prin maxima:

Rămîi pe cît posibil mai aproape de problemă.

Nu putem însă prezice cît de aproape de problemă vom reuşi să ne menţinem. Poate că vreo fiinţă superioară, înzestrată cu o metodă perfectă de rezolvare a problemelor inaccesibilă nouă, ne-ar putea proroci cu certitudine cît de departe vom fi obligaţi să mergem pentru a ne aduna elementele necesare pentru rezolvare — noi însă nu putem. În concordanţă cu principiul economiei, noi explorăm mai întîi problema propusă ca atare; dacă aceasta nu ajunge, explorăm vecinătatea imediată a problemei. Dacă nici aceasta nu ajunge, explorăm o vecinătate mai largă; de fiecare dată cînd explorarea nu reuşeşte să descopere o cale de rezolvare, sîntem obligaţi să mergem şi mai departe. Iar dacă ne-am pus în minte să rezolvăm problema cu orice preţ, s-ar putea s-o plătim foarte scump; în orice caz, fapt este că nu putem limita dinainte preţul. Un rezolvator de probleme decis să obţină soluţia trebuie să accepte principiul *non-limitării*, reversul principiului economiei:

Fii gata să mergi atît de departe de problemă, cît te-ar putea obliga circumstanţele s-o faci.

13.4. PERSEVERENŢĂ, DAR DIVERSITATE

„Geniul înseamnă răbdare".

„Geniu este unul la sută inspiraţie şi nouăzeci şi nouă la sută transpiraţie".

Primul dicton este atribuit lui Buffon, celălalt lui Edison, şi ambele transmit acelaşi mesaj: un bun rezolvator de probleme trebuie să fie perseverent, trebuie să se „agaţe" de problema lui, să nu-i dea drumul, să nu renunţe.

Dar ceea ce se aplică totului, s-ar putea să nu se aplice părţii. Desigur, examinînd un detaliu sau un aspect al problemei de care se ocupă, rezolvatorul este bine să se „agaţe" de el, să nu-i dea drumul prea repede. Dar este bine de asemenea să se străduiască să-i cîntărească perspectivele, şi să nu continue să stoarcă portocala din care a stors de acum şi ultima picătură.

Agaţă-te de detaliul examinat atît timp cît mai există speranţa să „scoţi" din el vreo sugestie utilă.

Munca rezolvatorului de probleme este în mare parte o muncă de organizare; el trebuie să „extragă" din memorie elemente aplicabile la problema examinată. S-ar putea ca elementul de care are

nevoie să-şi amintească să fie corelat mai strîns cu un anumit detaliu sau aspect al problemei în cauză, decît cu alte aspecte sau detalii; elementul acela s-ar putea să fie mai uşor de rememorat pornind de la un anumit detaliu, de la un anumit aspect, decît de la alte detalii sau aspecte. Rezolvatorul nu ştie însă dinainte care anume detaliu sau aspect îl vor apropia cel mai mult de ţelul urmărit. De aceea, este bine ca el să examineze o multitudine cît mai variată de aspecte şi detalii şi, este bine, desigur, să examineze toate aspectele şi detaliile care sînt cele mai fundamentale sau cele mai promiţătoare.

Pentru a acoperi întreg domeniul fără să piardă timp, rezolvatorul este bine să nu zăbovească prea mult, şi nici să nu se întoarcă prea curînd în acelaşi loc. El trebuie să urmărească varietatea în fiecare etapă, trebuie să vadă ceva nou — un aspect nou sau o combinaţie nouă de aspecte examinate anterior, sau să vadă într-o nouă lumină elementele şi combinaţiile considerate anterior. Scopul este, bineînţeles, să vadă întreaga problemă într-o lumină nouă, dintr-un unghi mai promiţător.

Pe scurt, varietatea este reversul necesar al perseverenţei. Aşa cum am mai spus, fiecare punct considerat trebuie explorat cu oarecare perseverenţă. DAR:

Străduieşte-te ca, la fiecare pas, să examinezi ceva nou, un colţişor încă neexplorat, iar în tot ceea ce examinezi, străduieşte-te să sesizezi vreo sugestie utilă.

Pericolul cel mai evident împotriva căruia ne pune în gardă această maximă, duşmanul cel mai mare al varietăţii, este autoîngrădirea, drumul deja străbătut — repeţi mereu unul şi acelaşi lucru, fără să schimbi nimic şi fără să progresezi.

13.5. REGULI DE PREFERINŢĂ

Dacă există două moduri distincte de a aborda o aceeaşi problemă, care, sub celelalte aspecte, se prezintă la fel de avantajoase, dar dintre care, unul pare mai uşor decît celălalt, este firesc ca tocmai pe acela să-l încercăm mai întîi. Avem aici o *regulă de preferinţă* (destul de banală) pe care o putem formula astfel:

Mai-puţin-dificilul are prioritate faţă de mai-dificilul[2].

De fapt, în această formulare, propoziţia este incompletă: ar fi trebuit să-i adăugăm, ca o limitare sau ca o restricţie *ceteris paribus* — „toate celelalte (aspecte) fiind egale". Să reţinem apoi că, deşi neformulată explicit, această limitare esenţială trebuie subînţelesă

[2] Calea mai uşoară are prioritate faţă de calea mai grea — *N.T.*

atît în această regulă de preferinţă, cît şi în toate celelalte reguli următoare, care vor fi formulate similar. Urmează o pereche de reguli de acelaşi tip şi la fel de evidente:

Mai-familiarul are prioritate faţă de mai-puţin-familiarul.

Un element care are mai multe puncte în comun cu problema are prioritate faţă de unul care are mai puţine asemenea puncte.

Regulile acestea sînt evidente, dar aplicarea lor s-ar putea să fie mai puţin evidentă. În special restricţia *ceteris paribus*, subînţeleasă dar neexprimată, poate să ceară multă subtilitate din partea rezolvatorului.

Există şi alte reguli de preferinţă, mai puţin evidente, mai puţin generale, reguli mai specifice. Pentru a le examina în mod ordonat, trebuie mai întîi să clasificăm elementele implicate. Iată o asemenea clasificare care s-ar putea să nu fie completă, dar în care cel puţin cazurile cele mai pregnante se înscriu în mod cît se poate de firesc.

(1) Elemente inerente problemei.
(2) Cunoştinţe disponibile.
(3) Probleme auxiliare.

Ne vom ocupa de regulile respective în următoarele trei paragrafe.

13.6. ELEMENTE INERENTE PROBLEMEI

Cînd începem să examinăm o problemă, nu ştim încă, nu ştim de la început, care dintre detaliile ei se vor dovedi importante. De aici — pericolul de a scoate prea mult în evidenţă un detaliu neimportant; s-ar putea să fim într-atît de absorbiţi de un astfel de detaliu încît să nu mai putem trece de el. De aceea — să începem prin a examina problema ca un tot indivizibil, să nu ne ocupăm de detalii, să lăsăm „problema ca un tot" să dospească bine în minte pînă ce-i vom înţelege pe deplin esenţa, scopul. *Întregul are prioritate faţă de părţi.*

Iar cînd avem impresia că nu mai putem trage prea mult folos din considerarea problemei ca un tot, şi sîntem pe punctul de a intra în detalii, să observăm imediat că există un fel de ierarhie a detaliilor. Pe treapta cea mai de sus — cel mai aproape de „centrul" problemei — se află părţile principale. (Aşa cum am mai spus, ipoteza şi concluzia sînt părţile principale ale unei probleme de demonstrat, necunoscuta, datele şi condiţia — cele ale unei probleme de aflat.) Este firesc să începem examinarea detaliată a problemei cu părţile principale; trebuie să înţelegem clar, foarte clar, concluzia urmărită şi ipoteza din care trebuie ea dedusă — sau necunoscuta căutată, datele dis-

ponibile, şi condiţia care leagă necunoscuta de date. *Părţile principale au prioritate faţă de celelalte părţi.*

S-ar putea ca una sau mai multe dintre părţile principale să fie, sau să poată fi, subdivizate: ipoteza poate consta din mai multe presupuneri, concluzia — din mai multe afirmaţii, iar condiţia — din mai multe clauze; necunoscuta poate fi necunoscută multiparţită, cu mai multe componente; s-ar putea, de asemenea, să există mai multe date pe care, într-o primă consideraţie, le-am abordat global. Următoarele, după părţile principale, care trebuie luate în considerare sînt subdiviziunile acestora; putem examina fiecare dată în parte, fiecare necunoscută, fiecare clauză a condiţiei, fiecare presupunere a ipotezei, fiecare afirmaţie a concluziei. În orice caz, se poate considera că celelalte detalii ale problemei sînt „mai depărtate" de centrul acesteia, decît părţile principale, care sînt pe treapta cea mai de sus, şi decît subdiviziunile părţilor principale, care urmează imediat după ele. O ordine de prioritate poate există şi printre părţile mai îndepărtate ale problemei. (Astfel, în enunţul problemei poate fi implicat un anumit concept A, iar în definiţia lui A poate fi implicat un alt concept B; evident, B este mai îndepărtat de centrul problemei, decît A.) Ei bine, să nu mergem mai departe decît este necesar! „Celelalte fiind egale" (această limitare ne însoţeşte în continuare), avem mai multe şanse să tragem folos dintr-o parte mai apropiată de centrul problemei, decît din una mai depărtată. *Părţile mai puţin depărtate* (de centrul problemei) *au prioritate faţă de părţile mai depărtate.*

13.7. CUNOŞTINŢE DISPONIBILE

Aşa cum am spus în repetate rînduri, o „performanţă" esenţială (poate chiar — cea mai importantă) a rezolvatorului constă în mobilizarea elementelor relevante din bagajul lui de cunoştinţe şi în corelarea lor cu elementele problemei în cauză. Rezolvatorul poate lucra la rezolvarea problemei „din interior", sau „din exterior". El poate rămîne în interiorul problemei, străduindu-se să-i desghioace miezul, examinîndu-i atent diferitele părţi, şi sperînd că această minuţiozitate va „atrage", va extrage din bagajul său de cunoştinţe vreun element utilizabil; sau poate „ieşi" în afara ei, hoinărind şi adulmecînd prin diferitele zone ale bagajului său de cunoştinţe, în căutare de elemente utilizabile. În paragraful precedent l-am însoţit pe rezolvatorul care lucra din interior; acum vrem să-l vedem cum lucrează din exterior.

Orice element cunoscut, orice experienţă din trecut s-ar putea dovedi utilizabilă la rezolvarea problemei de care ne ocupăm, dar

este evident imposibil să trecem în revistă toate cunoştinţele pe care le avem, sau să ne reamintim punct cu punct tot ce am făcut în trecut. Chiar dacă problema de care ne ocupăm este o problemă de matematică şi luăm în considerare numai acea porţiune relativ clară şi bine rînduită a cunoaştinţelor noastre care constă din probleme rezolvate anterior şi teoreme rezolvate anterior într-o anumită ramură a matematicii, nu ne putem angaja în a examina tot acel material, element cu element. Trebuie să ne restrîngem investigaţia, trebuie să alegem elementele care au şansa maximă de a se dovedi utilizabile.

Să considerăm pe rînd problemele de aflat şi problemele de demonstrat.

Avem o problemă de aflat. I-am examinat de acum părţile principale, necunoscuta, datele, condiţia. Acum căutăm în memorie vreo problemă rezolvată anterior care ne-ar putea fi de folos. Este natural să căutăm una care are ceva în comun cu problema de acum, — necunoscuta, sau măcar una din necunoscute, datele, sau măcar una din date, vreun concept cu implicaţie esenţială şi aşa mai departe. Există posibilitatea, mai mult sau mai puţin îndepărtată, ca vreuna din aceste probleme deja rezolvate să ne fie de folos, dar ele sînt cu siguranţă prea multe ca să le putem examina pe toate. Însă printre toate aceste puncte de contact posibile, există unul care merită mai multă atenţie decît celelalte — *necunoscuta.* (În particular, am putea încerca să folosim o problemă rezolvată anterior cu acelaşi tip de necunoscută ca problema de acum drept punct de plecare al unei rezolvări regresive, al unui procedeu descendent; vezi cap. 8.) S-ar putea desigur, ca în anumite situaţii particulare de preferat să fie vreun alt punct, dar, în general, *a priori*, celelalte elemente fiind egale, trebuie să examinăm, în primul rînd, *necunoscuta*[3]. *Problemele rezolvate anterior cu acelaşi tip de necunoscută ca problema de care ne ocupăm, au prioritate faţă de alte probleme rezolvate anterior.*

Dacă nu putem găsi o problemă rezolvată anterior cu acelaşi tip de necunoscută ca problema în cauză, care să ne ofere o cale de acces suficient de accesibilă, putem căuta una cu necunoscuta de un tip *asemănător* — chiar şi astfel de probleme se bucură de prioritate, deşi nu sînt chiar de primă prioritate.

Dacă avem o problemă de demonstrat, situaţia este asemănătoare. Căutînd în memorie o teoremă demonstrată anterior care ne-ar putea fi de folos, trebuie *să examinăm concluzia. Teoremele demonstrate anterior cu aceeaşi concluzie ca teorema pe care încercăm s-o demonstrăm au prioritate faţă de alte teoreme demonstrate anterior.*

---

[3] *CRP*, „Să cercetăm necunoscuta", pp. 191—196.

Următoarele ca prioritate, după teoremele demonstrate anterior cu aceeaşi concluzie, ar putea fi cele cu o concluzie similară cu cea a teoremei pe care vrem s-o stabilim.

13.8. PROBLEME AUXILIARE

Una din deciziile de importanţă crucială cu care este confruntat rezolvatorul o constituie alegerea unei probleme auxilare adecvate. El poate căuta o astfel de problemă lucrînd din interior, sau lucrînd din exterior, sau (şi aceasta constituie adesea procedeul cel mai judicios) lucrînd alternativ cînd din interior, cînd din exterior. „Celelalte fiind egale", anumite categorii de probleme auxiliare au mai multe şanse de a se dovedi utile, decît celelalte.

O problemă auxiliară poate împinge înainte rezolvarea problemei propuse în nemumărat de multe moduri: ea poate da ajutor material, ajutor metodologic, poate interveni ca o influenţă stimulantă, poate servi drept călăuză sau, pur şi simplu, drept exerciţiu. Dar oricare ar fi tipul de ajutor pe care-l aşteptăm din partea ei, *a priori* avem mai multe şanse să-l obţinem de la o problemă auxiliară ale cărei legături cu problema propusă sînt mai strînse, decît de la una cu legături mai slabe. *Problemele echivalente cu cea propusă au prioritate faţă de cele mai ambiţioase sau mai puţin ambiţioase, iar acestea, la rîndul lor, au prioritate faţă de toate celelalte.* Putem exprima lucrul acesta şi în alţi termeni: *Reducerea bilaterală are prioritate faţă de reducerea unilaterală, care are prioritate faţă de legăturile mai slabe* (vezi cap.9).

13.9. REZUMAT

Raţionalitatea. *Nu acţiona niciodată împotriva simţămintelor tale, dar străduieşte-te să cîntăreşti fără părtinire raţiunile pro şi contra proiectelor tale.*

Economie, dar nu limitare predeterminată. *Rămîi pe cît posibil mai aproape de problemă; dar fii gata să mergi atît de departe de ea, cît te-ar putea obliga circumstanţele s-o faci.*

Perseverenţă, dar diversitate. *Agaţă-te de detaliul examinat atît timp cît mai există speranţa să scoţi din el vreo sugestie utilă, dar străduieşte-te ca la fiecare pas, să examinezi ceva nou, un colţişor încă neexplorat, iar în tot ceea ce examinezi, străduieşte-te să sesizezi vreo sugestie utilă.*

Reguli de preferinţă.

Mai-puţin dificilul are prioritate faţă de mai-dificilul.

Mai-familiarul are prioritate față de mai-puțin-familiarul.

Un element care are mai multe puncte în comun cu problema are prioritate față de unul care are mai puține asemenea puncte.

Întregul are prioritate față de părți, părțile principale au prioritate față de celelalte părți, părțile mai puțin depărtate au prioritate față de părțile mai depărtate.

Problemele rezolvate anterior cu același tip de necunoscută ca problema în cauză au prioritate față de alte probleme rezolvate anterior.

Teoremele demonstrate anterior cu aceeași concluzie ca teorema pe care încercăm s-o demonstrăm au prioritate față de alte teoreme demonstrate anterior.

Problemele echivalente cu cea propusă au prioritate față de cele mai ambițioase sau mai puțin ambițioase, iar acestea, la rîndul lor, au prioritate față de toate celelalte. Sau: Reducerea bilaterală are prioritate față de reducerea unilaterală, care are prioritate față de legăturile mai slabe.

Să adăugăm însă, în minte, la toate regulile de preferință, precizarea: „celelalte fiind egale" (*ceteris paribus*).

EXEMPLE ȘI COMENTARII LA CAPITOLUL 13

13.1. *Geniul, expertul și începătorul.* Geniul acționează în concordanță cu anumite reguli, fără să știe că există reguli. Expertul acționează în concordanță cu anumite reguli fără să se gîndească la reguli, dar, la nevoie, ar putea cita regula care se aplică în cazul respectiv. Începătorul, străduindu-se să acționeze în concordanță cu regula, poate învăța din reușite și eșecuri adevărata semnificație a regulii. Desigur, remarcile acestea nu sînt noi. Sfîntul Augustin[4] vorbind despre oratori și despre regulile retoricii spunea: „Ei se călăuzesc după reguli fiindcă sînt elocvenți, ei nu sînt elocvenți, pentru că se călăuzesc după reguli".

13.2. *Despre prune și planuri.* Iată un fruct — să-l iau sau să-l mai las în pom? Este oare suficient de copt ca să fie cules? Desigur, dacă-l mai las în pom, s-ar mai putea coace și ar mai cîștiga în savoare; dar pe de altă parte, dacă-l las acolo ar putea fi ciugulit de păsări, atacat de insecte, doborît de vînt, l-ar putea lua copiii vecinului, și în cîte alte feluri n-ar mai putea fi distrus, degradat, furat, pierdut pentru mine. N-ar fi mai bine să-l culeg chiar acum? Are el exact culoarea, forma, frăgezimea, parfumul, aspectul general ale fructului la deplină maturitate?

Culoarea, forma, moliciunea și parfumul sînt indicii despre savoarea fructului, dar ele n-o garantează. Cînd examinez un fruct din propria mea grădină, pot evalua cu destulă siguranță valoarea unor astfel de indicii, sau cel puțin, așa cred... Cînd fructul nu-mi este chiar atît de familiar, sînt, fără îndoială, mai puțin sigur de

[4] Unul din „părinții" bisericii catolice 354—430; episcop de Hippona (Annaba), în Algeria de azi; teolog, filozof, moralist și dialectician, a căutat să împace rațiunea și credința, platonismul și dogma creștină — *N.T.*

aprecierea pe care o fac. Oricum însă, a estima savoarea unui fruct pe baza aspectului exterior este o operaţie care numai cu greu ar putea fi considerată „complet obiectivă". O astfel de estimare depinde, în mare măsură, de experienţa personală, iar aceasta este greu de admis că ar putea fi explicată complet sau demonstrată exhaustiv, rămînînd exclusiv în planul argumentelor impersonale, obiective.

Să fac sau să nu fac acest pas? Planul pe care mi l-am făcut este oare suficient de „copt" ca să-l pot duce la bun sfîrşit? Desigur nu este absolut cert că planul meu va putea fi realizat. Dacă l-aş mai cîntări un timp, poate i-aş putea evalua mai bine şansele. Pe de altă parte, mai devreme sau mai tîrziu tot va trebui să întreprind ceva şi, pentru un moment, nu-mi pot imagina un plan care să prezinte mai multe garanţii. Şi atunci — n-ar fi bine să trec imediat la realizarea acestui plan? Pare el suficient de promiţător?

Cînd culegem prune sau acţionăm după un plan, putem avea anumite argumente concrete, anumite raţiuni clare, dar este greu de pretins că deciziile s-ar baza exclusiv pe raţiune. Cînd evaluăm un aspect general — cît de savuros promite să fie un fruct, sau ce perspectivă are o situaţie de moment — evaluarea pe care o facem este sortită, prin forţa lucrurilor, să depindă şi de simţăminte care nu pot fi analizate exhaustiv.

13.3. *Stilul de lucru.* Oricine şi-ar propune să formuleze „reguli de făcut descoperiri", trebuie să-şi dea seama că, de fapt, rezolvatorii nu lucrează toţi în acelaşi fel. Fiecare rezolvator priceput are stilul său personal.

Să comparăm doi rezolvatori de probleme; unul gîndeşte ca un „inginer", celălalt — — ca un „fizician". Ei se străduiesc să rezolve aceeaşi problemă, dar lucrează diferit, fiindcă şi interesele lor sînt diferite. Inginerul urmăreşte să obţină o soluţie clară, scurtă şi eficientă (soluţia „cea mai ieftină" şi cea mai „vandabilă"). Fizicianul vrea să descopere principiul care stă la baza rezolvării. Inginerul este mai înclinat spre gîndirea „productivă", fizicianul — spre cea „creatoare" (ex. 12.11). În consecinţă, deşi scopul este acelaşi, mijloacele (calea, metodele, procedeele) pe care le preferă sînt diferite. Să considerăm un exemplu semiconcret. S-ar părea că există două moduri de a aborda problema pe care inginerul şi fizicianul încearcă, în paralel, s-o rezolve: pe de o parte, problema propusă prezintă o oarecare analogie cu o anumită problemă A, rezolvată anterior, iar pe de altă parte, problema pare să fie susceptibilă de a fi tratată în conformitate cu o anumită schemă generală B. Există deci posibilitatea de a alege între aceste două căi de acces, între A şi B. Ei bine, sînt înclinat să cred că într-o astfel de situaţie, *ceteris paribus*, inginerul va prefera să examineze problema concretă A, iar fizicianul — schema generală B.

Acest exemplu ne conduce la o propoziţie generală: stilul de lucru al celui care rezolvă problema constă, în esenţă dintr-un *sistem de preferinţe*, de priorităţi. La regulile de preferinţă rezumate în 13.9, rezolvatorul poate, eventual, adăuga altele (de pildă, „schemele generale au prioritate faţă de faptele particulare"). Mai mult, el poate *scoate în evidenţă* anumite reguli de preferinţă în detrimentul altora („Cînd există un conflict, regula X are pondere mai mare decît regula Y").

Să învăţăm noi, să-i învăţăm pe alţii şi să învăţăm cum să-i învăţăm pe alţii[1]

Ceea ce ai fost nevoit să descoperi singur, îţi lasă în minte o urmă, pe care poţi păşi din nou, cînd se iveşte nevoia.
G. C. LICHTENBERG, *Aphorismen.*

Astfel, orice cunoaştere a noastră începe cu intuiţii, de la ele trece la concepte şi se încheie cu idei".
I. KANT, *Critica raţiunii pure,* ed. în lb. engleză tradusă de J. M. D. Meiklojohn, 1878, p. 429.

Am [plănuit] să scriu în aşa fel încît cel care învaţă să poată vedea totdeauna temeiul lăuntric al celor învăţate, şi chiar în aşa fel încît izvorul însuşi al invenţiunii să iasă la iveală, prin urmare, în aşa fel încît cel care învaţă să poată înţelege totul, ca şi cum el însuşi le-ar fi inventat.
G. W. VON LEIBNIZ, *Mathematische Schriften,* editate de Gerhardt, vol. VII, p. 9.

14.1. PREDAREA NU ESTE O ŞTIINŢĂ

Vă voi împărtăşi cîteva din opiniile mele despre procesul de învăţare, despre arta de-ai învăţa pe alţii şi despre procesul de instruire profesională a profesorului.

Opiniile mele sînt rezultatul unei experienţe îndelungate. Dar chiar şi astfel de opinii personale pot fi irelevante şi eu n-aş îndrăzni să vă răpesc din timp cu o asemenea relatare, dacă predarea ar putea fi reglementată complet pe baza unor fapte şi a unor teorii ştiinţifice. Lucrurile însă nu stau aşa. Predarea, după părerea mea, nu este pur şi simplu o ramură a psihologiei aplicate — în orice caz, nu este încă, nu este în momentul de faţă.

Predarea este corelată cu procesul de dobîndire a cunoştinţelor, iar studiul experimental şi teoretic al procesului de învăţare consti-

[1] Paragrafele 14.1—14.7, au fost prezentate într-o alocuţiune la al 46-lea Congres al lui The Mathematical Association of America, la Berkeley şi au mai fost publicate anterior, vezi Bibliografia, articolul nr. 20 al autorului. (Vezi de asemenea, *CRP,* pp. 233—253. — N.T.).

tuie o ramură, cultivată extensiv şi intensiv, a psihologiei. Există însă o diferenţă de puncte de interes. Pe noi ne interesează, aici, în principal, situaţiile complexe din domeniul învăţării, cum ar fi învăţarea algebrei sau învăţarea metodicii predării, precum şi efectele lor educative cumulate pe termen lung; or, psihologii îşi consacră atenţia în cea mai mare parte, studierii unor situaţii simplificate şi de durată scurtă, şi analizînd asemenea situaţii obţin ei rezultatele cele mai bune. De aceea, psihologia actului de învăţare poate da indicaţii interesante, dar nu poate pretinde că ar spune ultimul cuvînt în problemele de predare, de transmitere a cunoştinţelor[2].

14.2. SCOPUL PREDĂRII

Nu putem aprecia în ce măsură profesorul şi-a îndeplinit sarcina, dacă nu ştim ce anume urmăreşte el; nu putem discuta coerent despre predare, dacă nu cădem de acord, măcar într-o anumită măsură, asupra a ceea ce constituie ţelul învăţămîntului.

Să circumscriem discuţia. Ceea ce mă interesează aici este matematitica din planul de învăţămînt al şcolii medii şi eu mi-am format de mult o idee despre rostul acestei materii din programul de învăţămînt: în primul rînd şi cu precădere ea trebuie să-i înveţe pe tineri SĂ GÎNDEASCĂ.

Aceasta este convingerea mea fermă; s-ar putea să nu fiţi întru totul sau pînă la capăt de acord cu ea, dar voi presupune că o admiteţi măcar într-o anumită măsură. Dacă consideraţi că nu „a-l învăţa pe elev să gîndească" constituie scopul principal al orelor de matematică, aţi putea admite măcar că acesta constituie totuşi unul din obiectivele secundare — ceea ce ar fi suficient pentru a avea o bază comună în discuţia care urmează.

„A-l învăţa pe elev să gîndească" — aceasta înseamnă că profesorul de matematică trebuie nu numai să transmită informaţii, ci şi să se străduiască să dezvolte la elevii săi capacitatea de a utiliza informaţia pe care le-o împărteşeşte; el trebuie să pună accent pe *know-how*, pe atitudini utile ale intelectului, pe deprinderi de dorit în procesul de gîndire. Poate că acest scop ar necesita o explicitare mai amplă (eventual, ansamblul lucrărilor mele publicate în legătură cu predarea ar putea fi considerate drept o astfel de explicitare mai amplă), dar aici va fi suficient să scoatem în evidenţă două aspecte.

---

[2] E. R. Hilgard. *Theories of Learning*, ed. a II-a, Appleton-Century-Crofts, New York, 1956, pp. 485—490.

Primul — gîndirea de care ne ocupăm aici este nu reveria, visarea-cu-ochii-deschişi, ci „gîndirea cu un scop", sau „gîndirea voluntară" (William James), sau „gîndirea productivă" (Max Wertheimer). O astfel de „gîndire" poate fi identificată aici, cel puţin într-o primă aproximaţie, cu actul de „a rezolva o problemă". În orice caz, după părerea mea, unul din ţelurile principale ale cursului de matematică din şcoala medie este să dezvolte capacitatea elevului de a rezolva probleme.

Al doilea — gîndirea matematică nu este pur „formală"; ea se ocupă nu numai de axiome, definiţii şi demonstraţii riguroase, ci include multe alte lucruri: generalizarea pornind de la cazuri observate, argumentarea inductivă, argumentarea prin analogie, identificarea unui concept matematic într-o situaţie concretă sau degajarea lui dintr-o astfel de situaţie. Profesorul de matematică are excelente ocazii de a-şi familiariza elevii cu aceste procese de gîndire „nonformală", extrem de importante, şi părerea mea este că el ar trebui să folosească mai bine aceste ocazii, ba chiar mult mai bine, decît o face în prezent. Într-o formulare incompletă, dar concisă — să-l învăţăm pe elev să demonstreze, prin toate mijloacele, dar să-l învăţăm şi să ghicească.

14.3. PREDAREA ESTE O ARTĂ

Predarea — măiestria profesorului — este nu o ştiinţă, ci o artă. Opinia aceasta a fost exprimată de atît de mulţi şi de atîtea ori, încît mă simt oarecum jenat repetînd-o. Dar dacă renunţăm la generalitatea devenită oarecum loc comun şi ne coborîm la nivelul detaliului specific, am putea sesiza, într-o lumină instructivă, cîteva sfori ascunse ale meşteşugului profesorului.

Este evident că predarea are multe puncte comune cu arta actorului. Să presupunem, de pildă, că aveţi de expus în faţa clasei o demonstraţie pe care o cunoaşteţi de acum la perfecţie, fiindcă aţi mai expus-o de cine ştie cîte ori, în anii precedenţi, la acelaşi curs. Natural, demonstraţia aceea nu vă mai poate pasiona cu adevărat — dar, vă rog, n-o arătaţi în faţa clasei; dacă dv. păreţi plictisit de ceea ce faceţi, întreaga clasă va fi plictisită. Pretindeţi sus şi tare, cînd începeţi demonstraţia, că ea vă intrigă în cel mai înalt grad; pretindeţi, pe parcurs, că v-a venit o idee strălucită; pretindeţi, cînd aţi terminat demonstraţia, că sînteţi surprins şi entuziasmat. Trebuie să jucaţi puţin teatru, spre binele elevilor dv., fiindcă s-ar putea ca

uneori ei să învețe mai mult din comportarea dv. manifestă, decît din tema pe care le-o prezentați.

Trebuie să mărturisesc că mie, unul, îmi face chiar plăcere să joc puțin teatru, mai ales acum cînd sînt bătrîn și cînd rareori mai reușesc să descopăr eu însumi ceva nou în matematică ; mi se întîmplă să încerc o oarecare satisfacție în a „juca" în fața auditoriului cum am descoperit cîndva cutare sau cutare detaliu.

Este mai puțin evident, dar predarea are ceva comun și cu muzica. Știți, fără îndoială, că profesorul trebuie să spună ceea ce are de spus nu numai o dată sau de două ori, ci de trei, de patru sau de mai multe ori. Or, a repeta aceeași frază de mai multe ori, fără pauză și fără nici o modificare, poate fi teribil de plictisitor pentru auditoriu și poate compromite iremediabil însuși scopul urmărit cu acea frază. Ei bine, puteți învăța de la compozitori, cum este mai bine să procedați. Una din formele principale de compoziție muzicală este „tema cu variațiuni". Transpunînd această formă artistică din muzică în predarea didactică, începeți prin a enunța fraza în forma ei cea mai simplă ; după aceea o repetați cu o mică modificare ; apoi o repetați din nou cu ceva mai multă culoare și așa mai departe ; puteți încheia revenind la formularea simplă de la început. O altă formă de compoziție muzicală este rondoul. Transpunînd rondoul din muzică în predare, repetați aceeași frază esențială de mai multe ori cu foarte puține modificări, sau chiar cu nici una, dar pentru contrast, intercalați între două repetări vreun element ilustrativ adecvat. Aș vrea să cred că data viitoare cînd veți asculta o temă cu variațiuni de Beethoven sau un rondo de Mozart, vă veți gîndi puțin și la modul cum v-ați putea îmbunătăți metoda de predare.

Cînd și cînd, predarea se poate apropia de poezie și, cînd și cînd, poate friza vulgaritatea. Îmi permiteți să vă povestesc o mică întîmplare cu marele Einstein? Îl ascultam cîndva pe Einstein care discuta cu un grup de fizicieni la o recepție. „De ce au toți electronii aceeași sarcină?" — spunea el. „Bine — dar oușoarele din balega de capră de ce au toate aceeași dimensiune?." De ce vorbea Einstein în felul acesta? Doar ca să-i facă pe cîțiva snobi să ridice din sprîncene? Nu i-ar fi displăcut s-o facă — cred eu. Probabil însă că el țintea un lucru mult mai profund. Eu, unul, nu cred că remarca lui Einstein, auzită întîmplător de mine, era cu totul fortuită. În orice caz, ea am învățat ceva din ea : abstracțiile sînt importante ; și tocmai de aceea să folosim orice mijloc pentru a le face mai tangibile. Nimic nu este prea bun sau prea rău, prea poetic sau prea trivial, cînd este vorba de a clarifica o abstracție. După cum spunea Montaigne — adevărul este un lucru atît de mare, încît nu trebuie să disprețuim nici un mij-

loc care ne-ar putea conduce la el. De aceea, dacă firea vă îndeamnă să puneţi puţină poezie, sau puţină trivialitate în ceea ce spuneţi elevilor, să nu vă inhibaţi pornirea — ar fi nejustificat.

14.4. TREI PRINCIPII ALE ÎNVĂŢĂRII

Predarea este un meşteşug care are nenumărate mici vicleşuguri, nenumărate resorturi ascunse. Fiecare profesor priceput are procedeele sale favorite şi fiecare profesor priceput se deosebeşte de oricare altul la fel de priceput.

Orice procedeu eficient de predare trebuie să fie corelat, într-un fel sau altul, cu natura procesului de învăţare. Despre procesul de învăţare nu ştim prea multe, dar chiar şi o prezentare cu totul sumară a cîtorva dintre trăsăturile lui cele mai evidente ar putea arunca o lumină bine venită asupra trucurilor meşteşugului nostru. Permiteţi-mi să prezint o astfel de schiţă foarte sumară sub forma a trei „principii" ale învăţării. Formularea şi îmbinarea lor le-am ales cum ni s-a părut mai bine, dar „principiile" ca atare nu sînt nicidecum noi ; ele au fost formulate şi răsformulate sub diferite forme, s-a arătat că ele decurg din experienţa de veacuri, au căpătat girul opiniei deliberate a multor oameni de valoare, şi pe deasupra, sînt sugerate de însuşi studiul psihologic al actului de învăţare.

Aceste „principii ale învăţării" pot fi considerate în acelaşi timp şi „principii ale predării", şi tocmai aceasta este raţiunea de bază pentru care le vom examina aici — despre toate acestea vom mai avea şi altele de spus, dar mai tîrziu.

(1) *Învăţarea activă.* S-a spus de către mulţi, şi în multe feluri, că învăţarea trebuie să fie activă, nu — exclusiv pasivă sau receptivă ; dacă te mulţumeşti să citeşti cărţi, sau să asculţi prelegeri sau să vizionezi filme, fără a adăuga nimic de la tine — vreo acţiune a propriului tău intelect, este greu să înveţi ceva şi este sigur că nu poţi învăţa multe.

Există şi o altă opinie exprimată frecvent (şi strîns legată de aceasta) : *Calea cea mai bună de a învăţa ceva este să descoperi singur.* Lichtenberg (un fizician german din secolul al XVIII-lea, cunoscut mai mult ca autor de aforisme) vine cu o completare interesantă : *Ceea ce ai fost nevoit să descoperi singur îţi lasă în minte o urmă pe care poţi păşi din nou, cînd se iveşte nevoia.* Mai puţin pregnantă dar cu o aplicabilitate poate mai largă este următoarea propoziţie : *Pentru a învăţa eficient, cel ce învaţă trebuie să descopere singur o parte pe cît posibil mai mare — în circumstanţele date, din materialul pe care-l are de învăţat.*

Aceasta *este principiul învățării active* (*Arbeitsprinzip*). Este un principiu foarte vechi: el stă la baza ideii „metodei socratice".

(2) *Motivația optimă.* Am spus că învățarea trebuie să fie activă. Dar cel care învață nu va fi activ, nu va acționa, dacă nu are nici un motiv să acționeze. El trebuie determinat să acționeze de vreun stimul sau altul, de pildă de speranța unei recompense. Stimulul cel mai eficient al învățării trebuie să-l constituie interesul însuși pentru materialul care urmează să fie învățat, iar răsplata cea mai de preț pentru o astfel de activitate trebuie s-o constituie însăși plăcerea activității intense a intelectului. Dar dacă nu putem realiza situația optimă, trebuie să încercăm s-o realizăm măcar pe cea următoare în scara preferințelor, sau pe a treia și trebuie să nu uităm că există și motivații mai puțin intrinsece învățării.

Pentru ca învățarea să fie eficientă, trebuie ca cel care învață să fie interesat de materialul pe care-l are de învățat și activitatea de învățare să-i facă plăcere. Dar, pe lîngă aceste motivații optime ale învățării, există și altele, unele dintre ele fiind chiar de dorit. (Pedeapsa pentru că n-ai învățat este motivația poate cel mai puțin de dorit.)

Să numim această propoziție *principiul motivației optime.*

(3) *Faze consecutive.* Să pornim de la o sențință deseori citată a lui Kant: *Astfel, orice cunoaștere a noastră începe cu intuiția, de la ele trece la concepte și se încheie cu idei.* În traducerea engleză sînt folosiți termenii *cognition, intuition, ideea*—cunoaștere, intuiție, idee. N-aș putea (cine ar putea?) spune exact în ce sens înțelege Kant să folosească acești termeni; v-aș ruga însă să-mi permiteți să vă prezint versiunea mea a dictonului lui Kant[3]:

Învățarea începe cu acțiunea și cu percepția, de la ele trece la cuvinte și concepte și trebuie să se încheie cu deprinderi de dorit ale intelectului.

Pentru început v-aș propune să luați termenii acestei sentințe într-o accepție pe care dv. înșivă ați putea-o ilustra concret, pe baza propriei dv. experiențe. (Unul din efectele „de dorit" constă tocmai în a vă incita să reflectați asupra propriei dv. experiențe.) Termenul „învățare" ar putea să vă amintească o sală de clasă, și pe dv. înșivă ca elev, sau ca profesor; iar „acțiunea și percepția" ar putea să vă sugereze mînuirea și perceperea vizuală a unor obiecte concrete,

[3] În traducerea românească **(Immanuel Kant,** *Critica rațiunii pure*; trad. de N. Bagdasar și Elena Moisuc, Ed. Științifică, București, 1969): *Orice cunoaștere a noastră începe cu simțurile, înaintează de aici spre intelect și sfîrșește cu rațiunea* (p.283). Versiunea autorului este *pertinentă* fiindcă, la Kant, *intuiția* NU înseamnă sesizarea directă și imediată a esenței obiectelor prezente spiritului, *ci* facultatea de a *percepe* nemijlocit un obiect dat, sensibil; iar *ideile* sînt noțiunile cu care operează cel de-al treilea mijloc de cunoaștere, *rațiunea*, și îi indică acesteia calea pe care trebuie să meargă în cercetările ei și o ajută să-și sistematizeze cunoștințele. (*op.cit.* pp. 652, 655).—*N.T.*

să spunem—pietricele, sau mere, sau bastonaşe Cuisenaire ; sau rigla şi compasul ; sau instrumentele dintr-un laborator ; şi aşa mai departe.

La o astfel de interpretare concretă a termenilor se poate ajunge destul de uşor şi de firesc, cînd ne referim la „obiecte" de studiu simple şi elementare. Dar faze similare ajungem să sesizăm, după un timp, şi în activitatea de însuşire a unui material mai complex, de nivel mai înalt. Să distingem trei faze : *explorarea, formalizarea* şi *asimilarea.*

O primă fază, cea de *explorare,* este mai apropiată de acţiune şi de percepţie, şi se desfăşoară la un nivel mai intuitiv, mai euristic.

O a doua fază, cea de *formalizare,* se ridică de acum la un nivel mai conceptual, fiindă introduce terminologie, definiţii, demonstraţii.

Faza de *asimilare* vine ultima : ea trebuie să însemne o tentativă de a surprinde „raţiunea internă" a lucrurilor, materialul învăţat trebuie digerat mintal, trebuie asimilat, integrat în sistemul de cunoştinţe, în viziunea mintală de ansamblu a celui care învaţă ; această fază netezeşte drumul pe de o parte spre aplicaţii, şi spre generalizări de ordin superior, pe de altă parte.

Să rezumăm : *Pentru ca procesul de învăţare să fie eficient, faza transpunerii în cuvinte şi a formării conceptelor trebuie să fie precedată de o fază de explorare ; iar în final, materialul învăţat trebuie să fie asimilat în —, şi să-şi aducă contribuţia la comportamentul integral al intelectului celui care învaţă.*

Acesta este *principiul fazelor consecutive.*

14.5. TREI PRINCIPII ALE PREDĂRII

Profesorul trebuie să fie conştient de căile pe care se dobîndesc cunoştinţele. El trebuie să le evite pe cele ineficiente, şi să profite de avantajul celor eficiente. În acest scop, el se poate prevala de cele trei principii pe care le-am trecut în revistă mai sus, principiul învăţării active, principiul motivaţiei optime şi principiul fazelor consecutive ; aceste principii ale învăţării sînt şi principii ale predării. Există însă o condiţie : ca să se poată folosi el însuşi de un astfel de principiu, profesorului nu-i este suficient să-l ştie din auzite ; trebuie să-l înţeleagă pînă în esenţa cea mai lăuntrică, pe baza propriei sale experinţe bine analizate.

(1) *Învăţarea activă.* Ceea ce spune profesorul la lecţie, nu-i lipsit de importanţă, dar ceea ce gîndesc elevii este de o mie de ori mai important. Ideile trebuie să se nască în însăşi mintea elevului ; iar profesorul trebuie să acţioneze doar ca o moaşă.

Acesta este un precept socratic clasic, iar forma de predare care-l reflectă cel mai bine este dialogul socratic. Profesorul de şcoală medie

are un avantaj net față de cel din învățămîntul superior prin aceea că poate folosi forma dialogului pe scară mult mai largă. Din nefericire, și în școala medie timpul este limitat și există un material obligatoriu care trebuie parcurs în întregime, așa că nu toate temele pot fi tratate sub formă de dialog. Principiul este însă — să-i lăsăm pe elevi *să descopere singuri pe cît posibil mai mult, în condițiile date.*

Se poate face mult mai mult decît se face de obicei, — de aceasta sînt sigur. Permiteți-mi să vă recomand aici doar un singur mic șiretlic pedagogic: determinați-i pe elevi *să participe activ la formularea problemei* pe care o vor avea apoi de rezolvat. Dacă elevii au luat parte la conturarea și precizarea problemei, ei vor lucra după aceea mult mai activ la rezolvarea ei.

Într-adevăr, în activitatea omului de știință, se poate întîmpla ca formularea problemei să constituie partea cea mai de preț a unei descoperiri — deseori, rezolvarea necesită mai puțină perspicacitate și originalitate decît formularea. De aceea, antrenîndu-i pe elevi să ia parte la formulare, nu numai că le strecurați cu abilitate un mobil ca ei să lucreze cu mai multă încordare, dar le transmiteți și o atitudine a intelectului cu totul de dorit.

(2) *Motivația optimă.* Profesorul trebuie să se considere un fel de negustor: el vrea să „vîndă" tinerilor un pic de matematică. Or, dacă un negustor are dificultăți cu desfacerea și clienții săi potențiali refuză să cumpere, el nu trebuie să dea toată vina pe ei. Nu uitați — în principiu, clientul are totdeauna dreptate, și, cîteodată, și în practică. S-ar putea ca tînărul care refuză să învețe matematică să aibă dreptate; poate că el nu este nici leneș, nici mărginit, atît doar că pe el îl interesează mai mult altceva — există atîtea și atîtea lucruri interesante în lumea asta mare. Este de datoria dv. de profesor, de „negustor de cunoștințe", să-l convingeți pe elev că matematica *este* interesantă, că tema pe care o discutați în momentul acela este interesantă, că merită să-și dea osteneala cu problema pe care i-ați pretins s-o rezolve.

De aceea, profesorul trebuie să dea multă atenție alegerii, formulării și prezentării adecvate a problemei pe care o propune. Problema trebuie să aibă sens și să fie relevantă, din punctul de vedere al elevului; ea trebuie să fie legată, dacă este posibil, de experiența de fiecare zi a elevilor și trebuie introdusă, dacă este posibil, cu o mică glumă sau un mic paradox. Sau — problema trebuie să pornească de la un fapt cunoscut foarte familiar; ea trebuie să aibă, dacă este posibil, un element de interes general sau, eventual, să prezinte o oarecare utilitate practică. Dacă vrem să-l mobilizăm pe elev, să-l determinăm să depună un efort autentic, trebuie să-i dăm o motivație, ceva care

să-l facă să bănuiască că merită să-şi bată capul cu tema pe care o are.

Motivarea cea mai bună este însuşi interesul elevului pentru tema de care se ocupă. Există însă şi alte motivări, şi ele nu trebuie neglijate. Permiteţi-mi să vă recomand aici doar un singur mic vicleşug pedagogic. Înainte ca elevii să „facă" problema, determinaţi-i să încerce să *ghicească rezultatul,* sau măcar o parte a rezultatului. Elevul care şi-a exprimat o opinie automat s-a angajat într-un anumit fel; prestigiul şi amorul lui propriu depind întrucîtva de rezultat, el este nerăbdător să afle dacă supoziţia lui se va dovedi sau nu corectă, şi în felul acesta, el se va interesa activ de tema pe care o rezolvă el şi de ceea ce se lucrează în clasă — nu-l va mai fura somnul, şi nici nu se va mai purta nedisciplinat.

Într-adevăr, în activitatea omului de ştiinţă demonstraţia este precedată aproape totdeauna de o conjectură. De aceea, antrenîndu-i pe elevi să încerce să ghicească rezultatul, nu numai că le stîrniţi cu abilitate un mobil ca ei să lucreze cu mai multă încordare, dar le transmiteţi şi o atitudine a intelectului cu totul de dorit.

(3) *Faze consecutive.* Neajunsul obişnuitelor paragrafe cu probleme din manualele de şcoală medie este că ele conţin aproape exclusiv exemple de rutină. Un exemplu de rutină este un exemplu cu cîmp limitat: el ilustrează o singură regulă, luată izolat şi dă posibilitate elevului să se exerseze în aplicarea acelei reguli. Asemenea exemple de rutină pot fi utile, chiar necesare — nu o contest — dar ele păcătuiesc prin aceea că trec peste două faze importante ale procesului de învăţare: faza de explorare şi faza de asimilare. Atît o fază cît şi cealaltă urmăresc să coreleze problema în cauză cu lumea înconjurătoare şi cu alte cunoştinţe, prima — înainte de rezolvarea formală, a doua-după. Or, o problemă de rutină este legată în mod evident de regula pe care o ilustrează, şi nu este legată aproape de loc de nimic altceva, aşa că este practic inutil să se caute alte conexiuni. În contrast cu asemenea probleme de rutină, în şcoala medie ar trebui prezentate, măcar din cînd în cînd, şi probleme mai stimulatoare, care să pună mai mult la încercare puterea de judecată, probleme cu substrat bogat care să merite să fie explorate în continuare, şi probleme care să dea o primă idee despre ceea ce înseamnă munca unui om de ştiinţă.

Iată o sugestie de ordin practic: dacă problema pe care vreţi s-o discutaţi în clasă se pretează la aşa ceva, antrenaţi-i pe elevi într-o primă investigaţie preliminară; aceasta le-ar putea stîrni apetitul să caute apoi şi demonstraţia formală. Şi rezervaţi-vă negreşit cîteva minute pentru o discuţie retrospectivă, a soluţiei definitive; ea v-a putea fi de mare folos, mai tîrziu, la rezolvarea altor probleme

(4) După această discuţie cu totul incompletă, trebuie să pun punct explicitării celor trei principii — învăţarea activă, motivaţia optimă, faze consecutive. Cred că aceste principii pot răzbate pînă în detaliile muncii de zi cu zi a profesorului şi îl pot ajuta să devină profesor mai bun. Şi mai cred, de asemenea, că aceste principii trebuie să răzbată şi în planificarea de ansamblu a programului de învăţămînt, în planificarea fiecărui curs din programul de învăţămînt, şi în planificarea fiecărui capitol al fiecărui curs.

Departe însă de mine pretenţia că ar trebui să acceptaţi negreşit aceste principii. Ele decurg dintr-o anumită concepţie de ansamblu, dintr-o anumită filozofie, şi s-ar putea ca dv. să aveţi altă filozofie. Or, în activitatea didactică — în predare — ca şi în cîteva alte domenii, nu contează prea mult că aveţi cutare sau cutare filozofie. Contează mai mult dacă aveţi sau nu o filozofie. Şi contează foarte mult dacă vă străduiţi sau nu să vă călăuziţi după acea filozofie. Singurele principii ale predării care îmi displac cu desăvîrşire sînt cele cărora le eşti devotat doar în vorbe.

14.6. EXEMPLE

Exemplele sînt mai bune decît preceptele; permiteţi-mi de aceea să trec la exemple — ele îmi plac mult mai mult decît discuţiile generale. Mă interesează aici, în principiu, predarea în şcoala medie şi vă voi prezenta cîteva exemple la acest nivel. Mărturisesc că simt deseori chiar o anumită satisfacţie în a prezenta exemple la nivelul şcolii medii, şi vă pot spune şi de ce: mă străduiesc să le tratez în aşa fel încît să-mi reamintească, sub un aspect sau altul, propria mea experienţă în domeniul investigaţiei matematice; îmi retrăiesc, la scară redusă, strădaniile din trecut.

(1) *O problemă de clasa a* VII-a. Forma deliberată fundamentală a predării didactice este dialogul socratic. La una din clasele „mici" ale şcolii medii, eventual într-a VII-a, profesorul poate începe dialogul astfel:

„Ce oră este la amiază la San Francisco?"

„Dar, d-le profesor, asta o ştie oricine" — ar putea replica un puşti mai vioi, sau chiar — „Dar, d-le profesor, întrebarea este prostească: este ora 12".

„Şi ce oră este la amiază la Sacramento?"

„Ora 12 — bineînţeles 12 — ziua, nu 12 noaptea."

„Şi ce oră este la amiază la New York?"

„Ora 12".

„Bine, dar eu credeam că San Francisco şi New York n-au amiaza în acelaşi moment, şi voi îmi spuneţi că şi unul şi altul au amiaza la ora 12.!"

„Da, dar San Francisco are amiaza la 12 după timpul standard vestic (*Western Standard Time*) iar New York-ul — la 12 după timpul standard estic (*Eastern Standard Time*)."[4]

„Şi după ce timp — standard se stabileşte ora la Sacramento, cel estic sau cel vestic?"

„După cel vestic — bineînţeles."

„Dar cei din San Francisco şi cei din Sacramento au amiaza în acelaşi moment?"

„. . . . . "

„Nu ştiţi răspunsul? Ei bine, încercaţi să-l ghiciţi: unde vine amiaza mai devreme, la San Francisco sau la Sacramento?; sau poate că are loc în aceeaşi clipă în ambele locuri?"

Cum vă place ideea mea de-a discuta „socratic" cu puştii dintr-a VII-a? În orice caz, restul vi-l puteţi imagina singuri. Alegîndu-şi judicios întrebările, profesorul trebuie — imitîndu-l pe Socrate — să „scoată" de la elevi cîteva puncte:

(a) Trebuie făcut distincţie între amiaza „astronomică" şi amiaza convenţională, sau „legală".

(b) Definiţiile celor două „amieze".

(c) Ce înseamnă „timp standard": cum şi de ce a fost împărţită suprafaţa globului în fuse orare.

(d) Formularea problemei: „La ce oră după timpul standard vestic are loc amiaza astronomică la San Francisco?"

(e) Singura dată specifică necesară pentru rezolvarea problemei de la punctul (d) este longitudinea oraşului San Francisco (cu o aproximaţie suficientă pentru elevii de clasa a VII-a).

Problema nu este prea uşoară. Am încercat-o cu două auditorii; în ambele, audienţii erau profesori de şcoală medie. Unii au avut nevoie de circa 25 minute ca s-o rezolve, ceilalţi — de 35 minute.

(2) Trebuie să vă spun că această mică problemă de clasa a VII-a prezintă diverse avantaje; şi dintre ele, poate principalul este acela că pune accent pe o operaţie mintală esenţială deplorabil de neglijată în problemele propuse de obicei în manuale: *sesizarea conceptului matematic esenţial într-o situaţie concretă*. Pentru a rezolva pro-

[4] Sacramento este capitala statului California, în care este situat şi San Francisco; Sacramento este la circa 140 km nord-est de San Francisco, aşa că longitudinile lor sînt un pic diferite. În general, teritoriul Statelor Unite se întinde pe patru fuse orare, iar între ora legală pe coasta de est (de exemplu la New York) şi ora legală pe coasta de vest (de exemplu San Francisco) există decalaj de 3 ore — *N.T.*

blema elevii trebuie să sesizeze o *proporționalitate*: momentul culminației Soarelui într-un punct de pe glob variază proporțional cu longitudinea locului.

Într-adevăr, în comparație cu multe probleme penibil de artificiale din manualele de școală medie, problema noastră este perfect naturală, este o problemă „reală". În problemele serioase de matematică aplicată, *formularea* adecvată a problemei constituie totdeauna o sarcină majoră, și deseori — sarcina cea mai importantă; or, mica noastră problemă, care poate fi propusă liniștit unei clase a VII-a de nivel mediu, are tocmai această trăsătură. Apoi — problemele serioase de matematică aplicată pot conduce la acțiuni practice, cum ar fi, de pildă, adoptarea unui proces de fabricație mai bun; mica noastră problemă este în măsură să le explice elevilor dintr-a VII-a de ce a fost adoptat sistemul celor 24 fuse orare, fiecare cu cîte un același timp standard. În ansamblu, cred că, mînuită cu oarecare abilitate de profesor, problema aceasta l-ar putea ajuta pe un viitor om de știință sau pe un viitor inginer să-și descopere vocația și ar putea contribui, de asemenea, la maturizarea intelectuală a acelor elevi care nu vor folosi matematica în profesiunea lor viitoare.

De remarcat, de asemenea, că această problemă ilustrează cîteva mici vicleșuguri pedagogice menționate anterior; elevii contribuie activ la formularea problemei [cf. 14.5(1)]. În adevăr, faza de explorare, care conduce la formularea problemei, este aici proeminent de importantă [cf. 14.5(3)]. Apoi, elevii sînt învățați să ghicească un punct esențial al soluției [cf. 14.5(2)].

(3) *O problemă de clasa a* X-a. Să considerăm un alt exemplu. Să pornim de la problema de construcție geometrică probabil cea mai familiară: *să se construiască triunghiul, fiind date laturile lui.* Cum analogia este o sursă atît de fertilă de invenții, este firesc să punem întrebarea: care este problema analogă din geometria în spațiu? Un elev „mijlociu", care are unele cunoștințe de geometrie în spațiu, poate fi călăuzit să formuleze următoarea problemă: *să se construiască tetraedrul, fiind date cele șase muchii.*

Am putea menționa, în treacăt, că această problemă cu tetraedrul este cît se poate de apropiată — în măsura în care o permite nivelul obișnuit al școlii medii — de problemele practice care se rezolvă prin așa-numitul „desen industrial". Inginerii și proiectanții folosesc desene judicios întocmite ca să dea informații precise despre detaliile formei tridimensionale a unor mașini sau clădiri care urmează să fie construite; noi aici intenționăm să construim un tetraedru cu muchii date. Ne-am putea propune, de pildă, să-l tăiem dintr-un butuc.

Aceasta ne determină să pretindem o rezolvare exactă, printr-o construcţie cu rigla şi cu compasul, şi ne condruce la discutarea următoarei chestiuni: care anume detalii ale tetraedului ar trebui construite? În cele din urmă, la capătul unei discuţii cu elevii, călăuzită cu abilitate, ar putea rezulta, bunăoară, următoarea formulare definitivă a problemei:

Sînt date lungimile celor şase muchii

$$AB,\ BC,\ CA,\ AD,\ BD,\ CD$$

ale tetraedrului ABCD. Considerînd triunghiul ABC drept bază a tetraedrului, să se construiască cu rigla şi compasul unghiurile pe care baza le face cu celelalte trei feţe.

Cunoaşterea acestor trei unghiuri este absolut necesară pentru a putea tăia din lemn solidul, corpul tridimensional dorit. Dar în discuţie pot interveni şi alte elemente ale tetraedrului, cum ar fi

(a) înălţimea coborîtă din vîrful D opus bazei,

(b) piciorul F al acestei înălţimi, pe planul bazei;

elementele (a) şi (b) ar putea contribui la cunoaşterea solidului, nu-i exclus ca ele să ne ajute la găsirea unghiurilor căutate, aşa că am putea încerca să le construim şi pe ele.

(4) Din datele problemei putem construi imediat cele patru feţe triunghiulare asamblate ca în fig.14.1. (Pe figură au fost păstrate mici arce din cercurile folosite la construirea triunghiurilor, pentru a arăta că $AD_2 = AD_3$, $BD_3 = BD_1$, $CD_1 = CD_2$.) Dacă copiem pe carton fig.14.1 şi-i adăugăm trei aripioare, o putem decupa apoi după contur şi, pliindo în lungul laturilor bazei şi lipindu-i aripioarele, putem obţine în felul acesta un model spaţial pe care putem măsura direct, dar bineînţeles, cu aproximaţie, înălţimea şi unghiurile de care este vorba. Acest procedeu şi obiectul de carton obţinut este foarte sugestiv, dar nu este ceea ce ni se cere să facem: trebuie să construim înălţimea, piciorul înălţimii şi unghiurile în discuţie folosind rigla şi compasul.

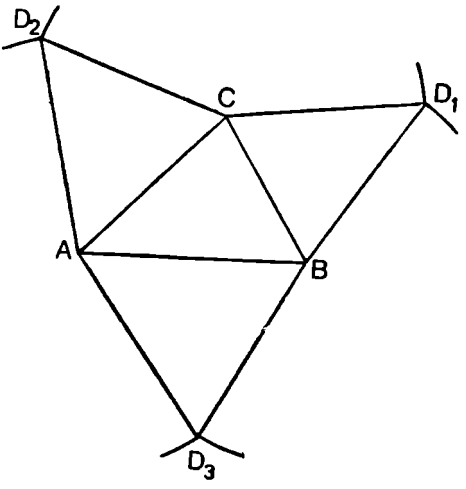


Fig. 14.1. Tetraedrul determinat de cele şase muchii

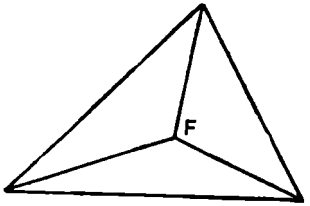


Fig. 14.2. Un aspect al „produsului finit"

(5) S-ar putea dovedi util pentru elaborarea rezolvării să considerăm pentru un moment că problema în întregime, sau măcar o anumită parte a ei, ar fi „gata rezolvată". Să reprezentăm grafic cum va arăta fig. 14.1 după ce cele trei fețe laterale au fost rotite în jurul cîte unei laturi a bazei și au fost aduse în pozițiile cuvenite. Fig.14.2 reprezintă proiecția ortogonală a tetraedrului pe planul bazei lui, planul triunghiului ABC. Punctul F este proiecția vîrfului D: este tocmai piciorul înălțimii coborîte din D.

(6) Trecerea de la fig.14.1 la fig.14.2 poate fi vizualizată cu sau fără folosirea unui model de carton. Să ne concentrăm atenția asupra uneia din acele trei fețe laterale, de pildă asupra ΔBCD_1 care, inițial, este situată în același plan cu ΔABC — în planul fig.14.1, pe care ni-l închipuim orizontal. Să urmărim triunghiul BCD_1 în timp ce se rotește în jurul laturii sale fixe, latura BC, și să nu scăpăm din ochii deplasarea vîrfului D_1, singurul mobil dintre cele trei vîrfuri ale triunghiului. Acest vîrf D_1 descrie un arc de cerc. Centrul acestui cerc este un punct de pe BC; planul acestui cerc este perpendicular pe axa de rotație BC, care este orizontală; prin urmare D_1 se mișcă într-un plan vertical. De aceea, proiecția traiectoriei vîrfului mobil D_1, pe planul orizontal al fig.14.1, este o linie dreaptă, perpendiculară pe BC și care trece prin poziția inițială a lui D_1.

Dar mai există două triunghiuri care execută mișcări de rotație — în total sînt trei triunghiuri. Există trei vîrfuri mobile, care se deplasează pe traiectorii circulare cuprinse în plane verticale, pînă ce ... — care este punctul terminus?

(7) Cred că cititorul a ghicit de acum rezultatul (poate, chiar înainte de a fi terminat de citit punctul precedent): cele trei drepte trasate prin pozițiile inițiale ale vîrfurilor D_1, D_2 și D_3 (vezi fig.14.1), perpendiculare respectiv pe BC, CA și AB se întîlnesc într-un punct, punctul F — elementul care ni l-am propus ca „țintă" suplimentară (b) (vezi fig. 14.3). (Pentru a determina pe F este suficient să trasăm două din cele trei perpendiculare, dar și a treia ne poate fi de folos, pentru a verifica precizia desenului.) Ceea ce a mai rămas de făcut este ușor. Fie M — punctul de intersecție al segmentelor D_1F și BC (vezi fig. 14.3). Construim triunghiul dreptunghic FMD (vezi fig. 14.4) de ipotenuză $MD = MD_1$ și catetă MF. Evident, FD este înălțimea [elementul pe care ni l-am propus ca „țintă" suplimentară (a)], iar unghiul $\measuredangle FMD$ măsoară unghiul die-

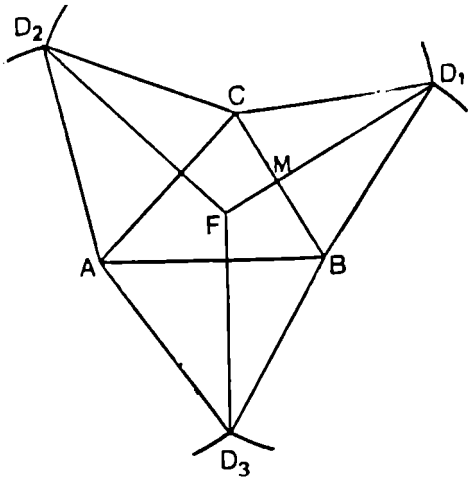


Fig. 14.3. Trei călători — o singură destinație

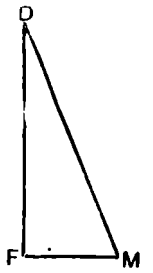


Fig. 14.4. Restul este ușor!

dru format de baza — ΔABC și fața laterală ΔDBC, pe care-l cerea problema.

(8) O problemă bună generează alte probleme bune — aceasta este una din virtuțile unei asemenea probleme.

Rezolvarea precedentă poate, și trebuie, să ne lase în minte o anumită îndoială. Am obținut rezultatul reprezentat pe fig. 14.3. [și anume că cele trei perpendiculare descrise mai sus sînt concurente] considerînd traiectoriile unor corpuri în mișcarea de rotație. Dar rezultatul este o propoziție de geometrie și, ca atare, el ar trebui stabilit independent de ideea de mișcare, pe cale pur geometrică.

Ce-i drept, este relativ ușor să eliminăm din considerațiile de mai sus [punctele (6) și (7)] ideea de mișcare, și să stabilim rezultatul pornind de la considerații de geometrie în spațiu (intersecție de sfere, proiecția ortogonală)[5]. Dar și așa ar rămîne o îndoială: rezultatul este o propoziție de geometrie plană și, ca atare, ar trebui stabilit independent de orice reprezentări de geometrie în spațiu, folosind exclusiv geometria plană. (Cum?)

(9) De remarcat că și această problemă de clasa a X-a ilustrează diferite aspecte ale predării, discutate anterior. De pildă, elevii au posibilitatea și chiar ar trebui să participe activ la formu-

[5] Cf. 6.2(3).

larea definitivă a problemei, există şi aici o fază de explorare şi un substrat — un fond aplicativ — bogat.

Dar iată care este aspectul pe care aş vrea să-l subliniez în mod deosebit: o problemă ca aceasta este de natură să polarizeze şi să reţină atenţia elevilor. Deşi nu este atît de apropiată de experienţa de toate zilele ca problema anterioară, de clasa a VII-a, ea porneşte de la cunoştinţe dintre cele mai familiare (construirea triunghiului, cînd se cunosc laturile), pune accentul, încă de la început, pe o idee de interes general (analogia) şi atrage atenţia asupra unor eventuale aplicaţii practice (desenul industrial). Cu puţină abilitate şi bunăvoinţă, profesorul ar trebui să reuşească să cîştige şi să menţină trează atenţia elevilor săi pentru această problemă — a celor care nu sînt iremediabil apatici.

14.7. METODICA PREDĂRII, SAU: SĂ ÎNVĂŢĂM CUM SĂ-I ÎNVĂŢĂM PE ALŢII

Ne-a mai rămas de discutat un punct, dar unul important, pregătirea profesională a profesorilor. În discutarea acestei probleme, poziţia mea este — ca să zic aşa — confortabilă: pot să fiu aproape de acord cu punctul de vedere „oficial". (Mă refer aici la *Recommendations of the Mathematical Association of America for Training of Mathematics Teachers*, publicate în „American Mathematical Monthly" **67**, 1960, pp. 982-991. Exclusiv din motive de concizie, îmi iau libertatea să citez acest document sub denumirea „recomandările oficiale".) Voi insista numai asupra a două puncte. Am chibzuit îndelung asupra acestor două puncte şi lor le-aîn consacrat o mare parte din activitatea mea din trecut, şi practic toată activitatea mea didactică din ultimii 10 ani.

Vorbind în mare, unul din cele două puncte pe care le am în vedere se referă la cursurile de „materie de predat" [cursuri de specialitate — *N.T.*], celălalt — la cursurile de „metode de predare" cursuri de metodica predării — *N.T.*].

(1) *„Materia de predat"*. Este trist, dar în prezent aproape unanim recunoscut, că bagajul de cunoştinţe al profesorilor de matematică de şcoală medie în domeniul materiei pe care o au de predat este, în medie, insuficient. Există, fără îndoială, profesori de şcoală medie bine pregătiţi, dar există şi alţii (eu însumi am întîlnit cîţiva) a căror bunăvoinţă nu pot decît s-o admir, dar a căror pregătire matematică nu este de loc de admirat. Recomandările oficiale cu privire la cursurile de specialitate poate că nu sînt perfecte, dar este în afară de orice îndoială că adoptarea lor ar duce

la o îmbunătățire substanțială. Aș vrea însă să vă aduc în atenție un punct care, după opinia mea îndelung deliberată, ar trebui totuși adăugat la recomandările oficiale.

Cunoștințele noastre în oricare domeniu constă din informații și din *know-how* („a ști cum"). *Know-how*-ul este priceperea de a utiliza informația; bineînțeles, fără o oarecare doză de gîndire independentă, de orginalitate, de spirit creator, nu poate exista *know-how*. În matematică, *know-how*-ul este abilitatea de a rezolva probleme, de a „găsi" demonstrații, de a analiza critic argumentații, de a folosi cu oarecare cursivitate limbajul matematic, de a sesiza concepte matematice în situații concrete.

Toată lumea este de acord că, în matematică, *know-how*-ul este mai important, sau chiar mult mai important, decît informația stocată. Toată lumea cere ca școala medie să transmită elevilor nu numai informație matematică, nu numai cunoștințe de matematică, ci și *know-how*, independență, originalitate, spirit creator. Dar aproape nimeni nu reclamă aceste lucruri atît de frumoase și pentru profesorul de matematică — oare nu sare în ochi? Recomandările oficiale nu spun absolut nimic despre *know-how*-ul profesorului de matematică. Studentul în matematică care își pregătește teza de doctorat trebuie să facă muncă de cercetare, dar chiar și înainte de a ajunge în acest stadiu, el poate găsi diferite ocazii de a lucra independent — la seminarii, la cercurile de rezolvat probleme, sau la pregătirea unei lucrări de diplomă. Ei bine, viitorului profesor de matematică nu i se oferă nici un astfel de prilej, recomandările oficiale nu spun nici o vorbă despre vreo formă sau alta de muncă independentă sau de cercetare. Or, dacă profesorul nu are nici un fel de experiență în munca de creație, cum ar putea fi el capabil să inspire, să conducă, să ajute, sau măcar să-și dea seama de activitatea creatoare a elevilor săi? Un profesor care a dobîndit tot ceea ce cunoaște în matematică pe cale exclusiv receptivă, numai cu greu va putea promova învățarea activă la elevii săi. Un profesor care n-a avut în viața lui o idee strălucită mai curînd îl va apostrofa decît să-l încurajeze pe elevul căruia i-a venit o astfel de idee.

Aceasta este, după părerea mea, lacuna cea mai gravă în cunoștințele de specialitate ale profesorului „mijlociu" de școală medie: el nu are experiență de muncă independentă pe tărîm matematic și, de aceea, el nu stăpînește realmente nici măcar materialul de școală medie pe care este chemat să-l transmită elevilor.

Nu pot oferi un panaceu, dar am încercat ceva. Am organizat și am condus în mai multe rînduri un *seminar de rezolvat probleme* pentru profesori. Problemele propuse la acest seminar nu reclamau cunoștințe mult peste nivelul școlii medii, dar ele cereau un anumit

grad — iar din cînd în cînd, chiar un grad destul de înalt — de concentrare şi de judecată — şi, corespunzător acestui grad, rezolvarea lor însemna muncă „de creaţie". M-am străduit să-mi organizez seminarul în aşa fel încît mare parte din materialul oferit să poată fi folosit apoi de participanţi, fără prea multe modificări, la lecţiile pe care le vor avea de ţinut; în aşa fel încît aceştia să dobîndească o oarecare măiestrie în matematica de şcoală medie; şi în aşa fel încît ei să aibă chiar şi unele ocazii de a se exersa în arta predării (ţinîndu-şi lecţii unii altora, în grupuri mici (Cf. Anexa, 3-6, p.376).

(2) *Metode de predare.* Din contactele cu sutele de profesori de matematică, am rămas cu impresia că n-ar fi chiar entuziast modul în care sînt deseori primite cursurile de „metodică". De fapt nici cursurile de specialitate ţinute pentru ei de facultăţile de matematică nu sînt primite mai bine de profesori. Un profesor cu care am avut o discuţie de la om la om pe aceste teme a găsit o imagine foarte plastică pentru a exprima un sentiment destul de răspîndit: „Facultatea de matematică ne oferă un biftec tare pe care nu-l putem mesteca, iar institutul pedagogic — o zeamă anostă şi fără pic de carne".

Ei bine, ar trebui să ne luăm o dată inima în dinţi şi să discutăm public chestiunea: sînt sau nu sînt realmente necesare cursurile de metodică? Sînt ele de vreun folos? Fiindcă discutînd deschis avem mai multe şanse să ajungem la răspunsul corect, decît cîrtind pe toate drumurile.

Chestiuni pertinente există, cu siguranţă, destule. Predarea este oare predabilă? Poţi oare învăţa pe cineva cum să-i înveţe pe alţii? (Predarea este o artă, gîndesc mulţi dintre noi; şi atunci: poţi oare învăţa pe cineva o *artă*?) Există oare ceva care să se poată numi „metodă de predare"? (Ceea ce un profesor transmite altora nu este niciodată mai valoros decît ceea ce a realizat în general pentru sine însuşi — calitatea predării depinde de întreaga personalitate a profesorului — şi există atîtea metode „bune", cîţi profesori „buni"). Timpul afectat pregătirii profesorilor este împărţit între cursuri de specialitate, cursuri de metodică şi practică pedagogică; n-ar fi oare cazul să cheltuim mai puţin timp cu cursurile de metodică? (În multe ţări europene, li se acordă mult mai puţin timp.)

Sper că cei mai tineri şi mai viguroşi decît mine vor cuteza cîndva să ia în piept aceste întrebări şi le vor discuta fără idei preconcepute şi cu date pertinente.

Eu nu vorbesc aici decît de propria mea experienţă şi de propriile mele opinii; şi de fapt, am şi răspuns implicit la cea mai importantă dintre problemele ridicate: după părerea mea, cursurile de metodică pot fi utile. Într-adevăr, ceea ce v-am prezentat în

cele de mai sus a fost o mostră de curs de metodică, sau, mai bine zis, o scurtă trecere în revistă a cîtorva teme pe care ar trebui să le includă, după părerea mea, un curs de metodică pentru profesorii de matematică.

De fapt, toate lecţiile pe care le-am ţinut pentru profesorii de matematică şi-au propus să fie, într-o oarecare măsură, nişte cursuri de metodică. Titlul lecţiei menţiona un anumit subiect de specialitate, dar de fapt, timpul era împărţit între subiectul de specialitate şi problemele de metodică; eventual, nouă zecimi pentru subiectul de specialitate şi o zecime pentru metodică. Dacă era posibil, lecţia decurgea sub formă de dialog. Unele observaţii de metodică erau inserate şi incidental, de mine sau de audienţi; dar deducerea unui fapt sau rezolvarea unei probleme erau urmate aproape totdeauna de o scurtă discuţie despre implicaţiile pedagogice ale acestora. „Oare n-aţi putea folosi aceasta la lecţiile dv.?" — îi întrebam pe audienţi. „În ce stadiu al cursului de şcoală medie consideraţi că aţi putea-o folosi? Care amănunt vi se pare că cere o atenţie deosebită? Cum aţi încerca s-o scoateţi la capăt?" Întrebări de felul acesta (particularizate în mod adecvat) erau propuse cu regularitate şi la lucrările de examen. Dar principala mea preocupare consta totuşi în a alege asemenea probleme (de felul celor două pe care le-am prezentat aici) care să ilustreze pregnant o anumită dar, de fiecare dată, altă schemă de predare.

(3) Recomandările oficiale numesc cursurile de „metodică" — cursuri de „studiere a planului de învăţămînt", şi nu sînt prea explicite în privinţa lor. Putem totuşi găsi în ele o recomandare, după părerea mea, excelentă. Ea este însă oarecum ascunsă: trebuie să cumpăniţi bine lucrurile, şi să combinaţi ultima frază de la „cursuri de studiere a planului de învăţămînt" cu recomandările pentru gradul IV; dar este destul de clară: cel care ţine cursuri de metodică pentru profesorii de matematică trebuie să ştie matematică cel puţin la nivelul unui licenţiat. Eu aş vrea să adaug: el trebuie să aibă şi o oarecare experienţă fie ea chiar modestă, în domeniul cercetării matematice; căci dacă n-are o astfel de experienţă, cum ar putea transmite viitorilor profesori ceea ce este poate cel mai important pentru ei — spiritul muncii creatoare?

Dar — destul cît aţi ascultat amintirile unui om bătrîn. Poate aţi putea extrage ceva util şi concret din vorbele mele, dacă aţi reflecta puţin la următoarea propunere care decurge din discuţia precedentă. Propun ca la recomandările oficiale ale Asociaţiei să fie adăugate următoarele două puncte:

I. *Pregătirea profesorilor de matematică trebuie să asigure o anumită experienţă de muncă independentă („de creaţie") la nivelul cores-*

punzător, sub forma unui seminar de rezolvat probleme, sau sub o altă formă potrivită.

II. *Cursurile de metodică trebuie să fie ținute numai în strînsă legătură cu cursurile de specialitate sau cu practica pedagogică și, pe cît posibil, numai de profesori cu experiență atît în cercetarea matematică, cît și în învățămînt.*

14.8. ATITUDINEA PROFESORULUI[6]

Așa cum am mai spus, lecțiile pe care le țineam cu profesorii erau, într-o anumită măsură, niște cursuri de „metodică". În aceste lecții, insistam asupra aspectelor de interes practic imediat în activitatea de zi cu zi a profesorului. Era inevitabil, de aceea, că trebuia să-mi formulez de repetate ori punctul meu de vedere asupra activității curente a profesorului și asupra atitudinii mintale pe care acesta trebuie s-o adopte. Încet, încet observațiile mele tindeau să devină stereotipe și în cele din urmă, am ajuns să le condensez într-un „Decalog al profesorului", vezi p.311. Aș vrea să adaug cîteva explicații la aceste 10 reguli.

Cînd am formulat aceste reguli, i-am avut în vedere pe auditorii lecțiilor mele — profesori care predau matematica la nivelul școlii medii. Cu toate acestea, regulile sînt aplicabile în oricare situație de învățămînt, indiferent de materia predată și de nivelul de predare. Totuși, și aceasta mai ales la nivelul școlii medii, profesorul de matematică este cel care, în comparație cu profesorii de alte specialități, are ocazii mai multe și mai oportune de a aplica unele din aceste precepte ; aceasta se referă în special la regulile 6,7,8.

De la ce „autoritate" emană aceste comandamente? Dragul meu coleg de breaslă, dragul meu profesor, nu accepta nici o altă autoritate în afară de propria dumitale experiență bine digerată, și în afară de propria dumitale judecată bine chibzuită. Străduiește-te să înțelegi limpede ce înseamnă fiecare recomandare în situația dumitale particulară, încearc-o la lecțiile pe care le ții, și după aceea judec-o fără părtinire.

Să examinăm, acum, una cîte una, cele 10 reguli, avînd în vedere cu precădere îndatoririle profesorului de matematică.

---

[6] Acest paragraf poate fi citit independent de cele precedente (din care vor fi reluate, de altfel, unele puncte). El este reprodus, cu unele modificări și cu permisiunea amabilă a editorului, din „Journal of Education of the Faculty and College of Education, Vancouver and Victoria", nr. 3, 1959, pp. 61–69.

Decalogul profesorului

1. Să fii interesat de subiect.
2. Să-ţi cunoşti subiectul.
3. Să cunoşti căile pe care se dobîndesc cunoştinţele; calea cea mai bună de a învăţa ceva este să descoperi singur.
4. Străduieşte-te să citeşti pe feţele elevilor, încearcă să le ghiceşti anticipările şi dificultăţile, pune-te în locul lor.
5. Transmite-le nu numai informaţie, ci şi *know-how*, atitudini ale intelectului, obişnuinţa muncii metodice.
6. Fă-i să înveţe să ghicească.
7. Fă-i să înveţe să demonstreze.
8. Fii atent la acele trăsături ale problemei de azi care ar putea fi utile la rezolvarea problemelor de mîine — caută să degajezi schema generală care se ascunde în spatele situaţiei concrete de faţă.
9. Nu dezvălui dintr-o dată tot secretul — lasă-i pe elevi să-l ghicească, înainte de a li-l spune — determină-i să descopere singuri cît mai mult posibil.
10. Sugerează, nu băga pe gît.

(1) Nu există decît o singură metodă care nu dă greş în predare: dacă profesorul este plictisit de obiectul pe care-l expune, în mod sigur întreaga clasă va fi şi ea plictisită de subiect.

Asta ar trebui să fie destul ca să facă evident primul şi cel mai important comandament al profesorului: *Să fii interesat de subiect.*

(2) Dacă subiectul nu prezintă interes pentru tine însuţi, să nu încerci să-l expui în faţa elevilor, fiindcă nu vei fi în stare s-o faci în mod acceptabil. Interesul pentru subiect este o condiţie *sine que non*, o condiţie indispensabil necesară, dar interesul ca atare nu este şi o condiţie suficientă. Nici un fel de interes — fie el oricît de mare, nici un fel de metode de predare — fie ea oricît de elaborată, nimic, absolut nimic nu te poate face capabil să explici clar elevilor o chestiune pe care tu însuţi n-ai înţeles-o clar.

Asta ar trebui să fie destul ca să facă evident cel de-al doilea comandament al profesorului: *Să-ţi cunoşti subiectul.*

Atît interesul pentru subiectul tratat, cît şi cunoaşterea temeinică a subiectului sînt necesare în activitatea profesorului. Am pus totuşi mai întîi interesul, fiindcă, dacă eşti realmente interesat, ai încă multe şanse să dobîndeşti pînă la urmă şi cunoştinţele necesare, în timp ce dacă îţi lipseşte interesul, chiar avînd unele cunoştinţe, poţi deveni foarte uşor un profesor excepţional de slab.

(3) Poţi profita mult, citind o carte bună de psihologia învăţării, sau audiind o lecţie bună cu această temă. Dar lectura şi audierea nu sînt absolut necesare şi, în nici un caz, nu sînt suficiente; trebuie *să cunoşti din experienţă căile prin care se dobîndesc cunoştinţele,* trebuie să fii perfect familiarizat *din experienţă* cu procesul de învăţare — din experienţa propriilor tale studii şi din observarea elevilor pe care-i instruieşti.

Să accepţi cele auzite de la alţii drept argumente de veridicitate a unui principiu — este rău; să profesezi un principiu numai în vorbe — este şi mai rău. Ei bine, există un caz în care nu-ţi poţi nicicum permite să te declari mulţumit cu cele auzite de la alţii, şi nici cu o recunoaştere formală, există un principiu al învăţării de care trebuie să fii realmente pătruns şi pe care trebuie să-l promovezi cu toată convingerea şi bună-credinţa: principiul învăţării active.[7] Străduiţi-vă să-i sesizaţi măcar miezul, elementul central: *calea cea mai bună de a învăţa ceva este să descoperi singur.*

(4) Dar chiar avînd unele cunoştinţe autentice, şi un oarecare interes pentru ceea ce faci, şi o anumită comprehensiune a procesului de învăţare — chiar şi atunci poţi fi profesor mediocru. Cazul este puţin obişnuit — sînt de acord — dar nu este cu totul rar; ni s-a întîmplat — cel puţin unora din noi — să întîlnim cîte un profesor, în rest destul de competent, care nu era în stare să stabilească „contactul" cu elevii săi. Pentru ca acţiunea de predare a celui de la catedră să aibă ca rezultat învăţarea, dobîndirea de cunoştinţe, de către cei din clasă, între profesor şi elev trebuie să existe un fel de contact, un fel de legătură nevăzută: profesorul trebuie să fie în stare să se transpună în situaţia elevului; trebuie să fie în stare să îmbrăţişeze „cauza" elevului. De aici — comandamentul imediat următor: *Străduieşte-te să citeşti pe feţele elevilor, încearcă să le înţelegi anticipările şi dificultăţile, pune-te în locul lor.*

Răspunsul elevilor la efortul tău de a-i învăţa ceva depinde de bagajul lor de cunoştinţe, de modul lor de a privi lucrurile şi de interesele lor. De aceea, nu pierde din vedere şi ţine seama de ceea ce ştiu şi de ceea ce nu ştiu elevii, şi ceea ce ar vrea să afle şi de ceea ce nu-s pasionaţi să afle, ceea ce ar trebui să înveţe şi ceea ce este mai puţin important pentru ei să înveţe.

(5) Cele patru reguli precedente acoperă esenţialul în măiestria predării. Ele formează împreună un fel de condiţie necesară şi suficientă: dacă eşti interesat de subiectul tratat şi-l cunoşti bine, şi dacă, în plus, eşti în stare să te pui în situaţia elevului şi să sesizezi

---

[7] **Vezi 14.4(1) şi 14.5(1). Este însă indicat să se ia cunoştinţă şi de celelalte două principii discutate anterior.**

ce anume îl ajută sau îl împiedică să înveţe, înseamnă că eşti de acum un profesor bun, sau că vei deveni foarte curînd; doar de ceva experienţă s-ar putea să mai ai nevoie.

Ne mai rămîne să explicităm unele consecinţe ale regulilor precedente, în special dintre cele care privesc pe profesorul de matematică din şcoala medie.

Cunoştinţele constă în parte din „informaţie" şi în parte din *know-how*. *Know-how*-ul este îndemînarea; este priceperea de a prelucra informaţia, de a o folosi într-un scop dat; am putea descrie *know-how*-ul ca un mănunchi de atitudini, de comportamente ale intelectului; *know-how*-ul este în ultimă esenţă priceperea de a lucra metodic.

În matematică, *know-how*-ul este abilitatea de a rezolva probleme, de a construi demonstraţii, de a examina critic rezolvările şi demonstraţiile. Şi, în matematică, *know-how*-ul este mai mult important decît simpla înmagazinare a informaţiei. De aceea, comandamentul care urmează este deosebit de important pentru profesorul de matematică: *Transmite elevilor nu numai informaţie, ci şi know-how, atitudini ale intelectului, obişnuinţa muncii metodice.*

Deoarece în matematică *know-how*-ul este mai important decît informaţia, s-ar putea ca la lecţia de matematică să fie mai important *cum* anume prezinţi informaţia, decît *ce* anume informaţie prezinţi.

(6) Mai întîi ghiceşte, după aceea demonstrează — aşa se fac descoperirile în majoritatea cazurilor. Dumneata trebuie să ştii lucrul acesta (pe cît posibil, din proprie experienţă), şi mai trebuie să ştii că un profesor de matematică are excelente ocazii de a scoate în relief rolul ghicirii deliberate în descoperire şi, în felul acesta, de a imprima elevilor săi o fundamental de importantă atitudine a intelectului. Acest din urmă aspect nu este atît de îndeobşte cunoscut cît ar trebui să fie, şi tocmai de aceea, merită o atenţie specială. Aş vrea să nu-i neglijaţi pe elevi sub acest aspect: Fă-i să înveţe să ghicească.

Elevul ignorant şi nechibzuit este expus să ghicească la întîmplare, să emită presupuneri bizare şi necontrolate. Ceea ce trebuie să-l învăţăm noi este, bineînţeles, nu ghicirea ignorantă şi nechibzuită, ci ghicirea „educată" şi „rezonabilă". Ghicirea rezonabilă, ghicirea deliberată, se bazează pe utilizarea judicioasă a temeiurilor inductive şi a analogiei, şi, în ultimă esenţă, cuprinde toate procedeele *raţionamentului plauzibil* care joacă un anumit rol în ceea ce se numeşte „metoda ştiinţifică"[8].

(7) „Matematica este o excelentă şcoală a raţionamentului plauzibil." Această afirmaţie rezumă convingerea care stă la baza regulii

[8] Vezi cap. 15.

precedente; ea sună destul de neobişnuit, destul de puţin familiar, şi este de origine foarte recentă; de fapt, cred chiar că aş putea să-mi asum paternitatea ei.

„Matematica este o excelentă şcoală a raţionamentului demonstrativ". Această afirmaţie sună foarte familiar, — sub o anumită formă, ea este probabil la fel de veche ca matematica însăşi. De fapt, adevărul este chiar mult mai categoric: matematica este coextensivă cu raţionamentul demonstrativ, care devine seva ştiinţelor de îndată ce conceptele acestora au atins un nivel suficient de abstract şi de bine definit, nivelul matematico-logic. Sub acest nivel de înaltă elaborare, raţionamentul cu adevărat demonstrativ nu-şi mai are locul (de pildă, el nu-şi are locul în treburile de toate zilele); totuşi (şi nici nu mai este nevoie să argumentez un lucru atît de larg acceptat), profesorul de matematică trebuie să-şi familiarizeze toţi elevii — cu excepţia, poate, a celor din clasele cele mai elementare — cu raţionamentul demonstrativ: *Fă-i să înveţe să demonstreze.*

(8) *Know-how*-ul este partea cea mai de preţ a cunoştinţelor de matematică, mult mai de preţ decît simpla înmagazinare a informaţiei. Dar *cum* trebuie să-i învăţăm pe elevi acest *know-how?* Elevii nu-l pot învăţa altfel decît prin imitare şi prin exerciţiu.

Cînd prezinţi rezolvarea unei probleme, *scoate în evidenţă*, prin mijloace potrivite, *trăsăturile instructive* ale rezolvării. O trăsătură este instructivă dacă merită să fie imitată; vreau să spun — dacă poate fi folosită nu numai la rezolvarea problemei în cauză, ci şi la rezolvarea altor probleme; şi este cu atît mai instructivă, cu cît este mai frecvent utilizabilă. Scoate în evidenţă trăsăturile instructive, dar nu făcîndu-le pur şi simplu elogiul (ceea ce ar putea să aibă tocmai efectul contrar la unii elevi); ci prin *comportarea* dumitale (un pic de teatralizare este foarte nimerit, dacă ai un dram de talent actoricesc). O trăsătură bine pusă în relief poate transforma rezolvarea dată de dumneata într-o *rezolvare-model*, într-o *schemă* pregnantă cu care elevii — pur şi simplu, imitînd-o — vor rezolva multe alte probleme. De aici — regula: *Fii atent la acele trăsături ale problemei de azi care ar putea fi utile la rezolvarea problemelor de mîine — caută să degajezi schema generală care se ascunde în spatele situaţiei concrete de faţă*[9].

(9) Aş vrea să schiţez aici un mic truc pedagogic care este uşor de învăţat şi pe care ar trebui să-l cunoască orice profesor. Cînd începi să discuţi (să rezolvi, în clasă) o problemă, antrenează-i pe elevi să ghicească soluţia. Elevul care a anticipat în minte un răspuns, sau chiar şi-a formulat supoziţia cu glas tare, s-a angajat

[9] Mai multe detalii? Citeşte întreaga carte!

într-un anumit fel: el este nevoit să urmărească elaborarea rezolvării, ca să vadă dacă a avut sau nu dreptate — şi, în felul acesta, nu poate să nu fie atent[10].

Acesta nu este, în esenţă, decît un caz cu totul special al regulii care urmează în „Decalog", regulă care este cuprinsă, de fapt, în regulile 3 şi 6, dar explicitează unele aspecte ale acestora. Nu dezvălui dintr-o dată tot secretul — antrenează-i pe elevi să-l ghicească înainte de a li-l spune — determină-i să descopere singuri cît mai mult posibil.

De fapt, meritul de a fi formulat această regulă revine lui Voltaire, care a exprimat-o mai spiritual: *Le secret d'être ennuyeux c'est de tout dire* — Secretul de a fi plicticos constă în a spune totul.

(10) Un elev îmi prezintă un calcul lung care se întinde pe mai multe rînduri. Privind ultimul rînd, văd că calculul este greşit, dar mă abţin să i-o spun. Prefer să parcurg împreună cu el calculele, rînd pe rînd: „Ai început bine, primul rînd este corect: aici ai făcut aşa, pe urmă aşa. Rîndul următor este şi el bun. Ei, dar despre rîndul acesta ce părere ai?" Greşeala este tocmai în rîndul acela, şi dacă elevul o descoperă singur, el are şansa să înveţe ceva. Dacă însă îi spun de la început „E greşit", elevul se poate simţi jignit, şi atunci nu va mai asculta nimic din ce-i voi spune după aceea. Şi dacă-i spun de prea multe ori „E greşit", elevul va ajunge să deteste matematica, să mă deteste pe mine, şi în ceea ce-l priveşte toate eforturile mele se vor fi irosit.

Dragul meu coleg de breaslă, evită să spui: „Ai greşit". Spune, mai bine, dacă-i posibil: „Ai dreptate, dar ...". Procedînd aşa, nu înseamnă că eşti ipocrit înseamnă doar că eşti uman. Faptul că trebuie să procedezi aşa, este conţinut implicit în regula 3. Dar putem face recomandarea şi mai explicit: *Sugerează, nu băga pe gît.*

Ultimele două reguli, a 9-a şi a 10-a, ţintesc în aceeaşi direcţie. Ceea ce sugerează ele, luat împreună, este să se lase elevilor pe cît posibil mai multă libertate şi iniţiativă — în condiţiile de predare existente. Presat de timp, profesorul de matematică este deseori tentat să păcătuiască împotriva spiritului acestor reguli, împotriva *principiului învăţării active:* poate să dea zor să ajungă cît mai repede la soluţia unei probleme, fără să fi lăsat elevilor un timp suficient ca ei să-şi pună singuri lor înşişi în mod serios problema; poate să introducă un concept sau să formuleze o regulă, prea devreme, fără să fi pregătit suficient, în prealabil, terenul cu ajutorul unui material ilustrativ convenabil, înainte ca elevii să fi ajuns să „simtă" nevoia unui asemenea concept, sau a unei asemenea reguli. El poate comite

[10] Cf. 14.5(2).

celebra greşeală a lui *deus ex machina* — poate introduce un artificiu, un procedeu (de pildă, o linie auxiliară ingenioasă, într-o demonstraţie geometrică) care conduce direct la rezultat, dar elevii, toată viaţa lor, nu vor putea înţelege cum de a fost omeneşte posibil să se descopere un asemenea truc care, lor le-a apărut ca picat din cer.

Dar sînt atîtea şi atîtea tentaţii de a încălca acest principiu. Să-i mai scoatem de aceea în evidenţă cîteva alte aspecte:

Fă-i pe elevi să pună întrebări; sau pune tu însuţi întrebări pe care ei înşişi şi le-ar putea pune.

Fă-i pe elevi să dea răspunsuri; sau dă tu însuţi răspunsuri pe care ei înşişi şi le-ar fi putut da.

Şi în orice caz, trebuie evitat să se răspundă la întrebări pe care nu le-a pus nimeni nici măcar dumneata însuţi.

EXEMPLE ŞI COMENTARII LA CAPITOLUL 14

Partea întîi

14.1. Luînd longitudinea oraşului San Francisco 122°25'41", răspundeţi la întrebarea (*d*) din 14.6(1).

14.2. Urmînd o indicaţie din 14.6(8), demonstraţi propoziţia sugerată de fig. 14.3 folosind geometria în spaţiu.

14.3. (Continuare) Demonstraţi propoziţia sugerată folosind geometria plană.

14.4. Paragraful 14.6(9) menţionează unele aspecte discutate anterior şi ilustrate de problema prezentată în 14.6(3) — 14.6(8). Aţi mai putea adăuga şi alte asemenea aspecte?

Partea a doua

14.5. *De ce „rezolvarea problemelor" — obiect de studiu?* Părerea mea este că tema „rezolvarea problemelor" ar putea constitui o componentă esenţială într-o serie de planuri de învăţămînt — destul de diferite sub alte aspecte, şi că ar trebui să constituie, efectiv, o componentă esenţială a oricărui plan de învăţămînt matematic în şcoala medie, care vrea să fie realmente util. Această opinie este subiacentă cărţii de faţă şi scrierilor mele conexe, şi a fost deja formulată explicit în cele precedente (vezi pet. 5 din prefaţă şi 14.2). Dacă cititorul n-a fost convins de capitolele precedente că această opinie are oarecare îndreptăţire, eu nu mai pot face mare lucru pentru el. Aş vrea totuşi să adaug cîteva comentarii despre rolul orelor de rezolvare de probleme în planul de învăţămînt din şcoala medie.

(1) Ne ocupăm aici de predarea matematicii la nivelul şcolii medii şi de scopurile acestei predări. O considerare realistă şi cu spirit de răspundere a acestor scopuri trebuie să ţină seama de utilitatea pe care ne aşteptăm că o vor prezenta, în viitor,

cunoştinţele pe care le cerem azi elevilor să le asimileze. Există desigur diferite categorii de elevi, şi unele vor folosi mai mult, altele vor folosi mai puţin, cunoştinţele dobîndite în şcoală, iar unele categorii constituie o fracţiune mai mare, altele — una mai mică, din masa elevilor. Ar fi poate de dorit să dispunem de date statistice demne de încredere despre lucrurile acestea, dar, din nefericire, ele sînt aproape inexistente. Proporţiile numerice pe care le voi folosi în cele ce urmează sînt estimaţii foarte aproximative, fără o bază statistică serioasă — le folosesc, de fapt, doar pentru a vorbi în concret.

(2) Să considerăm elevii care învaţă ceva matematică la nivelul şcolii medii (algebră, geometrie etc.), şi să distingem — în ceea ce priveşte modul în care aceştia vor folosi cele învăţate în profesiunile lor viitoare — trei categorii; matematicieni, consumatori de matematică şi neconsumatori de matematică.

Limitele primei categorii să le facem destul de cuprinzătoare; să-i socotim drept „matematicieni" sau „producători de matematică" şi pe fizicienii-teoreticieni, pe astronomi, şi pe unii ingineri din anumite funcţii de cercetare. La un loc, ei formează, să zicem, circa 1% din elevi. (Proporţia de viitori doctori în matematică este mai apropiată de 0,1%.)

Inginerii, oamenii de ştiinţă (inclusiv unii dintre cei din domeniul ştiinţelor sociale), profesorii de matematică şi de ştiinţe exacte etc. sînt consumatori (dar, în general, nu şi producători) de matematică. Să-i mai numărăm printre consumatorii de matematică şi pe elevii de azi care nu vor folosi matematica în profesiunea lor viitoare, dar care vor avea negreşit nevoie de anumite noţiuni de matematică în cadrul studiilor de specialitate (este cazul foarte multor ingineri-diplomaţi care devin comercianţi sau manageri). Efectivul tuturor consumatorilor de matematică, de toate categoriile, s-ar putea ridica — să spunem — la 29% din numărul elevilor.

Dintre elevii rămaşi, mulţi ar putea folosi ceva matematică peste nivelul celei pe care au învăţat-o în şcoala primară, dar efectiv nu o vor face. Apreciind că 70% din elevii de şcoală medie vor deveni neconsumatori de matematică, estimarea este, poate aproximativă, dar nu nerealistă; în această categorie intră aproape toţii viitorii oameni de afaceri, jurişti, clerici etc.

(3) Nu ştim dinainte cine — ce va deveni, aşa că nu ştim care elevi intră la cutare categorie. De aceea, lecţia de matematică trebuie condusă în aşa fel încît să respecte următoarele două „principii":

Primul — trebuie ca toţi elevii să poată trage un oarecare folos din ceea ce învaţă, indiferent de profesiunile lor viitoare.

Al doilea — elevii care au oarecare aptitudini pentru matematică trebuie să fie atraşi spre matematică, şi nu dezgustaţi de ea, printr-o predare nejudicioasă.

Consider subînţeles că cititorul acceptă, cel puţin într-o anumită măsură, aceste două principii. De fapt, convingerea mea este că a planifica învăţămîntul matematic în şcoala medie fără a avea în atenţie, permanent şi de bună-credinţă, aceste două principii ar fi nerealist şi iresponsabil.

Permiteţi-mă să sugerez, foarte pe scurt, în ce fel cele trei categorii de elevi considerate aici [vezi (2)] ar putea cîştiga ceva esenţial învăţînd cum se rezolvă problemele.

(4) Abilitatea de a rezolva probleme de matematică presupune, firește, o oarecare cunoaștere a subiectului matematic implicat dar ea presupune, în plus, și anumite deprinderi utile ale intelectului, o anumită atitudine generală pe care, în viața de toate zilele, am înclina s-o numim „bun-simț". Profesorul care vrea să-și servească în mod egal toți elevii, viitorii consumatori sau neconsumatori de matematică, trebuie să-i învețe cum se rezolvă problemele, în așa fel încît ceea ce le spune el de la catedră să fie circa o treime matematică și două treimi bun-simț. S-ar putea să nu fie prea ușor profesorului de matematică să inoculeze elevilor săi bun-simț și deprinderi mintale utile, dar dacă reușește s-o facă, înseamnă că le-a făcut un real serviciu, indiferent de profesiunile viitoare ale acestora. Acest serviciu este cu siguranță lucrul cel mai important pe care-l poate face el pentru acei 70% din elevii care nu vor avea nevoie să folosească aparatul matematic în ceea ce vor face mai tirziu.

Cei 29% din elevii care vor deveni consumatori de matematică au nevoie, ca o pregătire pentru studiile lor ulterioare, de o oarecare îndeminare în tehnica calculului (de pildă, o oarecare ușurință în efectuarea operațiilor algebrice). Or, tocmai elevii cu certe înclinații practice sînt foarte puțin dispuși să învețe „tehnici", dacă nu sînt convinși că acele tehnici servesc cauza unui scop, că sînt bune la ceva. Lucrul cel mai bun pe care îl poate face profesorul pentru a justifica învățarea tehnicilor este să demonstreze că ele sînt eficiente în rezolvarea unor probleme concrete, interesante, care survin în mod natural.

Viitorii matematicieni nu constituie decît aproximativ 1% din masa elevilor, dar este extrem de important ca ei să fie descoperiți, fiindcă dacă ei își aleg în mod greșit profesiunea, talentul lor, de care societatea modernă are nevoie sub atîtea și atîtea forme — s-ar putea irosi. Lucrul cel mai important pe care-l poate face profesorul de matematică pentru acești 1% este să le trezească interesul pentru matematică. (Că în școala medie li se va preda mai multă sau mai puțină matematică — n-are importanță în cazul lor, fiindcă, oricum, nu poate fi vorba decît de o fracțiune infimă din materia pe care urmează s-o știe pînă la urmă.) Ei bine, rezolvarea problemelor este o „magistrală" importantă, larg deschisă spre matematică; și nu numai atît, dar ea comunică cu alte magistrale importante (vezi ex. 14.6). În plus, profesorul ar trebui să trateze și cîteva probleme care, deși ceva mai dificile și ceva mai costisitoare ca timp de predare, sînt de o reală frumusețe și bogăție matematică (vezi cap. 15).

(5) Nădăjduiesc, așa cum am mai supus, că argumente în favoarea lecțiilor de rezolvare a problemelor de școală medie pot fi găsite peste tot în această carte, și în lucrările mele conexe. În cele ce urmează voi insista asupra cîtorva aspecte mai specifice, mai particulare.

14.6. *Rezolvarea problemelor și elaborarea teoriilor.* Un profesor pasionat de profesiunea lui și bine pregătit poate lua o problemă semnificativă dar nu prea complicată, și, ajutîndu-și judicios elevii să „descopere" diferitele ei aspecte, îi poate introduce prin ea, ca printr-o poartă larg deschisă, într-o întreagă teorie. Asemenea probleme semnificative sînt, de pildă, demonstrarea faptului că $\sqrt{2}$ este un număr irațional sau a faptului

că există infinit de multe numere prime. Prima poate fi o poartă larg deschisă spre conceptul crucial de număr real [11], a doua — spre teoria numerelor.[12]

Procedînd în felul acesta, profesorul reconstituie evoluția istorică a științei. Rezolvarea unei probleme semnificative, efortul depus pentru a-i obține soluția, și comprehensiunea dobîndită în final pot deschide calea spre o nouă știință, sau chiar spre o nouă eră în știință. Să ne gîndim la Galilei și la problema căderii corpurilor, sau la Kepler și la problema orbitei planetei Marte.

În lucrarea citată, Wagenstein emite o idee care, după părerea mea, merită să stea în atenția tuturor celor care planifică învățămîntul matematic: în loc să treacă în goană prin toate detaliile unui program mult prea extins, profesorul ar trebui să se concentreze asupra cîtorva probleme realmente semnificative, și să le trateze pe îndelete și în amănunt. Elevii ar trebui să exploreze toate aspectele problemei accesibile la nivelul lor, ar trebui să-i descopere singuri rezolvarea, ar trebui să anticipeze, călăuziți de profesor, unele consecințe ale soluției. În felul acesta, o problemă poate deveni un exemplu reprezentativ, o paradigmă a unui întreg capitol al științei. Cele spuse aici nu sînt decît un prim crochiu al ideii *învățămîntului paradigmatic*, despre care orice profesor preocupat în mod serios de programul de predare ar trebui să citească mai multe în cartea citată (vezi, de asemenea, ex. 14.11).

Să reținem deci că tratarea adecvată a unei singure probleme poate însemna o poartă larg deschisă spre —, sau un exemplu reprezentativ pentru o întreagă ramură a științei. Și tocmai avînd în mintea această observație, și altele similare, mi-am luat libertatea să spun, în 14.2, că „a gîndi înseamnă, cel puțin în primă aproximație, a rezolva probleme".

14.7. *Rezolvarea problemelor și cultura generală.* Mulți cred (și eu mă număr printre acești mulți) că una din sarcinile esențiale, poate chiar sarcina cea mai importantă, a școlii medii este să dea cultură generală. Dar să nu ne angajăm aici într-o discuție despre ce înseamnă „cultură generală", fiindcă riscăm să ne ciondănim la infinit căutînd definiția „corectă".

Învățîndu-i pe elevi, la lecția de matematică, cum să rezolve probleme, avem o excelentă ocazie de a dezvolta anumite concepte generale și anumite deprinderi ale intelectului care constituie, după părerea mea, componente importante ale culturii generale; chenarul de la p. 320 dă o listă[13]. Lista nu este exhaustivă; ea conține numai elemente mai pregnante și mai tangibile care nu depășesc — sper eu — puterea de comprehensiune a unei clase „mijlocii" din școala medie. Cea mai mare parte a elemente-

---

[11] Cf. **A. I. Wittenberg**, *Bildung und Mathematik*, Klett Werlag, 1963, pp. 168—253 *passim*.

[12] Cf. **Martin Wagenstein**, *Exemplarisches Lehren im Mathematikunterricht*, „Der Mathematikunterricht", vol. 8, 1962, partea a IV-a, pp. 29—38.

[13] Din „American Mathematical Monthly", vol. 65, 1958, p. 103.

lor enumerate au fost expuse pe larg în această carte şi în lucrările mele conexe[14]. Pentru observaţii adiţionale, vezi ex. 14.8 şi ex. 14.10.

Necunoscuta	Datele	Condiţia
Generalizare		Particularizare
	Analogie	
Raţionament riguros		
Conjectură rezonabilă		
	Limbaje :	
al diagramelor		al formulelor

Pentru un punct de vedere care ridică probleme importante în legătură cu relaţia dintre cultura generală şi învăţămîntul matematic, vezi lucrarea lui Wittenberg, nota de subsol de la p. 319.

14.8. *Limbajul figurilor.* Există oameni care simt un fel de imbold să-şi reprezinte vizual ideile, recurgînd la tot felul de simboluri geometrice. În mintea lor, anumite moduri de exprimare, figuri de stil pe care le folosim cu toţii au tendinţa să se transforme în figuri geometrice. Cînd oamenii aceştia se gîndesc la problemele care-i preocupă, aproape automat, iau o hîrtie şi un creion şi încep să mîzgălească : probabil că se străduiesc să-şi exprime gîndurile într-un limbaj al figurilor geometrice.

(1) Există multe idei şi fapte non-geometrice importante pentru care exprimarea cea mai adecvată este figura geometrică, graficul. diagrama. Prin puncte plasate convenabil pe portativ — mai sus sau mai jos, notaţia muzicală exprimă înălţimea sunetelor — note mai înalte sau mai joase. Cu ajutorul simbolurilor geometrice (puncte şi linii de conexiune), notaţia chimică exprimă structura compuşilor chimici. Folosind obiecte şi relaţii geometrice putem exprima, în diferite moduri numere şi relaţii numerice. Geometria analitică pune la dispoziţie procedee sistematice prin care relaţiile numerice pot fi traduse în relaţii geometrice, sau viceversa. Într-un fel, geometria analitică este un dicţionar bilingv, care pune faţă în faţă limbajul formulelor şi limbajul figurilor geometrice : ea ne permite să traducem uşor dintr-un limbaj în altul. Ideile geometriei analitice stau la baza a tot felul de grafice, diagrame, nomograme etc. folosite în ştiinţă, inginerie, economie şi aşa mai departe. Diagramele pot fi utile şi în matematica pură, şi unele dintre ele pot fi foarte bine explicate chiar la nivelul şcolii medii ; pentru un exemplu ilustrativ care nu figurează în manualele curente, vezi ex. 14.9.

(2) Graficele şi diagramele folosite de obicei în ştiinţă sînt — ca principiu — bine definite şi exacte : figura geometrică (idealizată) reprezintă exact relaţiile numerice avute în vedere. Este însă important de reţinut că utile pot fi şi unele reprezentări grafice

[14] Pentru „Limbajul formulelor" — vezi cap. 2 ; pentru „Conjectură rezonabilă" — cap. 15. Pentru Necunoscuta, Datele şi Condiţia, Generalizarea, Particularizarea şi Analogia, vezi Indexul.

care sînt mai mult sau mai puțin vagi sau imprecise. Bunăoară, fig.11.2 are — după părerea mea — o anumită valoarea de sugestie, cu toate că nu este altceva decît o metaforă desenată, o figură de stil transformată într-o figură vizibilă ; cam de aceeași natură sînt și fig. 11.3 și 11.4. Fig. 15.1 și 15.2 au o semnificație matematică clară : ele reprezintă mulțimea tuturor contururilor triunghiulare și, respectiv, o anumită submulțime a acestei mulțimi. Totuși, principalul lor punct de interes constă în aceea că ele sugerează ceva care înseamnă mai mult — un proces pe care nu reușim încă să-l concepem clar, evoluția ascendentă a unei argumentații inductive.

Avînd sub ochi două diagrame cu totul identice ca aspect, se poate foarte bine ca una să fie interpretată ca avînd o semnificație matematică perfect definită, iar cealaltă — într-un sens metaforic destul de vag, și între precizia strictă și aluzia poetică sînt posibile toate gradațiile. O bună ilustrare a acestui aspect o constituie hărțile dinamice folosite în multe scopuri.

(3) Geometria, știința despre spațiu, poate fi considerată sub diferite aspecte. Geometria poate fi concepută, așa cum știm, ca o știință bazată pe axiome. Dar geometria este și o măiestrie a ochiului și a mîinii. Apoi, geometria poate fi considerată drept o parte a fizicii (partea cea mai rudimentară, spun unii fizicieni — partea cea mai interesantă, spun unii geometri). În ipostaza de parte a fizicii, geometria este și un domeniu în care putem face descoperiri, intuitive sau inductive, pe care le putem verifica apoi prin raționament. La aceste multiple aspecte observațiile precedente mai adaugă unul : geometria este și sursa de simboluri pentru un anumit tip de limbaj care poate fi discursiv sau precis, dar și într-un caz și altul — util și instructiv.

Există și o morală — în atenția profesorului : dacă vreți să vă instruiți elevii, și nu doar să parcurgeți în goană temele unui plan de studiu dictat „de sus", atunci nu neglijați nici unul din aceste aspecte. Și mai ales nu insistați prea de timpuriu sau prea mult asupra aspectului axiomatic al geometriei — dacă nu vreți să-i dezgustați de geometrie pe elevii — viitori ingineri și elevii — viitorii oameni de știință (sau — viitori artiști și viitori filozofi) pe care i-ar putea atrage mai mult cunoașterea vizuală a formelor geometrice, vizualizarea spațială, sau descoperirea inductivă, sau sprijinul viguros pe care-l poate constitui pentru gîndire reprezentarea diagramatică.

14.9. *Numerele raționale și numere iraționale.* Cele ce urmează nu sînt decît o schiță rapidă a ceva ce trebuie făcut cu cea mai mare grijă la orele de curs — este vorba aici de punctul poate cel mai delicat din matematica predată în școala medie. Pentru concizie, voi folosi cîțiva termeni și notația din geometria analitică din care, însă, nu vom avea nevoie, de fapt, decît de foarte puține cunoștințe (doar cîteva noțiuni de „reprezentare grafică").

Fie că x și y reprezintă, ca de obicei, coordonate rectangulare. Dreapta de ecuație $y = 1$ este *dreapta numerelor* (un fel de „etalon" de „riglă—standard"). Priviți fig. 14.5, pe care au fost reprezentate și *punctele de rețea* (nodurile), adică punctele de coordonate numere întregi. Pe figură sînt scoase în evidență punctele de rețea de pe dreapta numerelor („bornele kilometrice care jalonează o lungă șosea rectilinie"[15]).

[15] Termeni și expresii „standard" folosite în școlile americane. — *N.T.*

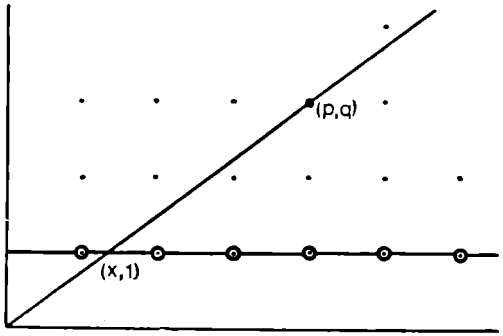


Fig. 14.5. Linia numere şi puncte de reţea

Pe fig. 14.5 un număr (oarecare) x este reprezentat de punctul $(x, 1)$ de pe dreapta numerelor. Trasăm dreapta care trece prin punctul $(x, 1)$ şi originea (0,0). Numărul x este raţional dacă — şi numai dacă — această dreaptă trece printr-un punct de reţea (p, q) (diferit de origine !)

$$\frac{x}{1} = \frac{p}{q},$$

relaţie care rezultă din triunghiuri asemenea.

Profesorul trebuie să pună următoarele întrebări (dar să *nu răspundă* la ele — sau cel puţin să nu răspundă decît după un răstimp suficient de lung) :

Originea (0,0) este un punct de reţea. Oare orice dreaptă care trece prin origine trece negreşit şi printr-un alt punct de reţea ?

Sînt posibile, evident, numai două cazuri : o dreaptă prin origine fie trece, fie nu trece şi printr-un alt punct de reţea : care din cazuri este *mai probabil* să se realizeze ?

Profesorul trebuie să lase aceste întrebări şi fig. 14.5 să „dospească" — să se sedimenteze — în mintea elevilor şi numai după ce aceştia se vor fi pătruns de imporanţa lor (eventual după ore, sau după săptămîni, sau după luni) va putea începe să discute despre caracterul „iraţional" al numărului $\sqrt{2}$, despre aproximarea numerelor iraţionale prin numere raţionale (după Felix Klein, fig. 14.5. poate fi folosită ca o poartă larg deschisă prin care se poate ajunge la fracţiile continue) etc.

14.10. *Raţionamentul riguros.* Trebuie sau nu trebuie să prezentăm elevilor de şcoală medie demonstraţii matematice ? După părerea mea, nu poate exista nici un dubiu în privinţa răspunsului : Da, trebuie s-o facem — dacă nu sîntem siliţi, de cine ştie ce condiţii extrem de vitrege, să coborîm stacheta exigenţei. Demonstraţia riguroasă este efigia, semnul distinctiv al matematicii, ea este o parte esenţială a constribuţiei matematicii la cultura generală. Elevul căruia nu i s-a dat niciodată ocazia de a fi impresionat de o demonstraţie matematică a fost lipsit de una din trăirile intelectuale de bază.

La ce nivel de rigurozitate trebuie prezentate demonstrațiile în școala medie, și cum? La această întrebare răspunsul nu mai este atît de simplu; de fapt, el este de-a dreptul copleșit de un noian de dificultăți. Dar NU ignorarea acestor dificultăți și un răspuns oarecare, dat fără prea multă cumpănire, pur și simplu pe linia tradiției, a modei, sau a prejudecăților, este ceea ce trebuie să decidă cei care în cunoștință de cauză și cu spirit de răspundere planifică învățămîntul matematic.

Există demonstrații și demonstrații, există diferite moduri de a demonstra. Primul lucru pe care trebuie să-l înțelegem, și să-l înțelegem bine de tot, este că la o vîrstă dată a auditorilor și la un grad de maturitate dat al acestora, anumite moduri de demonstrare sînt mai adecvate în predare, decît altele.

(1) Un anumit aspect al demonstrației matematice a fost sesizat și descris cu remarcabilă luciditate de către Descartes.

Citeza a treia din *Regullile pentru îndrumarea minții*:[16] „În raport cu obiectele propuse [pentru studiu] trebuie cercetat nu ceea ce au gîndit alții sau ceea ce noi înșine doar presupunem, ci numai ce putem să intuim în mod clar și evident sau să deducem cu certitudine; căci știința nu se dobîndește în alt mod". Explicînd această regulă, Descartes consideră succesiv cele două „moduri prin care se dobîndește știința": intuiția și deducția. Iată cum începe el discuția despre deducție[17]: „Această evidență și certitudine a intuiției se cere nu numai într-un enunț oarecare, dar și în orice specie de raționament. Fie de pildă, consecvența aceasta: 2 & 2 fac la fel ca 3 & 1; trebuie să intuim nu numai că 2 & 2 fac patru și că 3 & 1 fac de asemenea patru, dar și că din aceste două propoziții rezultă în mod necesar a treia, arătată mai sus."

O deducție matematică îi apare lui Descartes drept un lanț de concluzii, o secvență de pași succesivi; și pentru ca deducția să fie valabilă, este necesar ca la fiecare pas să se realizeze acea *înțelegere intuitivă* care arată că concluzia obținută în acea etapă decurge evident și rezultă necesar din cunoștințele dobîndite anterior (dobîndite fie direct — prin intuiție, fie indirect — din etapele anterioare ale deducției).

(Știm, din cap. 7, că un grafic cu ramificații reprezintă mai adecvat structura unei demonstrații, decît ar face-o un lanț simplu, fără ramificații, dar nu despre aceasta este vorba aici: dacă ar fi văzut reprezentarea diagramatică pe care noi am studiat-o în cap. 7, Descartes ar fi insistat că fiecare element al diagramei — cum ar fi cel reprezentat pe fig. 7.18 — trebuie să se sprijine pe evidența intuitivă).

(2) Dar matematica poate fi considerată și sub alte cîteva aspecte. Ea mai poate fi considerată și un fel de „joc cu simboluri" care se desfășoară după reguli stabilite arbitrar și în care ceea ce contează în principal este respectarea regulilor jocului. (Acest mod de a concepe matematica este destul de recent; acum 50 de ani majoritatea matematicienilor și majoritatea filozofilor ar fi considerat că o astfel de concepție asupra matematicii este revoltătoare. Și totuși acest punct de vedere — care a fost introdus sub influența marelui matematician David Hilbert, este cît se poate de adecvat în anumite studii referitoare la fundamentele matematicii.)

---

[16] *Op. cit.*, p. 12.
[17] *Op. cit.*, p. 14.

În acest joc cu simboluri, simbolurile nu au semnificație obiectivă (iar dacă totuși au — sîntem obligați să facem abstracție de ea, s-o ignorăm). În acest joc există „demonstrații": un pas al unei demonstrații constă în a scrie o nouă formulă corect întocmită (o combinație de simboluri compatibilă cu regulile). Un astfel de pas este cosiderat valabil dacă noua formulă este scrisă în concordanță strictă cu anumite formule introduse la început („axiome"), cu formulele scrise în pașii precedenți și cu anumite reguli de inferență stabilite de la început. Pentru a fi minuite în felul acesta, atît demonstrațiile cît și propozițiile demonstrate trebuie „atomizate", trebuie descompuse în pași foarte mici și în părți componente minuscule.

(3) Între cele două aspecte extreme, considerate în (1) și (2), există și altele[18]. Într-adevăr, conceptul de demonstrație matematică a evoluat, s-a modificat de la o epocă a științei la alta. Studierea acestei evoluții și a motivelor care au determinat-o ar putea fi de foarte mare interes pentru noi, profesorii. Poate că descifrînd și înțelegînd modul în care omul și-a constituit un concept ne-am putea face o idee mai clară și despre modul în care copilul omului ar fi cel mai indicat să-și însușească acel concept. (cf. ex. 14.13).

Bineînțeles, un matematician creator este liber să dea preferință oricărei dintre viziunile constituite asupra matematicii; și el o va prefera, firește, pe cea care este cea mai avantajoasă în cercul lui de interese. Însă la nivelul școlii medii alegerea nu este la latitudinea noastră, și dacă avem de ales între (1) și (2) (între a preda demonstrațiile mai aproape de un aspect sau de celălalt), de ezitare aproape că nici nu poate fi vorba.

Cred că oricine preferă înțelegerea intuitivă în locul unei argumentații logice formale — și aceasta, inclusiv matematicienii de profesie. Jacques Hadamard, un eminent matematician contemporan, a exprimat această opinie în felul următor[19]. „Scopul riguroziății matematice este să sancționeze și să legitimeze cuceririle intuiției, și vreun alt obiectiv ea n-a avut niciodată". Dacă îi excludem însă pe matematicienii de profesie, aproape că nu mai rămîne nimeni care să fie în măsură să aprecieze cum se cuvine argumentația formală. La intuire ajungem în mod „natural", firesc, la demonstrații formale — nu[20]. În orice caz, la intuire ajungem mult mai devreme și cu mult mai puține influențe externe decît la argumentația formală, pe care n-o putem înțelege cu adevărat decît după ce am atins un nivel relativ înalt de sofisticare și de experiență logică.

De aceea, părerea mea este că în instruirea tinerilor de vîrsta școlii medii accentul trebuie pus mai mult, și mult mai de timpuriu, pe înțelegerea intuitivă decît pe raționamentul deductiv. Iar cînd prezentăm demonstrații, trebuie să le prezentăm mult mai aproape de ideea lui Descartes [vezi (1)], decît de o anumită idee a anumitor logicieni moderni [vezi (2)].

---

[18] Pentru un studiu important și bine ilustrat cu exemple asupra naturii demonstrațiilor, vezi lucrarea lui Lakatos (citată în Bibliografie).

[19] Émile Borel, *Leçons sur la théorie des functions*, ed. a III-a, 1928, p. 175.

[20] Pentru o observație incidentală care exprimă o opinie cu totul asemănătoare, vezi, H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, p. 19.

Am întîlnit tineri care aveau un interes vădit, şi probabil şi o oarecare înclinaţie, pentru inginerie sau pentru ştiinţă, dar care refuzau să înveţe matematică, şi eu bănuiesc de unde provenea acest refuz.

(4) Să dau un exemplu. Consider propoziţia: *Dintre trei puncte pe o dreaptă, numai unul este situat între celelalte două.*

Observaţi că această propoziţie spune ceva esenţial despre natura liniei drepte. Dacă trei puncte sînt pe un cerc, atunci nici unul din ele nu joacă un rol special, nici unul nu se deosebeşte de celelalte prin aceea că este „situat între".

Este oare *nevoie să fie demonstrată* această propoziţie despre trei puncte pe o dreaptă? Într-un curs universitar despre bazele geometriei, s-ar putea să fie esenţial să se dea o demonstraţie a acestei propoziţii pornind de la axiome. Dar a prezenta o astfel de demonstraţie elevilor de clasa a X-a a şcolii medii, care abia au început studiul raţional al geometriei, este de-a dreptul absurd.

Aceasta este părerea mea, — s-ar putea să fie greşită. Pentru a-ţi forma o opinie justificabilă, trebuie să-ţi imaginezi reacţia clasei la o astfel de demonstraţie. Eu mi-o imaginez astfel: Majoritatea tinerilor vor fi pur şi simplu plictisiţi. Dar o minoritate mai puţin mediocră şi mai puţin indiferentă va simţi, mai mult sau mai puţin clar, că demonstraţia este superfluă şi fără obiect. Şi s-ar putea să se mai găsească în clasă şi unul sau doi elevi care vor fi de-a dreptul dezgustaţi şi revoltaţi. În orice caz, aceasta cred că ar fi fost reacţia mea, dacă mi s-ar fi prezentat o astfel de demonstraţie, cînd eram de vîrsta şcolii medii. Nu pretind că-mi reamintesc exact ideile adolescentului care eram acum 60 ani şi nu pretind desigur că adolescentul acela avea totdeauna dreptate. Dar îmi pot imagina clar reacţia mea la o astfel de demonstraţie: ea m-ar fi convins că profesorul meu este stupid — sau că matematica este stupidă, sau şi una şi alta, la un loc. Şi, în momentul acela, aş fi încetat să mai ascult explicaţiile profesorului — sau, dacă aş fi fost obligat să le ascult, le-aş fi ascultat cu silă, suspiciune şi dispreţ.

În orice caz, cred că o reacţie de adversitate la o demonstraţie de natura celei schiţate mai sus este firească şi întemeiată.

(5) Demonstraţiile pot fi considerate sub multe aspecte. Părerea mea este că rolul demonstraţiilor în constituirea unei ştiinţe este mai complex decît se admite în mod curent, şi că aceasta ar putea fi o chestiune care merită să facă obiectul unei investigaţii filozofice. Pe noi aici ne interesează însă o altă chestiune: care anume aspect al demonstraţiilor trebuie relevat începătorilor? Această chestiune, mie cel puţin, mi se pare mai uşoară, şi în privinţa ei am o opinie destul de fermă, pe care îmi iau libertatea s-o expun.

În primul rînd, începătorul trebuie să fie convins că demonstraţiile merită să fie studiate că ele îşi au rostul, au un scop, că sînt interesante. Demonstraţiile îşi au rostul — urmăresc un scop — în faţa unei instanţe judecătoreşti. Pîrîtul este bănuit de a fi vinovat, dar aceasta nu este decît o bănuială, există dubii. Trebuie dovedit (demonstrat) fie că el este vinovat, fi că este nevinovat. Scopul unei demonstraţii juridice este *să înlăture un dubiu* — dar acesta este şi scopul cel mai evident şi mai natural al unei demonstraţii matematice. Avem un dubiu în privinţa unei aserţiuni matematice

clar formulate — nu ştim dacă afirmaţia aceea este adevărată sau falsă. Şi atunci avem o problemă: pentru a înlătura dubiul, trebuie fie să demonstrăm aserţiunea, fie s-o infirmăm.

Acum aş putea explica de ce sînt atît de ferm convins că demonstraţia pomenită mai sus (în legătură cu trei puncte pe o dreaptă) nu-şi are locul în şcoala medie. Este puţin probabil că un tînăr de vîrsta şcolii medii care a înţeles acea afirmaţie despre cele trei puncte o va pune la îndoială. Pentru el, în cazul acesta, nu există nici un dubiu, care trebuie înlăturat, aşa că demonstraţia i se pare inutilă, fără obiect, fără sens. Şi situaţia devine şi mai gravă dacă demonstraţia porneşte de la axiome, distinge mai multe cazuri şi se întinde pe *n*-sprezece rînduri de manual. Ea poate crea tinerilor impresia că matematica constă în a demonstra lucrurile cele mai evidente pe calea cea mai puţin evidentă.

(6) Pe de altă parte la nivelul de studii potrivit, demonstraţia despre cele trei puncte pe o dreaptă este aşa cum am mai spus cu totul justificată, cînd însă o predăm de la catedra şcolii medii, comitem oribila şi ridicola greşeală pedagogică a *confuziei de niveluri* (vezi ex. 14.15).

La nivelul muncii de cercetare, se poate întîmpla ca o propoziţie să ni se pară intuitiv evidentă, să avem argumente plauzibile puternice în favoarea ei, dar nu şi o demonstraţie formală. Şi tocmai de tipul acesta sînt situaţiile în care un matematician trebuie să facă tot ce-i stă în putinţă să descopere o demonstraţie. Pentru o prefigurare la nivelul şcolii medii a unor asemenea situaţii, vezi ex.14.11 şi o serie de exemple din cap.15 .

(7) Înainte de a părăsi acest subiect, trebuie să trag semnalul de avertizare şi împotriva unei alte erori pedagogice grave; insistarea exagerată asupra unor demonstraţii banale. A împinzi paginile unui manual cu tot felul de demonstraţii fără noimă, care nu-şi justifică prezenţa lor acolo, şi nu urmăresc un scop care să merite clar osteneala de a fi atins, riscă să facă impresia cea mai proastă asupra elevilor celor mai buni, asupra acelora care au un oarecare dar al intuiţiei — de cea mai mare utilitate în inginerie, sau în ştiinţă, sau în matematică.

Şi această eroare oribilă se poate datora unei confuzii de nivel. Nu pentru un tînăr de vîrsta şcolii medii, ci pentru un matematician de profesie poate apărea ca fiind ceva necesar să verifice justificarea formală a fiecărui pas dintr-un raţionament foarte lung. Deşi nu este de loc partea cea mai „veselă" din munca unui matematician, o astfel de verificare se poate dovedi realmente necesară. Logica este ca acea controloare de la ieşirea unui supermagazin care verifică preţul fiecărui articol dintr-un coş mare pe care nu ea este cea care l-a umplut.

14.11 *O hartă poate fi oare perfectă?* O hartă este reprezentarea unei porţiuni a suprafeţei Pămîntului pe o foaie (plană) de hîrtie.

(1) Pentru a înţelege esenţa situaţiei pe care o avem în faţă, s-o generalizăm şi să descriem mai precis situaţia mai generală. (Această trecere de la particular la general, şi de la un nivel mai intuitiv la unul mai abstract este importantă; aici o facem brusc, dar, în clasă, ea trebuie făcută gradat şi cu grijă.)

Să considerăm reprezentarea unei suprafeţe S pe o altă suprafaţă S'. Ne ocupăm de *reprezentarea biunivocă*, cu alte cuvinte, presupunem că fiecărui punct p de pe S îi corespunde numai un singur punct p' de pe S' — imaginea lui p, şi că, reciproc, fiecărui punct p' de pe S' îi corespunde numai un singur punct p de pe S — *originalul* lui p'. Mai presupunem că reprezentarea este „continuă": punctelor de pe o linie continuă de pe una din suprafeţe le corespunde o mulţime de puncte pe cealaltă suprafaţă care formează, şi ele, o linie continuă. Fie L_1 şi L_2 două linii de pe S care se intersectează în p, făcînd între ele unghiul α. Fie L_1' şi L_2' liniile care sînt imaginile liniilor L_1 şi L_2, respectiv. Atunci L_1' şi L_2' se vor intersecta în punctul p', imaginea lui p, unde vor face între ele unghiul α'; considerăm pe α' drept imaginea lui α, iar pe α drept originalul lui α'.

(În cazul particular al cartografiei propriu-zise, adică al întocmirii unei hărţi geografice, S este o porţiune a suprafeţei Pămîntului, iar S' este porţiunea corespunzătoare de pe o hartă (plană). Cît priveşte liniile despre care vorbeam, să ne gîndim la linii importante pe suprafaţa Pămîntului — ţărmuri, rîuri, frontiere drumuri, căi ferate — care sînt reprezentate pe hartă prin linii corespunzătoare.

(2) Acum sîntem în măsură să dăm o definiţie clară. Spunem că o reprezentare (cartografică) este *perfectă* dacă satisface două condiţii:

(I) Toate *liniile* (= lungimile) sînt reduse la aceeaşi scară.

(II) Reprezentarea păstrează toate *unghiurile*. Să reformulăm aceste două condiţii cu ceva mai multe detalii.

(I) Fiecare reprezentare cartografică este caracterizată de o „scară" bine definită, de un raport numeric fix (de pildă, 1 : 1 000 000) în sensul următor: dacă L' — o linie de pe suprafaţa S', este imaginea lui L — o linie de pe suprafaţa S, atunci lungimea lui L' este într-un raport numeric fix (1 : 1 000 000, în exemplul nostru) cu lungimea lui L, independent de forma, dimensiunea (lungimea) şi localizarea liniilor.

(II) Orice unghi α' de pe S' este egal cu unghiul α de pe S a cărui imagine este α'.

(3) Să vizualizăm definiţia de mai sus, să examinăm mai în concret detaliile implicate.

(3*a*) Ni se spune, să zicem, că scara unei hărţi geografice întocmită cu multă grijă este 1 : 1 000 000. Aceasta înseamnă că scara are *aproximativ* această valoare — dar este oare posibil ca scara să fie *exact aceeaşi pe toată harta*? Şi, dacă — da, este oare posibil ca harta să păstreze unghiurile? Aceasta este întrebarea.

(3*b*) Dacă este geometric posibil să se reprezinte cartografic suprafaţa S pe suprafaţa S' la orice scară dinainte dată, atunci este evident posibil să se realizeze şi o reprezentare *geometric asemenea*, la scara 1 : 1, a unei suprafeţe de pe S pe suprafaţa S', adică o reprezentare fără micşorare sau mărire. De pildă să presupunem că planeta pe care trăim ar fi o sferă perfectă; dacă orice porţiune de pe suprafaţa Pămîntului ar putea fi cartografiată perfect (în sensul definit în (2)) pe o foaie plană de hîrtie la scara 1 : 1 000 000, atunci porţiunea corespunzătoare de pe o sferă cu diametrul cît o milionime din diametrul Pămîntului ar putea fi cartografiată pe aceeaşi foaie de hîrtie în

așa fel încît indiferent de poziții, oricare două linii corespondente — linia originală și linia imaginară — să fie de aceeași lungime, iar unghiurile corespondente să fie și ele egale.

(3c) Putem înfășura o foaie de hîrtie dîndu-i o formă de cilindru, sau de con, și invers, putem desfășura suprafața laterală curbă a unui cilindru, sau a unui con, transformînd-o într-o suprafață plană. O astfel de desfășurare generează o reprezentare perectă a suprafeței curbe cilindrice, sau conice, pe o suprafață plană (imaginați-vă cum arată, trasate pe hîrtie, țărmurile și rîurile); evident, operația păstrează lungimile și unghiurile.

Dar am putea oare desfășura, în mod similar, o porțiune dintr-o suprafață sferică pe o suprafață plană, păstrînd toate lungimile și unghiurile? Sîntem foarte înclinați să opinăm că lucrul nu este posibil și bănuiala aceasta s-ar putea chiar să se bazeze pe o anumită experiență, pe ceea ce am remarcat, de pildă, cînd curățam de coajă un măr, sau un cartof.

(4) Acum putem sesiza miezul problemei. Este oare posibil să se reprezinte, prin puncte care se corespund biunivoc, o porțiune S de pe o suprafață sferică, pe o porțiune S' dintr-un plan, în așa fel încît *să se păstreze toate lungimile și toate unghiurile?*

Vom presupune (contrar celor anticipate de noi) că o asemenea reprezentare este posibilă, și vom deduce, în (5) și (6), consecințele care decurg din această presupunere.

(5) *Lungimile se conservă.* Fie p și q două puncte distincte pe S (pe sferă) și L o linie oarecare pe S care unește p cu q; fie p', q' și L' imaginile în S' (în plan) ale lui p, q și L, respectiv. Prin ipoteza, L și L' au aceeași lungime. Iar dacă, întîmplător L este *linia cea mai scurtă pe sferă* care unește p cu q, linia mai scurtă decît oricare alta care ar uni p cu q, atunci, deoarece lungimile se conservă, și L' trebuie să fie mai scurtă decît oricare altă linie care unește p' cu q', și deci, trebuie să fie linia de conexiune cea mai scurtă *în plan.* Știm (cititorul ar trebui să știe) că liniile cele mai scurte în plan sînt liniile drepte, și că liniile cele mai scurte pe sferă sînt arce de cercuri mari. Rezultatul acestor considerații este următorul: arcele de cercuri mari de pe suprafața sferei S sînt reprezentate pe regiunea plană S' prin segmente de dreaptă. În particular, laturile unui triunghi sferic care sînt arce de cercuri mari sînt reprezentate prin laturile unui triunghi obișnuit, care sînt segmente de drepte.

(6) *Unghiurile se conservă*, și, prin urmare, fiecare din unghiurile triunghiului sferic menționate mai sus trebuie să fie *egal* cu unghiul corespunzător din triunghiul obișnuit. Dar așa ceva nu se poate, fiindcă suma celor trei unghiuri ale unei triunghi obișnuit este 180°, în timp ce — așa cum cititorul ar trebui să știe — suma celor trei unghiuri ale unui triunghi sferic este *mai mare* decît 180°.

O reprezentare prefectă a sferei pe un plan este deci imposibilă.

(7) Problema pe care tocmai am rezolvat-o poate constitui o poartă larg deschisă atît spre domeniul aplicațiilor practice (cartografia propriu-zisă), cît și spre o foarte importantă teorie (un capitol de geometrie diferențială centrat pe *theorema egregium* a lui Gauss, care duce pînă la teoria generală a relativității). Iată cîteva chestiuni nu

mult peste nivelul şcolii medii, şi strîns legate de cele discutate mai sus; ar fi bine să le verificaţi.

(7*a*) Un triunghi plan (obişnuit, euclidean) şi unul sferic sînt astfel corelate încît fiecare latură a unuia are aceeaşi lungime ca latura corespunzătoare a celuilalt. Arătaţi că în această situaţie [examinată în (5) şi (6)] *fiecare* unghi al triunghiului sferic este mai mare decît unghiul corespunzător în triunghiul plan. [Că suma unghiurilor primului triunghi este mai mare decît suma unghiurilor celui de-al doilea — aceasta a fost remarca decisivă în punctul (6)].

(7*b*) Cele două condiţii enunţate în (2) nu sînt complet fără nici o legătură între ele: (I) implică pe (II); cu alte cuvinte, dacă condiţia (I) este satisfăcută, atunci şi condiţia (II) trebuie să fie satisfăcută.

(7*c*) Dar (II) nu implică pe (I). Există multe reprezentări ale sferei pe un plan care conservă toate unghiurile, dar la care raportul dintre lungimea unei curbe de pe sferă şi lungimea imaginii curbei pe plan nu este nicidecum constant [el *nu poate fi constant*, în virtutea teoremei demonstrate în (5) şi (6)].

(7*d*) Există reprezentări ale sferei pe un plan care conservă toate ariile (dar ele nu conservă unghiurile).

(7*e*) Există reprezentări ale sferei pe un plan care păstrează liniile cele mai scurte, cu alte cuvinte, care reprezintă arcele de cercuri mari prin segmente de dreaptă (dar ele nu păstrează unghiurile).

(8) Cred însă că a pune insistent în lumină rolul continutăţii în discuţiile de mai sus, şi a suplimenta expunerea cu detalii precise în legătură cu continuitatea, ar fi mult peste nivelul şcolii medii.

14.12. *Ce anume trebuie să-i învăţăm pe elevi?* Dumneata, ca profesor, eşti plătit de societate să-i instruieşti pe tinerii din clasa care ţi-a fost încredinţată; prin urmare, sarcina dumitale este să ţii lecţii despre lucruri utile pentru societate şi pentru tinerii care te ascultă.

Să nu credeţi că recomandarea acesta nu spune prea mult. Ea vă poate spune chiar mai mult decît vă puteţi închipui. Trebuie însă s-o aveţi permanent în minte cînd planificaţi pe termen scurt, sau pe termen lung, cînd vă întocmiţi planul de lecţii pe luna următoare sau pe întregul an de învăţămînt. Imaginaţi-vă tot timpul că aveţi în clasă un băieţel simpatic şi isteţ, pe care şcoala încă nu l-a corupt şi dumneata, profesorul lui, încă nu l-ai timorat, şi care în orice moment este în stare să întrebe, sincer şi naiv: „Dar, domnule profesor, la ce-s bune toate astea"? Şi dacă vă veţi strădui să vă reprezentaţi ce se petrece în mintea acelui băieţel simpatic, şi vă veţi întocmi lecţiile în aşa fel încît să puteţi răspunde la această întrebare nevralgică — sau în aşa fel încît el să fie în permanenţă cucerit şi încîntat de aceea ce spuneţi, şi să n-aibă nici un prilej să vă pună acea întrebare nevralgică — atunci aveţi toate şansele să deveniţi un profesor mai bun.

Sînt de acord că profesorul, în meseria lui, este expus la tot felul de tentaţii. Putem fi tentaţi, de pildă, să umplem lecţiile cu lucruri lesne de predat, cu lucruri ca să zicem predabile". Dar trebuie oare să predăm tot ce considerăm că este „predabil"? „Predabilul" este oare totdeauna şi util?

Un dresor iscusit poate „învăța" o focă să țină mingea în echilibru pe bot. Dar o astfel de măiestrie va ajuta oare foca să prindă mai mult pește?

14.13. *Principiul genetic.* A întocmi un plan de învățămînt presupune mai mult decît a alege faptele și teoriile pe care trebuie să le învețe elevii; trebuie prevăzut și în ce ordine și cu ce metode trebuie predate de la catedră acele fapte și teorii. În această privință o sugestie importantă ne oferă așa-numitul "principiu genetic".

(1) Principiul genetic al învățării poate fi enunțat sub diferite forme, de pildă: Cînd avem de predat o ramură a științei (sau o teorie, sau un concept), trebuie procedat în așa fel încît, în procesul de învățare, copilul să parcurgă în mintea lui etapele principale ale evoluției intelectuale ale speciei umane. Nu este vorba, desigur, să-l facem să repete în detaliu cele o mie și una de erori ale trecutului, ci numai etapele principale ale evoluției.

Acest principiu nu statuează o regulă strictă și rigidă; dimpotrivă, el ne lasă multă libertate de alegere. Care anume etape sînt importante și care anume erori sînt neglijabile — aceasta este o chestiune de interpretare. Principiul genetic este o călăuză, nu un substitut al judecății.

Și tocmai pentru a scoate în relief acest aspect, poate că este ceva mai avantajos să reformulăm principiul oarecum mai precaut (și ceva mai vag). dacă am înțeles în ce mod omenirea a ajuns la comprehensiunea anumitor fapte, sau concepte sîntem *ipso facto* mai în măsură să judecăm în ce mod copilul ar trebui să-și însușească acele cunoștințe. [În ex. 14.10(3) ne-am apropiat foarte mult de această formulare.]

(2) Principiul genetic se sprijină pe o analogie biologică. Dezvoltarea individului reconstituie istoria evoluției speciei din care face parte individul. Cu alte cuvinte embrionul animal. în cursul dezvoltării lui care-l conduce. printr-o succesiune de etape de la stadiul de ovul fecundat la forma adultă, seamănă, în fiecare etapă, cu un strămoș al rasei, iar succesiunea stadiilor lui de dezvoltare reflectă succesiunea strămoșilor lui. Dacă în loc de „dezvoltarea individului" spunem „ontogenie" și în loc de „istoria evoluției speciei animale" spunem „filogenie", ajungem la forma concisă sub care biologul german Ernest Haeckel a enunțat „legea biogenetică fundamentală": „ontogenia repetă filogenia".

O astfel de analogie nu este desigur altceva decît sursă de sugestii interesante și nicidecum o dovadă a valabilității principiului genetic al învățării, care — luat ca atare — — nu trebuie considerat drept un „principiu bine stabilit", ci doar o sursă de sugestii interesante.

(3) Astfel, principiul genetic ne poate sugera principiul fazelor consecutive pe care le-am discutat în 14.4(3) și 14.5(3). Într-adevăr, în dezvoltarea istorică a diferitelor ramuri ale științei (a diferitelor teorii, sau concepte) putem distinge trei faze. Într-o fază inițială de *explorare* apar — din contactul cu materialul experimental — primele idei — idei sugestive. dar deseori incomplete sau chiar eronate. În faza imediat următoare, a *formalizării* materialul este ordonat, este introdusă terminologia adecvată. sînt descoperite legile. În faza ultimă, a *asimilării*, legile sînt integrate într-un context mai larg, sînt extinse și sînt aplicate.

Dar numai citirea lucrărilor originale ale marilor autori ne poate convinge efectiv de temeinicia principiului genetic al învățării. O astfel de lectură ar fi ca o plimbare în aer liber, care te înviorează după atmosfera stătută a manualelor școlare. După cum scria James Clerk Maxwell în prefața la marele său *Treatise on Electricity and Magnetism*, „este de mare folos pentru cel ce studiază un subiect oarecare să citească memoriile originale despre acel subiect, fiindcă totdeauna știința este asimilată cel mai deplin cînd este [studiată] în stare născîndă".

(4) Conform principiului genetic, cel care învață trebuie să parcurgă el însuși drumul străbătut de primii descoperitori. Conform principiului învățării active, cel care învață trebuie să descopere singur cît mai mult posibil. Combinarea celor două principii sugerează că cel care învață trebuie să *redescopere* singur cele pe care le are de învățat — iată o prefigurare, cu totul fugitivă, a unui aspect important al procesului de educare în legătură cu care cititorul ar trebui să consulte cele două lucrări ale lui A. Wittenberg citate în bibliografie.

14.14. *Omagiu fățarnic.* „Cultura generală" este o lozincă, o formulă devenită, un loc comun, și ca atare, este expusă să fie greșit folosită. Este foarte ușor să proslăvești în vorbe, „cultura generală' și s-o deservești în fapte. Cîte lucruri oribile nu se pot face în școli sub pretenția că ar fi făcute pentru „cultură generală".

. Cultură generală", „să-i învățăm pe elevi să gîndească", „să-i învățăm pe elevi să rezolve probleme" — toate acestea sînt sloganuri care pot fi interpretate greșit și invocate incompetent, în ciuda fondului valoros de dincolo de fațada cuvintelor. Există totuși o diferență în favoarea „rezolvării problemelor".

, Rezolvarea problemelor" ca măiestrie ca îndeminare practică poate fi explicată nu numai recurgînd la alți termeni generali (care și ei sînt expuși la interpretări greșite) ci și prezentînd exemple concrete sugestive (cartea de față și scrierile mele conexe constituie o tentativă de a prezenta o serie de asemenea exemple).

În plus, și impostura, falsul profesionalism pot fi demascate mai ușor cînd este vorba de „rezolvarea problemelor": „Așadar, dumneata îi înveți pe elevi cum se rezolvă problemele — foarte interesant. Și ce probleme intenționezi să prezinți la ore? Ce atitudini utile ale intelectului contezi că vei putea dezvolta grație acestor probleme?"

14.15. *Confuzia de niveluri.* „Matematicienii din zilele noastre lucrează mai mult cu mulțimi, operații, grupuri, cîmpuri etc., decît cu geometria lui Euclid și algebra de modă veche. Prin urmare, trebuie să-i învățăm pe elevi mulțimile, operațiile, grupurile și cîmpurile, înainte de a le preda aceste subiecte demodate".

Este o opinie. Dar iată și o altă, de exact același gen; „În zilele noastre, americanul adult parcurge mult mai multe mile conducînd automobilul decît mergînd pe jos. Prin urmare, trebuie să învățăm sugarii să șofeze înainte ca ei să știe să meargă".

14.16. *Isadora Duncan* a fost o dansatoare celebră — la fel de celebră pe vremea cînd eram eu tînăr, cum era Marilyn Monroe în anii din urmă.

Ce legătură există între această *lady* și subiectul nostru? Vedeți dumneavoastră — s-ar părea că-i o idee foarte bună să faci o „eclipă" care să întoarcă planul

de învățămînt și să scrie manualele respective. „Echipa" ar urma să fie formată dintr-un profesor universitar și un profesor de școală medie. Ne-am putea aștepta la un rezultat splendid, excelent, în care orizontul matematic larg al universitarului s-ar îmbina în modul cel mai fericit cu experiența profesorului de liceu, care știe cum se ține o lecție în școala medie. Da, da, însă...

Cînd eram tînăr, toată lumea știa o mică întîmplare cu Isadora Duncan. Se spune că ea i-ar fi propus lui Bernard Shaw un fel de căsătorie: "... și apoi, gîndește-te — copilul nostru ar avea creierul dumitale și înfățișarea mea" „Da, da — i-ar fi răspuns Bernard Shaw — dar ce catastrofă, dacă ar avea înfățișarea mea și creierul dumitale".

Poate vi s-a întîmplat și dumneavoastră să vedeți recent vreo carte care reflectă orizontul matematic al profesorului de liceu „îmbinat fericit" cu experiența de școală medie a profesorului universitar.

14.17. *Niveluri de cunoaștere.* În al său *Tractatus de Intellectus Emendatione,* filozoful Benedict Spinoza deosebește patru niveluri distincte ale cunoașterii[21]. Spinoza ilustrează cele patru niveluri prin patru moduri distincte de a înțelege *Regula de trei.* Noi însă, în cele ce urmează — punctele (1) — (4) — vom subînțelege prin „regulă" orice regulă matematică pe care cititorul a învățat-o cîndva dar — dacă este posibil — o regulă pe care a învățat-o în etape, înțelegînd-o cu fiecare etapă, din ce în ce mai bine.

(1) Elevul a învățat o regulă pe de rost, i-a acceptat autoritatea fără demonstrație, dar este în stare s-o folosească, știe s-o aplice corect. Spunem atunci că el „știe" regula la nivelul *cunoașterii mecanice.*

(2) Elevul a aplicat această regulă într-o serie de cazuri simple și s-a convins că ea funcționează corect în toate cazurile pe care le-a încercat. El a ajuns atunci la *cunoașterea inductivă* a regulii.

(3) Elevul a înțeles o demonstrație a regulii. El stăpînește atunci regula la nivelul *cunoașterii raționale.*

(4) Elevul a înțeles regula clar și fără echivoc, și este atît de convins de ea, încît nu-i mai poate pune la îndoială veridicitatea. El a realizat atunci *cunoașterea intuitivă* a regulii.

(5) Nu știu dacă pasajul din Spinoza parafrazat mai sus a fost sau nu consemnat în literatura pedagogică. În orice caz, distincția între diferitele niveluri de cunoaștere trebuie să fie bine înțeleasă de profesor. Fiindcă, de pildă, planul de învățămînt îi cere să predea cutare sau cutare capitol de matematică, în cutare sau cutare clasă. Dar ce nivel de cunoaștere trebuie să atingă elevii din acea clasă? Este suficientă cunoașterea mecanică? Sau trebuie să încerce să-i ducă pînă la nivelul cunoașterii intuitive? Avem aici două țeluri distincte, și este o mare diferență, atît pentru profesor cît și pentru elevi, că a fost adoptat unul și nu celălalt.

---

[21] Vezi, de pildă, *Philosophy of Benedict Spinoza,* traducere de **R.H.H. Elwes** p.7. Cele ce urmează sînt o parafrază cu totul liberă a textului lui Spinoza; în particular, denumirile nivelurilor au fost adăugate de autor.

(6) Cînd considerăm diferitele niveluri de cunoaştere deosebite de Spinoza, din punctul de vedere al profesorului, ajungem în mod firesc la cîteva întrebări. Cum i-am putea conduce pe elevi la cutare sau la cutare nivel de cunoaştere? Cum am putea controla că elevii au atins cutare sau cutare nivel? Cel mai greu de răspuns la aceste întrebări este cu referire la nivelul cunoaşterii intuitive.

(7) Am putea deosebi, desigur, nu numai patru, ci mai multe niveluri de cunoaştere, şi există unul a cărui considerare merită să stea în atenţia profesorilor (precum şi a celor care studiază, mai ales în atenţia celor ambiţioşi, care aspiră să devină oameni de ştiinţă) — cunoaşterea bine ancorată în intelect, bine corelată cu tot restul, cunoaşterea bine consolidată, într-un cuvînt cunoaşterea bine organizată[22].

Profesorul care urmăreşte cunoaşterea bine organizată trebuie să fie atent, în primul rînd, la modul cum introduce faptele, elementele noi. Elementul nou nu trebuie să apară de nicăieri, sau din nimic, ci trebuie să fie motivat de, referit la, corelat cu lumea din jur şi cunoştinţele existente, cu experienţa de fiecare zi şi curiozitatea înnăscută a elevului.

Mai mult, după ce noul fapt a fost înţeles bine, el trebuie folosit la rezolvarea unor probleme noi, la rezolvarea mai simplă a unor probleme mai vechi, cu ajutorul lui trebuie explicate şi puse în lumină anumite lucruri deja cunoscute, trebuie deschise noi perspective.

Studentul ambiţios trebuie să studieze cu cea mai mare atenţie fiecare fapt nou: trebuie să-l întoarcă pe toate feţele, să-l considere sub diferitele lui aspecte, să-l scruteze sub toate unghiurile, şi să se străduiască să-l plaseze la locul cel mai potrivit printre cunoştinţele deja existente — adică acolo unde este cel mai convenabil corelat cu faptele înrudite. Numai atunci el va fi în situaţia de a putea înţelege noul element de cunoaştere cu minim de efort şi în modul cel mai intuitiv. Mai mult el trebuie să se străduiască să extindă şi să adîncească elementul de cunoaştere nou dobîndit, aplicîndu-l, generalizîndu-l, particularizîndu-l, folosind analogia sau orice altă modalitate.

(8) Ca profesori devotaţi profesiunii, trebuie să ştim să ancorăm un fapt nou în bagajul cognitiv al elevului, să-l corelăm cu faptele învăţate anterior, să-i consolidăm asimilarea prin aplicaţii în cazuri concrete. Numai cunoaşterea bine ancorată bine corelată, bine consolidată, bine organizată în intelectul elevului, — numai o astfel de cunoaştere putem spera că va deveni, în cele din urmă, cunoaşterea intuitivă.

14.18. *Repetare şi contrast.* Dacă vă place muzica şi, în acelaşi timp, preţuiţi măiestria pedagogică, aţi putea sesiza că între ele există diferite asemănări, şi observaţiile dv., fie ele chiar imperfecte sub aspect ştiinţific, v-ar putea şlefui măiestria pedagogică. Ele vă pot duce la o prezentare mai artistică elaborată şi mai eficientă a materialului pe care-l aveţi de predat.

---

[22]Cf. ex. 12.3, precum şi prefaţa şi tot planul lucrării lui **G. Pólya** şi **G. Szegö**, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.*

De ce spun toate acestea? Repetarea şi contrastul joacă un rol în toate artele, şi deci şi în arta profesorului, dar arta în care rolul este cel mai pregnant este totuşi muzica. Tocmai de aceea, prefigurarea, dezvoltarea, repetarea, alternarea şi variaţia temelor într-o compoziţie muzicală poate foarte bine sugera tratarea analogă a temelor unei lecţii sau a temelor unei compoziţii literare.

14.19. *Ajutor intern, ajutor extern.* Cînd am întocmit planul acestei cărţi şi tot timpul cît am scris-o am avut necontenit în minte sarcina care incumbă profesorului de matematică din şcoala medie, în particular, următoarea situaţie. Profesorul propune clasei o problemă; elevii trebuie să înveţe în urma propriului lor efort, şi problema trebuie rezolvată într-o discuţie profesor — elevi. Această situaţie trebuie abordată, canalizată şi rezolvată cu foarte multă grijă şi precauţie. Dacă profesorul ajută prea puţin, nu se va progresa. Dacă profesorul ajută prea mult elevii nu vor avea prilejul să înveţe în urma propriului lor efort. Cum trebuie să procedeze profesorul ca să evite alternativele acestei dileme? Cît, în ce măsură, trebuie să-şi ajute elevii?

Există încă o întrebare mai bună: trebuie să întrebăm nu „cît — în ce măsură", ci „cum". *Cum* trebuie să-şi ajute profesorul elevii? Există diferite moduri de a da ajutor.

(1) Există cazuri în care profesorul trebuie să pună nu una, ci mai multe întrebări, şi trebuie să le şi repete chiar de mai multe ori, pînă ce reuşeşte să scoată o vorbuliţă de la elevii săi. În dialogul care urmează, punctele de suspensie (...) arată că elevii nu răspund. Discuţia a început deja de cîtva timp, cînd profesorul întreabă:

„Mai spuneţi-mi o dată: Care este necunoscuta?"

„Lungimea segmentului AB."

„Cum puteţi găsi acest tip de necunoscută?"

. . . . . .

„Din ce date aţi putea deduce lungimea unui segment?"

. . . . . .

„Oare n-am mai rezolvat pînă acum asemenea probleme? Vreau să spun — probleme în care necunoscuta era lungimea unui segment?"

„Cred că am mai rezolvat ..."

„Şi cum am procedat într-un astfel de caz? Din ce date am calculat lungimea necunoscută?"

. . . . . .

„Priviţi figura. Vedeţi segmentul AB — nu-i aşa? Lungimea AB este necunoscuta. Care segmente au lungimile necunoscute?"

„AC este dat."

„Bine! Mai există vreun alt segment cunoscut?"

„Şi BC este dat."

„Uitaţi-vă la segmentele AB, AC şi BC — uitaţi-vă la *configuraţia* lor. Cum aţi putea descrie această configuraţie?"

„AB. AC şi BC sînt laturile triunghiului ABC?"

„De ce tip este triunghiul ABC?"

. . . . . .

Da, da — există cazuri în care răbdarea profesorului trebuie să fie fără margini.

(2) Un profesor mai puțin răbdător ar putea proceda cu totul altfel și ar spune elevilor dintr-o dată: „Aplicați teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC".

(3) Care este deosebirea dintre cele două procedee (1) și (2)?

Deosebirea cea mai evidentă este că procedeul (1) este lung, iar (2) — scurt.

Trebuie să sesizăm și o altă deosebire: în comparație cu (2), (1) oferă elevului mai multe ocazii de a contribui la rezolvare cu ceva „scos" din propria lui minte.

Dar există și o deosebire mai subtilă.

Întrebările profesorului și sugestiile oferite **de el în** procedeul (1) *i-ar fi putut veni în minte și elevului însuși.* Dacă le analizați mai de aproape, puteți remarca imediat că unele din aceste întrebări și sugestii sînt *unelte* pe care rezolvatorul de probleme le poate folosi și la alte probleme, ba chiar la **familii** (clase) foarte cuprinzătoare de probleme. Aceste unelte sînt la îndemîna oricui — bineînțeles, rezolvatorul mai experimentat, „mai bine pregătit metodologic", le mînuiește mai deliberat și cu mai multă iscusință.

Or, acțiunea recomandată de profesor în cadrul procedeului (2) nu este o unealtă *a priori* la dispoziția rezolvatorului — ea este, de fapt, însăși rezolvarea, sau aproape rezolvarea problemei. Este o acțiune specifică sugerată fără nici o referire la vreo idee generală.

Să numim *ajutor intern* acel ajutor pe care un rezolvator realmente preocupat de problemă și oarecum familiarizat cu metodologia rezolvării are multe șanse să-l descopere și singur; și să numim *ajutor extern* ajutorul care n-are nimic comun cu metodologia rezolvării — rezolvatorul are puține șanse să dea la iveală un astfel de ajutor lucrînd metodic. După părerea mea, deosebirea cea mai importantă dintre procedeele (1) și (2) constă în aceea că în primul, ajutorul profesorului este „intern", iar în al doilea sprijinul profesorului este exclusiv ajutor extern.

(4) Dacă acceptăm principiul învățării active, trebuie — sîntem ca și obligați — să dăm preferință ajutorului intern, față de cel extern. În fapt, profesorul trebuie să recurgă la ajutorul extern numai în ultimă instanță, cînd a epuizat toate sugestiile evident „interne" și n-a obținut nici un rezultat; sau cînd este presat de timp.

Ajutorul extern are puține șanse să se dovedească instructiv — el poate foarte ușor să dezamăgească fiindcă apare ca „picat din cer", ca *deus ex machina*[23]. Ajutorul intern este lucrul poate cel mai instructiv pe care-l poate oferi profesorul; elevul îl poate „prinde", el își poate da seama că întrebarea pe care i-o pune profesorul îl ajută și că ar fi putut să-și pună și singur acea întrebare. Și în felul acesta, elevul poate învăța să se servească de acea întrebare; vocea profesorului poate deveni pentru el o voce interioară care să-l avertizeze cînd survine o situație similară.[24]

---

[23] Cf. sfîrșitul 3. 2.

[24] *CRP passim*, în particular 17, „Întrebări bune și întrebări proaste" pp. 34—35.

Pentru a da „ajutor intern", profesorul poate folosi oricare și oricite dintre întrebările și recomandările „stereotipe" adunate în cap. 12 — motiv pentru care cap. 12 ar putea constitui pentru el capitolul central al întregii cărți. Desigur însă că el trebuie mai întîi să se edifice îndeaproape asupra situațiilor în care sînt aplicabile aceste întrebări și recomandări. Dar tocmai pentru a-l ajuta pe profesor în această sarcină, a fost plănuită și scrisă cartea de față.

14.20. Cînd, la o lecție, am impresia că am vorbit prea mult fără întrerupere și că ar trebui de acum să adresez și întrebări auditoriului, am tăria să-mi amintesc o aliterație nemțească, greu de reprodus în altă limbă, care într-o versiune aproximativă ar suna cam așa:

Toți dorm și unul predică
Isprava — „lecție" ar fi, cică ....

14.21. *Cît e de grea?* La această întrebare pot ajunge atît omul de știință, cît și profesorul, primul — cînd se zbate cu o problemă, celălalt — cînd se gîndește dacă s-o propună sau nu elevilor săi. Pentru a răspunde la întrebare, trebuie să ne bazăm mai mult pe „impresie" pe „senzație" decît pe vreun raționament clar. Și cu toate acestea, cînd și cînd, reușim să evaluăm destul de corect gradul de dificultate al unei probleme. Impresia („senzația") omului de știință se poate foarte bine să fie confirmată de rezultatul investigației sale, iar cea a profesorului — de rezultatul unui examen.

În majoritatea situațiilor concrete, argumentele clare nu pot contribui prea mult la evaluarea gradului de dificultate al unei probleme, dar și puținul la care putem ajunge prin asemenea argumente merită să fie examinat cu atenție.

(1) *Întinderea domeniului de investigație.* S-a comis o infracțiune (de pildă, unul din copii a spart un geam) și știm că vinovatul se găsește sigur printre componenții unei mulțimi formate din n persoane. Celelalte circumstanțe fiind egale, dificultatea de a găsi vinovatul, evident, crește cu n. Vorbind în general, este de așteptat că dificultatea unei probleme să crească cu dimensiunile domeniului în care este indicat să se facă investigații (Cf. 11.6).

(2) *Numărul de elemente care trebuie combinate.* Elevii au de rezolvat o problemă care necesită aplicarea a n reguli distincte introduse în ultimul capitol, capitol cu care ei sînt mult mai puțin familiarizați decît cu capitolele anterioare ale cursului. În aceste condiții, celelalte circumstanțe fiind egale, dificultatea problemei crește, evident, cu n. Vorbind în general, ne putem aștepta ca dificultatea unei probleme să crească cu numărul de elemente pe care n-am avut încă prilejul să le combinăm, dar pe care trebuie să le combinăm acum, pentru a rezolva problema.

(3) Considerațiile precedente ne pot ajuta să evaluăm dificultatea unei probleme *a priori*, înainte de a încerca s-o rezolvăm. Cînd este vorba de o judecată *a posteriori*, după ce am încercat să rezolvăm problema, evaluarea dificultății implică, mai mult sau mai puțin explicit, unele considerații de *statistică*; iată un exemplu cu totul schematic. Cu ocazia unui examen, dintre cele două probleme propuse grupului de 100

de elevi, una a fost rezolvată de 82 pe elevi, cealaltă de 39 de elevi. Evident, problema a doua a fost mai dificilă *pentru acel grup* de 100 elevi. Dar va fi ea mai dificilă şi pentru următorul grup de elevi? Da, răspunde statisticianul, este de aşteptat să se dovedească mai dificilă şi pentru acel grup — şi nivelul de încredere este cutare — cu condiţia însă ca între cele două grupuri *să nu existe diferenţe* non-aleatorii. Or, tocmai aici e buba. În materie de educaţie, există mult prea multe circumstanţe greu controlabile care influenţează considerabil, aşa că distincţia între „aleator" şi „non-aleator" devine cu totul incertă. Astfel, modul în care a fost prezentat un anumit punct din curs, insistenţa profesorului asupra acelui punct, starea de spirit a profesorului la acea lecţie, precum şi multe, multe alte circumstanţe imprevizibile pot influenţa în mod incontrolabil rezultatul unui examen — ele îl pot influenţa mult mai mult decît acea componentă a situaţiei (factor particular) despre care ne-am propus să căpătăm informaţii printr-un test statistic. N-am atins aici decît cu totul în treacăt, cu totul tangenţial, una din multele raţiuni care trebuie să ne facă prudenţi, şi chiar bănuitori, cînd avem de-a face cu teste statistice pe teme de educaţie.

Bineînţeles, cînd matematicianul se ocupă de o problemă propusă acum 200 sau acum 2000 de ani şi totuşi încă nerezolvată, el are de acum motive „statistice" destul de serioase să bănuiască că problema aceea este dificilă. (Teoria numerelor abundă în asemenea probleme.)

14.22. *Dificultate şi valoare educativă.* Este dificil de evaluat dificultatea unei probleme, şi încă şi mai dificil de evaluat valoarea ei educativă. Şi totuşi profesorul este dator să încerce să le evalueze — şi pe una şi pe cealaltă — înainte de a propune elevilor săi o problemă.

Profesorul poate fi ajutat în această evaluare de o clasificare a problemelor de nivelul şcolii medii. Meritul de a fi introdus o clasificare de acest tip revine lui Franz Denk[24]; clasificarea care urmează este oarecum diferită: ea distinge patru tipuri de probleme.

(1) *O singură regulă, şi aceea — chiar „sub nas"* ... Problema poate fi rezolvată prin aplicarea mecanică, nemijlocită, a unei reguli, sau prin imitarea mecanică nemijlocită a unui exemplu. Mai mult, circumstanţele sînt de aşa natură, încît regula de aplicat sau exemplul de imitat este, în momentul acela, chiar „sub nasul" elevului; un caz tipic — profesorul propune astfel de probleme la sfîrşitul unei ore de curs în care a prezentat tocmai regula respectivă sau procedeul care trebuie aplicat. O problemă de acest tip dă elevului un prilej de exersare, dar nimic altceva; ea îl poate învăţa să utilizeze acea regulă sau acel procedeu particular, dar are puţine şanse să-l mai înveţe şi altceva. Ba mai mult, există chiar pericol ca nici măcar în ceea ce priveşte acea regulă unică elevul să nu dobîndească altceva decît simpla cunoaştere „mecanică" şi nicidecum cunoaşterea plenară, „intuitivă".

(2) *Aplicaţie, cu o oarecare libertate de alegere.* Şi o astfel de problemă mai poate fi rezolvată aplicînd o regulă învăţată în clasă sau imitînd un exemplu tratat la orele

[24] Franz Denk, Werner Hartkopf şi George Pólya, pp. 39—42 (vezi Bibliografia).

de curs, dar numai este chiar atit de imediat evident care anume regulă trebuie aplicată sau care anume exemplu trebuie imitat; elevul trebuie să stăpînească într-o oarecare măsură materialul predat în ultimele săptămîni şi trebuie să-şi pună oarecum mintea la contribuţie pentru a găsi, într-un domeniu de investigaţie limitat, elementul de care are nevoie în cazul dat.

(3) *Alegerea unei combinaţii.* Pentru a rezolva problema, elevul trebuie să combine (să coreleze) una sau mai multe reguli sau exemple studiate la lecţii. Aceasta nu înseamnă că problema este în mod necesar destul de dificilă — cu condiţia însă ca în clasă să se fi discutat deja o combinaţie oarecum similară (bineînţeles, nu una identică!); firește, dacă combinaţia implicată este cu totul nouă, sau dacă trebuie corelate multe elemente cunoscute, sau din capitole foarte diferite ale cursului, problema poate cere un grad mai înalt de indepedenţă; şi poate deveni destul de dificilă.

(4) *Aproape — nivel de cercetare.* Este aproape imposibil de trasat o linie netă de demarcaţie între tipul de probleme considerat mai sus [la punctul (3)] şi problemele realmente de cercetare. Exemplele şi discuţiile din cap. 15 vor încerca să schiţeze cîteva caracteristici pe care ar fi de dorit să le prezinte „problemele de cercetare de nivelul şcolii medii".

În general, pe măsură ce gradul de dificultate creşte pe liniile arătate în ex. 14.21(1) şi (2), şi valoarea educativă a problemei are şansa să crească — mai ales dacă scopul educativ pe care-l urmărim este „să-i învăţăm pe elevi să gîndească" şi dacă judecăm valoarea din punctul de vedere al acestui scop.

14.23. *Cîteva tipuri de probleme.* Pentru uzul profesorilor care ar dori să întrerupă, cînd şi cînd, şirul monoton de probleme de rutină pe care-l debitează la nesfîrşit manualele şi culegerile de probleme, am adunat — într-o altă lucrare — cîteva tipuri de probleme care ies din tiparele rutinei (*MRP*, vol.II.p.187). Aici nu vreau decît să mai adaug o problemă de tipul „puteţi ghici greşit" (ex. 14.25), precum şi un nou tip de probleme, probleme „cu momeală". Acest din urmă tip de probleme distrage atenţia de la punctul principal, de la procedeul cel mai firesc sau cel mai eficient, printr-o particularitate care sare în ochi, dar care este irelevantă. Problemele „cu momeală" trebuie folosite cu multă cumpătare; ele trebuie propuse numai elevilor îndeajuns de ageri ca să sesizeze farsa, şi că însăşi osteneala de a „curăţa" problema de aparenţele irelevante să nu-i facă decît să-şi fixeze cu atît mai bine elementul relevant (Vezi ex.14.24).

14.24. Să se găsească restul împărţirii la (x^2-1) a polinomului

$$x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + x^{13} + x^{17} + x^{19}.$$

14.25. Două sfere sînt tangente între ele. Ele sînt separate una de alta de planul tangent comun principal, care trece prin punctul lor de contact. Sferele mai au o infinitate de alte plane tangente comune, care înfăşură *conul tangent* comun. Acest con atinge fiecare sferă după un cerc, iar porţiunea de con cuprinsă între aceste două cercuri constituie suprafaţa laterală a unui *trunchi de con.*

Fiind dată lungimea t a generatoarei trunchiului de con, să se calculeze:

(1) aria laterală a trunchiului;

(2) aria porțiunii din planul tangent „principal" cuprinsă în interiorul trunchiului.

(O primă întrebare: Datele sînt oare suficiente pentru a determina necunoscuta?)

14.26. *O lucrare scrisă de încheiere a cursului de „sfîrșit de an".* Pentru notații și terminologie, vezi *MRP*, vol. I, pp.167-168; din același volum ați putea folosi, eventual, și unele considerații pertinente din ex.34 — 54, de la pp. 168-171, precum și rezolvările acestor exerciții, de la pp.288-292.

Considerați, pe rînd,

(a) o prismă dreaptă

(b) o piramidă dreaptă, și

(c) o piramidă dreaptă dublă.

Fiecare din aceste trei corpuri are ca bază un poligon regulat cu n laturi și este astfel circumscris unei sfere, încît punctul de contact cu fiecare din fețele solidului să coincidă cu centrul de greutate al acelei fețe.

(1) Calculați raportul dintre aria bazei, B, și aria suprafeței totale, S, a solidului, în cele trei cazuri (a), (b) și (c).

(2) Calculați S^3/V^2 pentru (a), (b) și (c); V este volumul.

(3) Întocmiți un tabel cu valorile numerice ale rapoartelor calculate la punctul (2), pentru $n = 3, 4, 5$ și 6.

(4) Descrieți cazul limită $n \to \infty$, pentru (a), (b) și (c). Găsiți limitele rapoartelor calculate la punctul (2) și adăugați valorile lor numerice în tabelul (3).

(5) Considerați, în continuare, următoarea problemă (nerezolvată): „Să se găsească poliedrul cu un număr dat de fețe, F, și cu un volum dat, care are suprafața de arie minimă".

Formulați o conjectură „plauzibilă" pentru $F = 4, 6, 8, 12$ și 20; explicați de ce conjectura este plauzibilă, și descoperiți indicii pro sau contra conjecturii, în rezultatele de la punctele precedente.

(6) Pe baza celor de mai sus, întocmiți cu grijă o problemă particulară care ar putea fi tratată în mod convenabil la o lecție de geometrie în spațiu pentru elevii de școală medie.

Enunțați-o clar.

Notați-vă (de pildă, din lista din *CRP*, pp. 10—11) o serie de întrebări și sugestii „interne" (cf. cap. 12), despre care considerați că au multe șanse să poată fi folosite eficient la rezolvarea problemelor alese.

Reprezentați pe diagramă evoluția rezolvării problemei alese (așa cum am făcut la lecția cu volumul trunchiului de piramidă). (Cf. cap. 7.)

(7) Cum ați „vinde" subiectul acestei lucrări scrise de încheiere a cursului (justificați-i alegerea, explicați de ce este de interes general) unei clase de elevi sîrîluciți de școală medie, sau studenților unui institut pedagogic? (Precizați nivelul, și — vă rog! — fiți concis și eficient.)

(8) *Diagonală* a unui poliedru convex se numeşte acel segment de dreaptă care uneşte două vîrfuri ale poliedrului şi care, cu excepţia celor două extremităţi, se află complet în interiorul (*nu* pe suprafaţa) poliedrului. Fie D — numărul de diagonale ale poliedrului.

Calculaţi D

(*a*) Pentru fiecare din cele cinci poliedre regulate,

(*b*) pentru un poliedru ale cărui feţe, în număr de F, sînt toate triunghiuri,

(*c*) pentru un poliedru oarecare, ştiind că el are F_n feţe poligonale cu cîte n laturi $n = 3, 4, 5, \ldots$ şi că

$$F_3 + F_4 + F_5 + \ldots = F.$$

(9) (Facultativ) Dacă cele precedente v-au sugerat vreo idee (matematică fireşte) care vi se pare revelantă, scrieţi-o în lucrare, chiar dacă pentru un moment n-o puteţi explora pînă la capăt — dar *foarte* clar şi concis.

(Textul de mai sus constituie un exemplu tipic de subiect de „referat de sinteză" de felul celor pe care obişnuiesc să-l propun în încheiere audienţilor mei de la lecţiile pentru profesori de şcoală medie. Pentru punctul (5), vezi ex. 15.35, pentru (8) — ex. 15.13. Ca răspuns la punctele (6) şi (7), unii participanţi au prezentat un dialog între profesor şi elevi de felul celor din această carte şi, mai ales, al celor din *CRP*. Unele din ele erau chiar foarte abil conduse.)

14.27. *Despre comunicările la sesiunile de matematică. Regulile lui Zermelo.* Situaţia vorbitorului la un colocviu de matematică seamănă un pic cu, şi în acelaşi timp diferă foarte mult, de cea a profesorului care ţine lecţie. Ca şi profesorul, vorbitorul îşi propune să transmită anumite informaţii, dar auditoriul lui este format din „egalii" săi, poate chiar din „superiorii" săi — nu din elevi. Situaţia vorbitorului nu este de loc uşoară, şi de aceea nu se întîmplă prea des să reuşească în tentativa lui. Vina nu este atît a vorbitorului, cît mai ales a diapazonului enorm al matematicii. Fiecare matematician, luat în parte, nu poate stăpîni ca specialist decît o foarte mică părticică a matematicii zilelor noastre, şi, de regulă, nu ştie decît foarte puţine lucruri despre o altă mică părticică, în care specialist este un alt matematician.

(1) Lui Ernest Zermelo, al cărui nume va rămîne pentru totdeauna legat de importanta „axiomă a alegerii" din teoria generală a mulţimilor, îi plăcea să-şi petreacă din timpul liber la cîte o „şuetă" în vreo cafenea, şi conversaţia lui era presărată cu remarci sarcastice la adresa colegilor săi. Comentînd o comunicare care avuse mare succes la un colocviu recent de matematică şi criticînd stilul vorbitorului, el şi-a condensat, în final, dezaprobarea în două reguli după care, afirma el caustic, ar fi întocmită acea comunicare ştiinţifică:

I. *Auditorii sînt sigur mai neinformaţi decît îţi închipui.*

II. *Insistă asupra celor evidente, treci repede peste cele esenţiale*[25].

---

[25] În originalul german: I. *Du kannst Deine Hörer nicht dumm genug einschätzen.* II. *Bestehe auf dem Selbstverständlichen und husche über das Wesentliche hinweg.*

Remarcile lui Zermelo erau deseori spirituale; foarte nedrepte în ansamblu, dar pregnante şi revelatoare în ceea ce priveşte unele aspecte particulare. Aşa este şi cu criticismul implicat de aceste două reguli; am rîs cînd l-am auzit, dar nu le-am mai putut uita niciodată. Şi mulţi ani mai tîrziu, am înţeles că aceste reguli, interpretate cum se cuvine, remarcă ceva foarte sănătos şi aplicabil în multe situaţii.

(2) Vorbitorul, la un colocviu de matematică îşi tratează, de obicei, auditorii ca şi cum fiecare din ei ar şti totul despre subiectul pe care-l prezintă el — şi, în particular, toate detaliile ultimei lui publicaţii de specialitate. Fără îndoială că lucrurile stau exact invers, şi vorbitorul ar trebui să-şi dea seama de aceasta, şi ar fi mai bine pentru el, nu să subestimeze neinformarea auditorilor despre subiect, ci s-o supraestimeze. De fapt, el ar avea considerabil de cîştigat dintr-o parafrază a primei reguli a lui Zermelo: „Auditorii sînt desigur mai neinformaţi decît îţi închipui asupra lucrurilor despre care vorbeşti".

(3) Ce este esenţial în lucrarea unui matematician? Esenţial este fiecare detaliu al demonstraţiei, dar este cvasiimposibil să prezinţi în mod adecvat, la un colocviu de matematică, toate detaliile unei demonstraţii lungi şi dificile. Chiar dacă vorbitorul ar reuşi să treacă în goană prin toate detaliile, nimeni n-ar fi în stare să-l urmărească. Prin urmare, „treci repede peste cele esenţiale" — peste detaliile demonstraţiei.

Dar chiar o demonstraţie lungă se poate întîmpla să se sprijine pe o remarcă centrală, care, luată ca atare, este simplă şi intuitivă. Un bun vorbitor trebuie să fie în stare să desprindă din demonstraţie remarca decisivă şi s-o facă într-atît de intuitivă şi de evidentă, încît oricare din cei care-l ascultă s-o poată înţelege, s-o poată lua „acasă" cu sine, şi s-o păstreze pentru o eventuală utilizare ulterioară. Procedînd aşa, vorbitorul reuşeşte să transmită informaţie utilă şi de fapt se conformează celei de-a doua reguli a lui Zermelo: „Insistă asupra celor evidente, treci repede peste cele esenţiale".

14.28. *Epilog.* Cînd eram tînăr devoram romanele lui Anatole France. Mai mult decît naraţiunea în sine, mă atrăgea tonul cu care era povestită, acea voce a celui înţelept care priveşte la toate cele omeneşti cu o ironie fină amestecată cu milă.

Anatole France avea o vorbă despre subiectul pe care-l discutăm acum: „Nu încerca să-ţi satisfaci vanitatea învăţîndu-i multe lucruri mari. Stîrneşte-le curiozitatea. Este suficient să descui minţile, nu le ticsi. Scapără în ele o scînteie, şi atît. Dacă există acolo ceva materie inflamabilă de bună calitate, ea va lua foc". (*La jardin d'Épicure*, p. 200.)

E mare tentaţia de a parafraza acest pasaj: „Nu încerca să-ţi satisfaci vanitatea învăţîndu-i pe puştii de şcoală medie o grămadă de..., doar pentru că vrei să-i faci pe toţi să creadă că tu însuţi le-ai înţeles..." Să rezistăm tentaţiei.

Conjectura şi metoda ştiinţifică[1]

Inducţia non-matematică joacă un rol esenţial în cercetarea matematică.
I. Schur, *Disertaţie inaugurală*, Berlin, 1901, Teza I.

Va fi totdeauna dificil, în oricare ramură a cunoaşterii, să descriem cu oarecare fidelitate metoda urmată de inventatori .... În ceea ce priveşte procedeele mintale specifice geometrilor, putem face totuşi o remarcă confirmată pe larg de însăşi istoria ştiinţei, şi anume că observaţia deţine în ele un loc important şi joacă un rol de seamă.
Charles Hermite, *Oeuvres*, vol. IV, p. 586.

Observaţia este sursa fecundă a invenţiei în lumea realităţilor subiective; aşa cum este şi în domeniul realităţilor perceptibile prin simţuri.
Charles Hermite, *Hermite et Stieltjes, Correspondance*, vol. I, p.332.

15.1. PROBLEME DE CERCETARE LA NIVELUL CLASEI

Învăţămîntul matematic trebuie să familiarizeze elevii, în măsura în care este posibil, cu toate aspectele activităţii matematice, mergînd cît mai departe posibil. În particular, el trebuie să creeze elevilor ocazii de a desfăşura o activitate creatoare independentă — în măsura în care aşa ceva este posibil.

Activitatea unui specialist în matematică diferă, totuşi, considerabil şi sub multe aspecte de activitate curentă din clasă. Dar să analizăm mai întîi cîteva exemple, fiindcă după aceea vom fi mai în măsură să sesizăm care anume diferenţe trebuie scoase în mod special în evidenţă. Exemplele care urmează arată că, alegînd probleme potrivite şi prezentîndu-le într-un mod adecvat, un profesor bun poate oferi, şi aceasta chiar unei clase de nivel mijlociu, ceva care se apropie întrucîtva de experienţa investigaţiei independente.

15.2. EXEMPLU

„Fiind dată lungimea, L, a perimetrului unui triunghi dreptunghic isoscel, să se calculeze aria triunghiului, A." Acesta este tipul obişnuit de probleme tipărite în manualele curente. Ca pro-

[1] Acest capitol este dedicat prietenului şi colegului meu, Charles Loewner.

blemă, nu este tocmai rea, atît doar că nu este prea interesantă — dacă este prezentată ca atare, izolată de alte probleme analoge. Comparați-o însă cu următoarea formă de prezentare, și veți sesiza diferența.

„În anii aceea de legendă ai primilor pionieri — spuse profesorul — cînd pămîntul era din belșug și aproape toate celelalte foarte rare, trăia în cîmpia Middle West-ului un om care avea sute de acri de pășune, dar numai 100 de iarzi de sîrmă ghimpată. Cum intenționa să folosească toată sîrma ca să-și împrejmuiască o parte din pășune, s-a gîndit la tot felul de forme de teren și s-a întrebat cam cîți iarzi pătrați ar putea împrejmui."

„Ei bine, voi ce formă ați fi preferat? Dar, nu uitați că trebuie să calculați o arie, așa că aveți tot interesul să alegeți o formă nu prea complicată."

— Un pătrat.
— Un dreptunghi cu laturile 20 și 30.
— Un triunghi echilateral.
— Un triunghi dreptunghic isoscel.
— Un cerc.

„Foarte bine, Aș adăuga și eu cîteva forme:
Un dreptunghi cu laturile 10 și 40.
Un triunghi isoscel cu laturile 42, 29 și 29.
Un trapez isoscel cu laturile 42, 13, 32 și 13.
Un hexagon regulat.
Un semicerc.

Toate aceste figuri sînt *izoperimetrice*, adică au același perimetru: fiecare din ele trebuie să aibă perimetrul 100 iarzi. Calculați ariile în iarzi pătrați și aranjați cele 10 figuri în ordinea ariilor, începînd cu aria cea mai mare și terminînd cu cea mai mică. Și fiindcă veni vorba, înainte de a calcula, ar fi bine să încercați să ghiciți care anume arie va fi cea mai mare, și care — cea mai mică."

Această problemă poate fi propusă ca lucrare „pentru acasă" elevilor dintr-o clasă de nivel mijlociu din școala medie, într-o anumită etapă bine aleasă a cursului. Rezolvarea constă în următoarea listă:

Cercul	795	Triunghiul echilateral	481
Hexagon regulat	722	Trapezul 42, 13, 32, 13	444
Pătratul	625	Triunghiul dreptunghic isoscel	430
Dreptunghiul 30×20	600	Triunghiul 42, 29, 29	420
Semicercul	594	Dreptunghiul 40×10	400

„Aveți vreo întrebare de pus?"

15.3. DISCUȚIE

Scopul acestei probleme este să aducă în atenția elevilor lista cu figuri și arii care constituie soluția problemei; examinarea acestei liste ar trebui să sugereze elevilor diferite observații, diferite remarci. Cu cît elevii reacționează mai spontan — cu atît mai bine; dacă însă observațiile se lasă așteptate, profesorul poate anima discuția, stimulînd-o cu discreție prin întrebări bine plasate, cum ar fi următoarele:

„N-aveți de făcut nici un comentariu la această listă?"

„Cercul este primul pe listă; n-aveți nimic de spus în legătură cu această constatare?"

„În listă figurează triunghiuri, precum și cîteva patrulatere. Care figură este prima pe lista patrulaterelor? Dar în cazul triunghiurilor?"

„Da, s-ar putea să fie așa cum spui, dar ai demonstrat că este așa?"

„Dacă n-ai demonstrat, ce motiv ai să crezi că este așa?"

„Un triunghi poate fi considerat drept un patrulater degenerat, cu una din laturi nulă (sau cu un unghi de 180°). Remarca aceasta nu te-ar putea oare ajuta în argumentația ta?"

În cele din urmă, elevii ar trebui să ajungă, mai devreme sau mai tîrziu, și pe cît posibil — pe căile lor proprii, să-și orienteze observațiile pe următorul făgaș:

Lista sugerează că din toate figurile plane cu același perimetru, cercul are aria maximă.

Lista sugerează că din toate patrulaterele cu același perimetru, pătratul are aria maximă.

Lista sugerează că dintre toate triunghiurile cu același perimetru, triunghiul echilateral are aria cea mai mare.

Lista sugerează că dintre toate poligoanele cu un număr n dat de laturi, și cu perimetrul de lungime dată, poligonul regulat are aria cea mai mare.

O altă aserțiune sugerată de listă: Dacă două poligoane regulate au același perimetru, cel cu laturi mai multe are și aria mai mare. (Cu cît poligonul „seamănă" mai mult cu un cerc, cu atît și aria lui s-ar părea că este mai mare.)

Nici una din aceste aserțiuni nu este demonstrată efectiv de datele din listă, dar lista dă totuși un anumit tip de justificare, un anumit tip de temei de a le acorda credit — mai mult sau mai puțin.

Și propria noastră experiență ne poate sugera astfel de inferențe de ordin mai general, cum ar fi următoarea: Verificare în cazuri mai multe înseamnă temei mai puternic [de a acorda credit unei aserțiuni].

Dar să mai analizăm cîteva exemple — poate că după aceea vom sesiza şi alte observaţii relevante, şi poate chiar că şi unele dintre observaţiile precedente ni se vor părea mai puţin hazardate.

15.4. UN ALT EXEMPLU

„Grecii cunoşteau — spuse profesorul — o propoziţie remarcabilă referitoare la aria triunghiului, propoziţie care astăzi poartă numele de „formula lui Heron" şi pe care o exprimăm prin relaţia

$$A^2 = s(s - a)(s - b)(s - c),$$

unde A este aria triunghiului a, b şi c sînt lungimile celor trei laturi, iar

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

este semiperimetrul."

„Demonstrarea formulei lui Heron nu este de loc simplă şi n-aş vrea să mă ocup astăzi de ea. Dar nefăcînd demonstraţia, nu putem fi siguri că formula, aşa cum am scris-o, este corectă — scriind-o s-ar putea să mă fi înşelat memoria. Oare n-aţi putea verifica formula? Cum aţi putea-o verifica?"

— Eu aş încerca-o la un triunghi echilateral.

În acest caz, $a = b = c$, $s = \frac{3}{2}a$, şi formula dă rezultatul corect.

„Ce altceva am mai putea face?"

— Eu aş încerca-o la un triunghi dreptunghic.

— Eu aş încerca-o la un triunghi isoscel.

În primul caz $a^2 = b^2 + c^2$, în al doilea $b = c$, şi atît într-un caz cît şi în celălalt formula dă, după o serie de operaţii algebrice, rezultatul corect. (Cititorul ar trebui totuşi să treacă efectiv prin toate detaliile.)

„Sînteţi satisfăcuţi?"

— Da, formula se verifică.

„V-aţi mai putea imagina vreun caz particular pe care ar trebui să-l verificăm?"

„Cum este cu triunghiul degenerat? Mă gîndesc la cazul extrem, cazul limită, în care triunghiul se „turteşte" devenind un segment de dreaptă."

În acest caz $s = a$ (sau $= b$, sau $= c$), şi formula dă, evident, rezultatul corect.

— Spuneţi-mi vă rog, domnule profesor, în cîte cazuri ar trebui să verificăm formula, dacă am vrea să fim absolut siguri că ea este corectă?

Ar fi bine ca cititorul să-şi imagineze singur cum ar putea decurge discuţia amorsată de această ultimă întrebare.

15.5. REPREZENTAREA GRAFICĂ A EVOLUŢIEI UNUI RAŢIONAMENT INDUCTIV

Ce se realizează, şi ce nu se realizează, prin verificările succesive ale formulei propuse în 15.4? Fiecare verificare priveşte o anumită formă de triunghi, aşa că o trecere în revistă a tuturor formelor de această natură s-ar putea să contribuie la elucidarea acestei chestiuni.

Să notăm cu x, y şi z laturile unui triunghi variabil, enumerate în ordinea lungimilor lor crescătoare,

$$0 < x \leqslant y \leqslant z.$$

Fiind vorba de un triunghi, trebuie să fie satisfăcută inegalitatea

$$x + y > z.$$

Apoi, deoarece ne interesează numai forma triunghiului, nu şi dimensiunile lui, putem presupune că

$$z = 1.$$

Avem astfel trei inegalităţi

$$x \leqslant y, \quad y \leqslant 1, \quad x + y > 1. \tag{1}$$

Să reprezentăm acum triunghiul de laturi x, y şi 1 — pe scurt, triunghiul $(x, y, 1)$ — prin punctul (x, y) din planul de coordonate rectangulare x şi y. Fiecare din cele trei inegalităţi (1) limitează punctul (x, y) la un anumit semiplan (inclusiv linia de frontieră — în primele două cazuri, exclusiv — în cazul al treilea). Luate împreună, cele trei inegalităţi (1) definesc o mulţime de puncte — partea comună, sau *intersecţia* celor trei semiplane. Această intersecţie este un triunghi (vezi fig. 15.1) cu vîrfurile (1,1), (0,1) şi $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ [vîrful (1,1) şi cele două arii adiacente fac parte din triunghi, celelalte două vîrfuri şi latura a treia — nu]. Această arie triunghiulară reprezintă

mulțimea tuturor formelor triunghiulare posibile; punctul (x, y) reprezintă triunghiul $(x, y, 1)$, și punctele diferite reprezintă triunghiuri de forme diferite.

Cum sînt localizate pe fig.15.1 cazurile particulare considerate în 15.4?

Mai întîi, am verificat formula propusă pentru triunghiul echilateral. Un astfel de triunghi este (1,1,1) — să marcăm cu acest simbol punctul corespunzător, (1,1), de pe fig. 15.2.

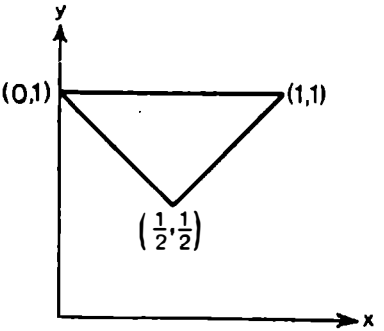


Fig. 15.1. Mulțimea tuturor formelor triunghiulare

După aceea am verificat formula pentru triunghiul dreptunghic. Dacă $(x, y, 1)$ este un triunghi dreptunghic, atunci latura lui mai mare, latura de lungime 1, trebuie să fie ipotenuza și, prin urmare,

$$x^2 + y^2 = 1.$$

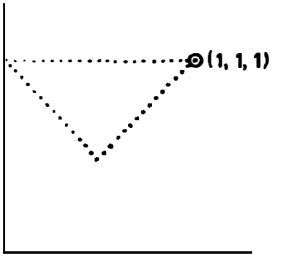


Fig. 15.2. Am verificat formula pentru triunghiul echilateral

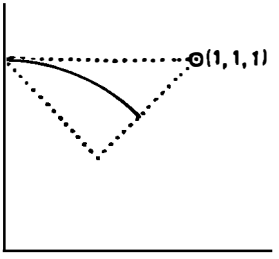


Fig. 15.3. ... și pentru triunghiurile dreptunghice

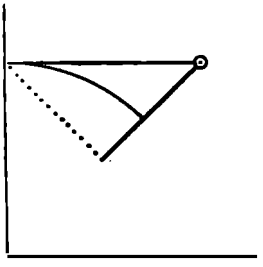


Fig. 15.4. ... și pentru triunghiurile isoscele

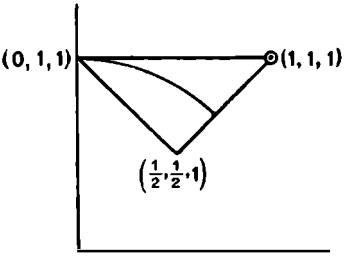


Fig. 15.5. ... și pentru triunghiurile degenerate

De aici rezultă că pe fig.15.3 triunghiurile dreptunghice sînt reprezentate de un arc de cerc (din cercul de rază unitate).

Apoi am considerat triunghiurile isoscele. Aici trebuie însă să distingem două tipuri de triunghiuri isoscele: laturile egale pot fi: *sau* laturile mai lungi, şi atunci

$$y = 1,$$

sau laturile mai scurte, şi atunci

$$x = y.$$

Prin urmare, punctele care reprezintă triunghiuri isoscele „umplu" cele două linii de frontieră din fig.15.4 (trasate acolo cu linie plină — pe fig.15.2 şi 15.3, ele nu erau decît punctate).

În fine, în cazul unui triunghi $(x, y, 1)$ degenerat (turtit)

$$x + y = 1.$$

„Triunghiurile" de acest gen sînt reprezentate de cea de-a treia linie de frontieră, trasată cu linie plină pe fig.15.5 (pe fig. 15.2, 15.3 şi 15.4, ea nu era decît punctată).

Trecînd în revistă succesiunea de diagrame de la fig. 15.2 pînă la fig. 15.5, obţinem o reprezentare vizuală a evoluţiei argumentaţiei inductive. La început, în fig, 15.2, pentru a reprezenta întreg diapazonul verificărilor efectuate era suficient un singur punct. Apoi pe diagramă apar noi şi noi linii pline, care figurează noi şi noi clase de cazuri care au fost verificate cu succes.

Punctele care reprezintă formele triunghiulare pentru care formula în discuţie a fost verificată sînt distribuite (continuu) de-a lungul unor linii. Dar formula rămîne neverificată pentru „grosul" formelor triunghiulare — cele reprezentate de aria neacoperită de aceste linii. Cu toate acestea, deoarece formula a fost verificată de-a lungul întregii frontiere, precum şi de-a lungul unei linii transversale, ne putem aştepta, în mod rezonabil, ca ea să se dovedească corectă în toate cazurile. Partea sugerează întregul, şi îl sugerează cu fermitate.

15.6. UN EXEMPLU ISTORIC

Vom investiga acum o problemă de geometrie în spaţiu mergînd pe urmele a doi mari matematicieni. Vă voi spune numele lor mai tîrziu, dar nu prea curînd, fiindcă altfel aş rata una din „poantele" povestirii.

(1) *Analogia sugerează o chestiune.* Un poliedru este limitat de planele feţelor, aşa cum un poligon este limitat de dreptele laturilor; poliedrele sînt analogele în spaţiu ale poligoanelor din plan. Dar poligoanele sînt mai simple, mai accesibile decît poliedrele, o chestiune referitoare la poligoane are multe şanse să se dovedească mult mai uşoară decît chestiunea corespunzătoare referitoare la poliedre. Cînd cunoaştem un anumit fapt despre poligoane, trebuie să încercăm să descoperim un fapt analog pentru poliedre; procedînd aşa, avem multe şanse să dăm peste o chestiune stimulantă, interesantă.

De pildă, ştim că suma unghiurilor unui triunghi este aceeaşi la toate triunghiurile; independent de forma şi de dimensiunile triunghiului, ea este egală cu 180°, sau cu două unghiuri drepte, sau cu π (în radiani; vom da preferinţă acestui din urmă mod de a măsura unghiurile). Mai general, suma unghiurilor unui poligon cu n laturi este $(n - 2)\pi$. Să încercăm acum să descoperim un fapt analog în legătură cu poliedrele.

(2) *Încercăm să trecem în revistă toate posibilităţile.* Scopul nostru nu este însă cu totul clar. Vrem să găsim ceva despre suma unghiurilor unui poliedru — dar despre care unghiuri?

Fiecare muchie a poliedrului este asociată cu un unghi *diedru* — unghiul diedru format de cele două feţe adiacente acelei muchii. Fiecare vîrf al poliedrului este asociat cu un unghi *solid* — cel format de feţele (trei, sau mai multe) adiacente în acel vîrf. Ce tip de unghi trebuie să avem în vedere? Are oare suma unghiurilor de acelaşi tip vreo proprietate simplă? Ce se poate spune despre suma celor şase unghiuri diedre dintr-un tetraedru? Dar despre suma celor patru unghiuri solide dintr-un tetraedru?

Ei bine, se constată că nici una din aceste din urmă două sume nu este independentă de forma tetraedrului (vezi ex. 15.14). Ce dezamăgire! Şi noi care ne aşteptam că, pe undeva, tetraedrul se va comporta ca un triunghi! ...

Şi totuşi, poate că încă ne-am mai putea salva ideea iniţială fiindcă n-am epuizat încă toate posibilităţile. Într-un poliedru mai există şi unghiuri de un alt tip (de fapt tipul acesta este şi cel mai familiar): fiecare faţă limitată de n laturi (de n muchii ale poliedrului) conţine n unghiuri interne. Să numim unghiurile de acest tip unghiurile feţei şi să încercăm să găsim suma tuturor unghiurilor feţelor unui poliedru. Să notăm suma căutată cu $\Sigma\alpha$ (vezi fig. 15.6)

(3) *Observăm.* Dacă nu vedem nici o altă cale de a aborda problema noastră, putem totdeauna s-o facem pe cale experimentală: luăm cîteva poliedre şi calculăm, pentru fiecare din ele, $\Sigma\alpha$ (suma unghiurilor feţelor). Putem începe cu cubul [vezi fig. 15.7(*a*)]. Fie-

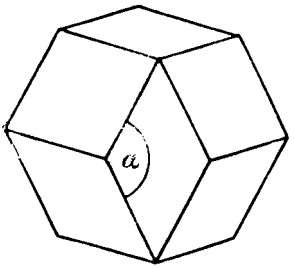


Fig. 15.6. Unghiul feței

care față a cubului este un pătrat; suma celor patru unghiuri ale unui pătrat este 2π. Și cum în cazul cubului există șase fețe pătrate, $\Sigma\alpha$ este

$$6 \times 2\pi = 12\,\pi.$$

La fel de ușor putem trata și tetraedrul, precum și octaedrul [vezi fig. 15.7 (*b*) și (*c*)].

Cele trei poliedre pe care le-am examinat pînă acum sînt poliedre regulate. Să examinăm, pentru variație, și poliedrul neregulat, de pildă o penta-prismă [o prismă cu baza pentagonală, vezi fig. 15.7(*d*)]. Această prismă are două tipuri de fețe: există cinci paralelograme și două pentagoane. Prin urmare, în cazul penta-prismei, ea este

$$5 \times 2\pi + 2 \times 3\pi = 16\,\pi.$$

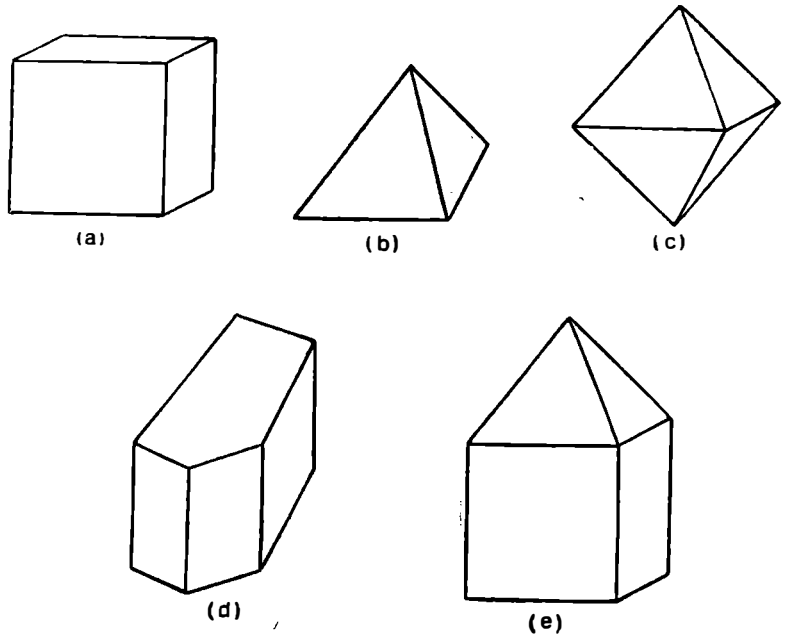


Fig. 15.7. Poliedre

Să luăm apoi un poliedru pe care-l întîlnim mai rar la orele de curs [vezi fig.15.7 (*e*)] pe un cub este plasată o piramidă, în chip de „acoperiş" ; „turnul" care rezultă are nouă feţe, cinci pătrate şi patru triunghiuri ; în consecinţă, $\Sigma\alpha$ pentru „turn" este

$$5 \times 2\pi + 4 \times \pi = 14\,\pi.$$

Adunăm observaţiile de pînă acum în tabelul I ; pentru a recunoaşte mai uşor poliedrele considerate, să consemnăm, la fiecare, numărul respectiv de feţe, F.

TABELUL I

Poliedrul	F	$\Sigma\alpha$
Cub	6	12π
Tetraedru	4	4π
Octaedru	8	8π
Penta-prismă	7	16π
Turnul	9	14π

Remarcaţi ceva demn de remarcat — vreo lege, sau vreo schemă, sau vreo regularitate ?

(4) *Observăm, călăuziţi de o idee.* Nu-i surprinzător că, în această etapă a jocului, nu sesizăm nimic frapant în datele de observaţie colectate pînă acum ; observaţia necălăuzită de o idee directoare rareori duce la rezultate notabile.

Poate însă că reflectînd puţin asupra propriului nostru procedeu, am putea găsi totuşi o ieşire din acest impas. În subparagraful (3) am calculat — şi nu numai o dată — suma totală a unghiurilor feţelor $\Sigma\alpha$, făcînd mai întîi suma acelor unghiuri care aparţin unei aceleiaşi feţe — ştim exact cît este această sumă, de fapt cunoaşterea acestei sume a constituit punctul de plecare al investigaţiei. Pentru variaţie, să facem acum mai întîi suma unghiurilor care au ca vîrf un acelaşi vîrf al poliedrului. Nu ştim cît face exact această sumă, dar ştim că ea este sigur mai mică decît 2π, unghiul plan maxim. (Aşadar, ne limităm acum, în mod explicit, la cazul poliedrelor *convexe* ; faptul amintit este intuitiv, dar puteţi căuta în Euclid XI 21, unde găsiţi o demonstraţie.) Să notăm cu V numărul de vîrfuri ale poliedrului considerat ; observăm că suma totală a unghiurilor feţelor este sigur mai mică decît o anumită valoare :

$$\Sigma\alpha < 2\pi\, V.$$

Să verificăm această relaţie pe materialul adunat! Extindem tabelul I. Obţinem tabelul II.

TABELUL II

Poliedrul	F	$\Sigma\alpha$	V	$2\pi V$
Cub	6	12π	8	16π
Tetraedru	4	4π	4	8π
Octaedru	8	8π	6	12π
Penta-prisma	7	16π	10	20π
Turnul	9	14π	9	18π

Într-adevăr, peste tot în tabelul II, $2\pi V$ este mai mare decît $\Sigma\alpha$, şi aproape că nu se poate să nu observăm că diferenţa este constantă

$$2\pi V - \Sigma\alpha = 4\pi.$$

Să fie doar o consecinţă? O simplă coincidenţă pare cu totul improbabilă, aşa că este greu de rezistat tentaţiei de a „ghici" — de a conjectura, ca să folosim un termen mai adecvat — că relaţia observată este valabilă nu numai în cele cîteva cazuri pe care le-am examinat, ci şi în general, pentru toate poliedrele convexe. Ajungem, în felul acesta, la *conjectura*

$$(?) \qquad \Sigma\alpha = 2\pi V - 4\pi.$$

Semnul de întrebare dintre parantezele din faţa relaţiei enunţate este menit să ne amintească — fapt esenţial — că relaţia nu este demonstrată, ci doar, pur şi simplu, conjecturată.

(5) *Ne verificăm conjectura.* Observaţiile, călăuzite de o remarcă fericită, ne-au condus la o conjectură remarcabilă — dar este ea oare adevărată?

S-o mai verificăm în cîteva cazuri. Mai există două poliedre regulate pe care le-am putea considera, dodecaedrul şi icosaedrul, cu $F = 12$, respectiv $F = 20$. În continuare, am putea considera prisma generală, prisma n-gonală (pe scurt, n-prisma), a cărei bază este un poligon cu n laturi, după aceea piramida n-gonală (n-piramida) cu baza de aceeaşi natură, şi (n-dubla-piramida); aceasta din urmă constă din două n-piramide situate de o parte şi de alta a unei baze comune (care *nu* este o faţă a dublei-piramide care rezultă). Cititorul poate extinde uşor tabelul II la solidele menţionate.

Poliedrul	F	$\Sigma\alpha$	V	$2\pi V$
Dodecaedrul	12	36π	20	40π
Icosaedrul	20	20π	12	24π
n-prisma	$n+2$	$(4n-4)\pi$	$2n$	$4n\pi$
n-piramida	$n+1$	$(2n-2)\pi$	$n+1$	$(2n+2)\pi$
n-dubla-piramidă	$2n$	$2n\pi$	$n+2$	$(2n+4)\pi$

Relaţia conjecturală (?) se verifică în toate cazurile examinate — ceea ce este reconfortant, dar nu are valoare de demonstraţie.

(6) *Reflectăm asupra procedeului folosit.* Calculînd suma $\Sigma\alpha$, am folosit de mai multe ori unul şi acelaşi procedeu; am început prin a face suma unghiurilor care aparţin aceleiaşi feţe. De ce n-am aplica acest procedeu *în general?*

Pentru a merge pe această linie, să introducem o notaţie convenabilă. Fie s_i numărul de laturi ale feţei cu numărul de ordine i; aşadar

$$s_1,\ s_2,\ s_3, \ldots,\ s_F$$

sînt respectiv, numărul de laturi ale primei feţe, ale celei de a doua feţe şi aşa mai departe. Cu această notaţie

$$\begin{aligned}\Sigma\alpha &= \pi(s_1-2)+\pi(s_2-2)+\ldots+\pi(s_F-2)\\ &= \pi(s_1+s_2+\ldots+s_F-2F).\end{aligned}$$

Dar $s_1+s_2+s_3+\ldots+s_F$ este numărul total de laturi ale tuturor celor F feţe. În acest total, fiecare muchie a poliedrului este numărată de exact două ori (fiindcă fiecare face parte din două feţe, şi numai din două) aşa că

$$s_1+s_2+\ldots+s_F=2E,$$

unde E reprezintă numărul de muchii ale poliedrului. Obţinem deci

$$\Sigma\alpha = 2\pi\,(E-F). \qquad (!)$$

Am obţinut aici o a doua expresie pentru $\Sigma\alpha$, dar există o diferenţă esenţială: prima expresie, (?) din subparagraful (4), era doar conjecturală, în timp ce (!) este demonstrată. Dacă eliminăm pe $\Sigma\alpha$ între (?) şi (!), obţinem relaţia

$$F+V=E+2 \qquad (??)$$

care însă nu este o relaţie demonstrată şi, în consecinţă, punem în faţa ei semnul (??). Într-adevăr, relaţia (??) este la fel de nesigură ca relaţia (?); fiecare din cele două relaţii (??) şi (?) decurge din cealaltă prin intermediul relaţiei pe deplin demonstrate (!), aşa că ele subzistă sau se năruie numai împreună, ele sînt echivalente.

(7) *Verificări.* Atît relaţia cu totul familiară (??), cît şi relaţia mai puţin familiară (?) au fost descoperite de Euler, care nu ştia că Descartes le descoperise deja, înaintea lui. De lucrările lui Descartes despre acest subiect s-a aflat din cîteva scurte fraze descoperite în manuscrisele lui nepublicate, care au fost tipărite cam la 100 de ani după moartea lui Euler.[2]

Euler a consacrat subiectului două memorii şi o scurtă remarcă într-un al treilea memoriu[3]. Remarca priveşte suma unghiurilor solide ale unui tetraedru [această sumă depinde de forma tetraedrului, aşa cum am mai spus în subparagraful (2)]. Expunerea precedentă urmează, în ansamblu, linia primului memoriu al lui Euler, în care el povesteşte cum a ajuns la această descoperire, dar nu dă nici o demonstraţie formală, ci numai o serie de verificări ale relaţiei. Am vrea să urmăm linia lui Euler şi sub acest aspect. Adunînd la un loc materialul din tabelele precedente şi comparîndu-l cu valorile E, numărul de muchii, obţinem tabelul III.

TABELUL III

Poliedrul	F	V	E
Tetraedrul	4	4	6
Cub	6	8	12
Octaedrul	8	6	12
Dodecaedru	12	20	30
Icosaedru	20	12	30
Turnul	9	9	16
n-prisma	$n + 2$	$2n$	$3n$
n-piramida	$n + 1$	$n + 1$	$2n$
n-dubla-piramida	$2n$	$n + 2$	$3n$

Relaţia conjecturată (??) se verifică de-a lungul întregului tabel III — ceea ce este reconfortant, dar, desigur, nu are valoare de demonstraţie.

(8) *Reflecţii asupra rezultatului obţinut.* În cel de-al doilea memoriu menţionat, Euler a încercat să demonstreze relaţia (??), însă tenta-

[2] Descartes, *Oeuvres*, vol. X, pp. 265–269.
[3] Euler, *Opera omnia*, seria I, vol. 26, pp. XIV–XVI, 71–108 şi 217–218.

tiva lui a eşuat; în demonstraţia dată de el există o lacună esenţială. Dar, de fapt, consideraţiile de mai sus ne-au dus pînă foarte aproape de ceea ce ar putea constitui o demonstraţie formală; trebuie doar să ne dăm bine seama cît de departe am progresat.

Să încercăm să sesizăm întreaga semnificaţie a rezultatului (!) obţinut de noi. În particular, să vedem ce se întîmplă cînd poliedrul *variază*. Să ne imaginăm că poliedrul suferă o modificare *continuă*; feţele lui devin din ce în ce mai oblice, aşa că liniile şi punctele lor de intersecţie, adică muchiile şi vîrfurile poliedrului, variază continuu, dar „planul general", sau „structura morfologică" a poliedrului — corelaţia dintre feţe, muchii şi vîrfuri — rămîne neschimbată. În aceste condiţii, şi *numerele* F, E şi V (respectiv, numărul de feţe, de muchii şi de vîrfuri) rămîn *neschimbate*. O astfel de modificare poate afecta fiecare unghi al feţei, α, luat individual, dar în virtutea relaţiei formal demonstrate (!), nu poate afecta unghiurile feţelor luate împreună; cu alte cuvinte, ea trebuie să lase neschimbată valoarea $\Sigma\alpha$, suma tuturor unghiurilor feţelor. Şi tocmai în acest fapt am putea întrezări o posibilitate de a trage folos dintr-o astfel de modificare: o modificare de această natură ar putea reduce poliedrul propus la o formă mai accesibilă, pentru care am putea calcula mai uşor (decît pentru poliedrul iniţial) suma $\Sigma\alpha$ (rămasă neschimbată!)

Şi, într-adevăr, să alegem una din feţele poliedrului drept „bază". Aşezăm această bază orizontal şi o lăţim (în timp ce celelalte feţe se contractă), în aşa fel încît, în cele din urmă, întreg poliedrul să poată fi *proiectat ortogonal pe baza lui*. Fig. 15.8 arată ce se obţine (a) — în cazul unui cub şi (b) — în cazul unui poliedru „general" (poliedru oarecare). Rezultatul este un poliedru aplatizat, redus la două pînze poligonale (care au aceeaşi bordură): pînza de jos („baza lăţită") este nesubdivizată, cea de deasupra este divizată în $F - 1$ subpoligoane, F — fiind numărul de feţe ale poliedrului iniţial. Să notăm cu r numărul de laturi ale conturului poligonal care mărgineşte ambele pînze.

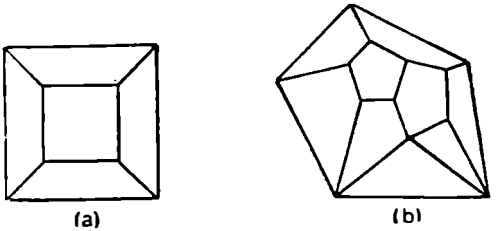


Fig. 15.8. Poliedre aplatizate

Calculăm $\Sigma\alpha$ pentru poliedrul aplatizat (ştim de la bun început că valoarea pe care o vom obţine va fi exact cea iniţială, a poliedrului neaplatizat). Suma totală constă din trei termeni.

Suma unghiurilor pînzei de jos („baza lăţită") este $(r - 2)\pi$.

Rămîn unghiurile din interiorul pînzei de sus; ele înconjură cele $(V - r)$ vîrfuri interioare, aşa că suma lor este $(V - r)\,2\pi$.

Adunînd cele trei sume parţiale, obţinem

$$\begin{aligned}\Sigma\alpha &= 2(r - 2)\pi + (V - r)\,2\pi \\ &= 2\pi\,V - 4\pi\end{aligned}$$

Ceea ce demonstrează conjectura (?) şi, prin urmare, demonstrează şi conjectura (??).

15.7. METODĂ ŞTIINŢIFICĂ: „GHICEŞTE ŞI VERIFICĂ"

Exemplele precedente sugerează inferenţe de ordin general. Firească, inferenţele ar decurge mai spontan şi mai documentat dacă am analiza mai mult aceste exemple, sau altele similare (vezi Exemplele şi comentariile, la sfîrşitul acestui capitol); dar chiar şi cele discutate pînă acum sînt de natură să ne conducă la cîteva remarci care tind să contureze următoarele:

Observaţia[4] poate conduce la descoperire.

Observaţia trebuie să-şi propună să releveze în materialul examinat o eventuală regularitate, sau o schemă, sau o lege.

Observaţia are mai multe şanse să ducă la rezultate demne de reţinut dacă este călăuzită de o remarcă judicioasă, de o inferenţă preliminară [ca în 15.6(4)].

Observaţia furnizează doar generalizări „de probă", conjecturi, nu şi demonstraţii.

Verifică-ţi conjectura: analizează cazuri particulare şi consecinţe.

Cu fiecare nou caz particular verificat, cu fiecare nouă consecinţă, confirmată, creşte creditul care poate fi acordat conjecturii.

Fii foarte atent şi nu confunda sugestia cu demonstraţia, conjectura cu faptul.

Nu neglija analogiile: ele te pot conduce la o descoperire [ca analogia între poligoane şi poliedre, 15.6(1)].

Examinează cazuri extreme, cazuri-limită [cum erau triunghiul degenerat, în 15.4 şi poliedrul aplatizat, în 15.6(8)].

---

[4] Aici şi în continuarea paragrafului — cu sensul de „observare nemijlocită a faptelor", „abordarea experimentală a problemei" [cf. 15.6(3)]. — *N.T.*

Aceste remarci ar merita, desigur, să fie formulate mai precis, cu mai multe detalii, mai sistematic şi mai ales, pe baza unei documentaţii mai ample (cf. *MRP*). Dar şi în circumstanţe ca cele de aici — cînd inferenţele decurg din exemple ca cele de mai sus şi dintr-o discuţie cu elevii, judicios condusă — ele pot contura în mintea elevului, la nivelul şcolii medii, o primă viziune de bază asupra naturii ştiinţei. Filozofii de ieri şi de azi au pledat şi continuă să pledeze opinii foarte divergente despre natura ştiinţei, despre (ce este) „metoda ştiinţifică", despre (ce este) „inducţia" etc. Dar, *în fapt*, ce fac oamenii de ştiinţă, cum procedează ei efectiv? Ei elaborează explicaţii ipotetice şi îşi supun ipotezele la proba decisivă a experienţei. Şi dacă vreţi o descriere în trei cuvinte a metodei stiinţifice, eu vă propun:

GHICEŞTE ŞI VERIFICĂ

15.8. CITEVA TRĂSĂTURI DE DORIT ALE „PROBLEMELOR DE CERCETARE"

Problemele prezentate mai sus diferă de obişnuitele probleme de rutină sub mai multe aspecte, eu însă n-aş vrea să insist aici decît asupra a trei dintre ele.

(1) Şcolarul primeşte problema pe care o are de rezolvat gata formulată, gata întocmită, dintr-un manual sau de la profesor, şi deseori profesorului aproape că nu-i pasă (iar manualului — cu atît mai puţin) dacă elevul este sau nu interesat de problemă. La un matematician, dimpotrivă, pasul cel mai important, decizia crucială, poate constă tocmai în *a alege* problema de care se va ocupa; în a „dibui", a inventa o problemă care să-l intereseze, să merite osteneala de a fi rezolvată şi, în acelaşi timp, să nu fie peste puterile lui. Or, în 15.2 şi 15.4, profesorul regizează totul în aşa fel încît elevii să fie determinaţi *să participe oarecum la elaborarea problemei* [cf. 14.5(1)].

(2) Majoritatea problemelor din culegeri aproape că n-au nici un context; fiecare în parte nu face decît să ilustreze o anumită regulă şi să creeze o oarecare îndemînare în aplicarea acelei reguli. Iar după ce şi-au îndeplinit această funcţie, ele pot fi date uitării. Or, problemele din 15.2 şi 15.6, sînt probleme polivalente, probleme cu *substrat bogat*; ele însele sugerează noi probleme care incită gîndirea, şi aceste probleme, la rîndul lor, sugerează alte probleme care incită gîndirea şi aşa mai departe, pînă ce ramificaţiile problemei iniţiale ajung să acopere un domeniu considerabil. (Despre astfel de ramificaţii vom discuta ceva mai pe larg în Exemplele şi comentariile de la sfîrşitul capitolului.)

(3) În multe săli de clasă verbul a „ghici" este tabu, în timp ce în cercetarea matematică — linia de conduită. „Mai întîi ghicește, apoi verifică" constituie aproape o regulă. Or, în problemele precedente, observarea, conjecturarea, argumentarea inductivă, pe scurt — *raționamentul plauzibil* joacă un rol proeminent.

(4) Deși nici punctul (1) (participarea elevilor la elaborarea problemei) nu este lipsit de importanță, mai importante rămîn totuși celelalte două puncte. Problemele cu *substrat* legate de lumea înconjurătoare sau de alte domenii ale gîndirii și problemele care fac apel la *raționamentul plauzibil*, care incită și pun la încercare judecata elevilor, sînt mult mai în măsură și au mult mai multe șanse să ducă la maturizarea intelectuală a tinerilor decît problemele cu care sînt pline manualele și care nu fac altceva decît să aplice în practică o regulă sau alta, luată izolat.

15.9. CONCLUZIE

Așa cum le concep eu, exemplele și remarcile de felul celor prezentate în acest capitol sînt susceptibile de a fi comunicate eficient la nivelul școlii medii, și ele pot mijloci elevilor — hai să spunem — trei lucruri.

În primul rînd, ele pot da elevului o oarecare idee despre matematica în stare născîndă, în curs de elaborare, despre ce înseamnă activitate creatoare independentă.

În al doilea rînd, și acesta este chiar mai important, fiindcă poate fi de folos unei fracțiuni mai mari din masa elevilor — ele contribuie la comprehensiunea nu numai a matematicii, ci și a altor științe. Într-adevăr, ele dau o primă idee, rezonabil de fidelă, despre „cercetarea inductivă" și despre „metoda științifică".

În fine, ele relevă un aspect al matematicii pe cît de important, pe atît de rar menționat: matematica apare în ele ca o rudă apropiată a științelor naturii, ca un fel de „știință de observație", în care observarea și analogia pot conduce la descoperire. Acest aspect este de natură să fie deosebit de atrăgător pentru viitorii „consumatori" de matematică, viitorii oameni de știință și ingineri.

Iată de ce îmi exprim speranța că în școala medie de mîine, descoperirea în matematică, metoda științifică și aspectul inductiv al matematicii nu vor mai fi complet neglijate așa cum sînt în școala medie de azi.

EXEMPLE ŞI COMENTARII LA CAPITOLUL 15

Partea întîi

15.1. Printre cele cîteva conjecturi sugerate de lista din 15.2 şi enunţate în 15.3, există vreunele pe care le-aţi putea demonstra? Alegeţi o aserţiune care vi se pare mai uşor accesibilă şi demonstraţi-o.

15.2. [Vezi 15.4] Imaginaţi şi alte căi de a verifica formula lui Heron.

15.3. [Vezi 15.5] În fig. 15.5, un arc din cercul unitate împarte triunghiul (ale cărui puncte reprezintă formele triunghiulare) în două părţi, una deasupra, cealaltă dedesubtul arcului. Ce diferenţă există între formele triunghiulare reprezentate de cele două părţi?

15.4. [Vezi 15.6(8)] Încercaţi să elaboraţi o trecere *mai precis definită* de la poliedrul convex „general" la cel „aplatizat".

15.5. Considerăm un poliedru convex cu F feţe, V vîrfuri şi E muchii. Fie:
F_n — numărul de feţe care au exact n laturi, şi
V_n — numărul de vîrfuri în care se întîlnesc exact n muchii.
Spuneţi dintr-o dată cît face ΣF_n şi ΣV_n; semnul Σ este folosit aici ca o abreviere pentru $\sum_{n=3}$. (Bineînţeles, numai un număr finit de valori F_n sînt diferite de 0, şi tot aşa se întîmplă şi cu valorile V_n; aşadar, reprezintă, de fapt, o sumă finită. Semnul Σ va fi folosit cu aceeaşi semnificaţie şi în alte cîteva probleme conexe care urmează.)

15.6. (Continuare) Exprimaţi în cîteva moduri diferite numărul de unghiuri ale feţelor.

15.7. (Continuare) Prin diagonale convenabil alese („diagonale de suprafaţă") care nu se intersectează între ele, împărţiţi fiecare faţă a unui poliedru în triunghiuri. Exprimaţi în cîteva moduri diferite numărul de triunghiuri în care poate fi împărţită în felul acesta suprafaţa totală a poliedrului.

15.8. Arătaţi că

$$E \geqslant \frac{3F}{2}, \quad E \geqslant \frac{3V}{2}.$$

Cazul de egalitate se poate oare realiza în prima inegalitate, şi în ce circumstanţe? Aceeaşi întrebare, în legătură cu a doua inegalitate.

15.9. Arătaţi că în orice poliedru convex, media unghiurilor feţelor nu este niciodată mai mică decît $\frac{\pi}{3}$, dar este totdeauna mai mică decît $\frac{2\pi}{3}$.

15.10. Arătați că în orice poliedru convex trebuie să existe o față cu mai puțin de șase laturi.

15.11. Fiind dat V — numărul de vîrfuri ale unui poliedru convex, găsiți maximul lui F și maximul lui E. În ce condiții se realizează aceste valori maxime?

15.12. Fiind dat F — numărul de fețe ale unui poliedru convex, găsiți maximul lui V și maximul lui E. În ce condiții se realizează aceste valori maxime?

15.13. Cînd un segment de dreaptă unește două vîrfuri ale unui poliedru convex sînt posibile trei cazuri: segmentul de conexiune poate fi o muchie, poate fi o diagonală a fețelor, sau poate fi o diagonală (propriu-zisă). Ultimul caz se realizează dacă și numai dacă nici un punct al segmentului, cu excepția celor două extremități, nu se află pe suprafața poliedrului. Fie D — numărul de diagonale ale poliedrului; simbolurile E, F, V, F_n și V_n vor fi folosite cu aceleași semnificații ca pînă acum.

(1) Calculați D pentru cele cinci poliedre regulate.

(2) Calculați D pentru n-prismă, n-piramidă și n-dublu-piramidă.

(3) Exprimați D în funcție de F, cînd toate fețele poliedrului sînt poligoane cu același număr n de laturi, $n = 3, 4, 5, \ldots$

(4) Examinați D în cazul general.

Ilustrați cu exemple fiecare caz general. Fiți circumspecți, întrebările pot fi înșelătoare.

15.14. [Vezi 15.6(2)] Considerăm un tetraedru și fie $\Sigma\delta$ — suma celor șase unghiuri diedre și $\Sigma\omega$ — suma celor patru unghiuri solide ale acestuia.

Calculați aceste două sume în următoarele trei cazuri-limită:

(1) Tetraedrul se aplatizează într-un triunghi, trei muchii devin laturile triunghiului, iar celelalte trei muchii — segmente care unesc un punct interior al triunghiului cu vîrfurile acestuia.

(2) Tetraedrul se aplatizează într-un patrulater convex; patru din cele șase muchii devin laturile patrulaterului, iar celelalte două — diagonalele acestuia.

(3) Unul din vîrfurile tetraedrului „pleacă" la infinit, cele trei muchii care converg în acel vîrf devin paralele între ele și perpendiculare pe fața opusă.

(În jurul vîrfului unui unghi diedru luat ca centru, descriem o sferă de rază 1; porțiunea din suprafața sferei care cade în interiorul unghiului poliedru este un poligon sferic. Aria acestui poligon sferic măsoară „unghiul solid".)

15.15. (Continuare) Analizați răspunsul de la ex. 15.14. Comparați între ele cele două sume examinate. Ele variază oare în același mod? Variațiile lor sînt oare corelate?

15.16. La un poliedru cu F fețe, V vîrfuri și E muchii, notăm cu $\Sigma\delta$ suma celor E unghiuri diedre și cu $\Sigma\omega$ — suma celor V unghiuri solide. Calculați cele două sume în cazul cubului.

15.17. (Continuare) Calculați cele două sume pentru două cazuri distincte (degenerate) ușor accesibile de n-piramidă.

15.18. (Continuare) Calculați cele două sume în cazuri (limită) accesibile de n-prismă și n-dublă piramidă.

15.19. (Continuare) În toate cazurile considerate, comparați cele două sume cu numerele F, V și E; analizați variația cantităților comparate; care anume variații par mai strins corelate?

15.20. (Continuare) Dacă ați găsit o regulă care este coroborată de toate observațiile făcute, încercați să o demonstrați.

Partea a doua

15.21. Încercați să ghiciți răspunsurile la următoarele chestiuni.

Dintre toate triunghiurile înscrise într-un cerc dat, care are aria cea mai mare?

Dintre toate patrulaterele înscrise într-un cerc dat, care are aria cea mai mare?

Dintre toate poligoanele cu un număr n dat de laturi, înscrise într-un cerc dat, care are aria cea mai mare?

15.22. Încercați să ghiciți răspunsurile la următoarele chestiuni:

Dintre toate triunghiurile circumscrise unui cerc dat, care are aria cea mai mică?

Dintre toate patrurlaterele circumscrise unui cerc dat, care are aria cea mai mică?

Dintre toatepoligoanele cu un număr n dat de laturi, circumscrise unui cerc dat, care are aria cea mai mică?

15.23. *Principiul rațiunii suficiente.* Răspunsurile „clasice" — răspunsurile date „de regulă" — la ex. 15.21 și 15.22 sînt corecte[5]. Nu ne vom ocupa aici de demonstrarea lor. Aș vrea să investigăm puțin de ce se întîmplă atît de des ca oamenii să ghicească corect în situații de genul celor de mai sus.

Firește, nu ne putem aștepta să ajungem la un răspuns foarte precis. Cred însă că cele de mai jos exprimă „simțăminte" manifeste la foarte multă lume.

De ce sînt poligoanele regulate atît de populare? Cercul este figura plană cea mai „perfectă", cea mai simetrică; ea are infinit de multe axe de simetrie, ea este simetrică față de oricare din diametrele ei. Or, dintre toate poligoanele cu un număr dat de laturi, poligonul regulat este „cel mai aproape — ca perfecțiune" de cerc; este cel mai simetric, are mai multe axe de simetrie decît oricare altul. Și în felul acesta, ne așteptăm că poligonul regulat înscris va „umple" cercul mai bine (iar poligonul regulat circumscris va „încinge" cercul mai strîns) decît oricare alt poligon cu același număr de laturi.

Și analogia joacă un rol. Poligonul regulat realizează extremul în problema izoperimetrică (vezi 15.3, ex. 15.1), care este similară cu problemele precedente.

---

[5] În legătură cu ex. 15.21, vezi *MPR*, vol. I, pp. 156—157.

Mai există însă şi alte argumente plauzibile. Vom discuta unul din ele, care este destul de subtil, dar merită o atenţie deosebită. Avem aici de-a face cu probleme cu mai multe necunoscute în care condiţia este aceeaşi pentru toate necunoscutele : condiţia nu favorizează nici un vîrf al poligonului în dauna altuia, nici o latură în dauna alteia. În consecinţă, ne putem aştepta că în poligonul care satisface condiţia şi constituie, aşadar, soluţia problemei, toate laturile precum şi toate unghiurile vor fi egale. Ne aşteptăm, aşadar, ca soluţia să fie poligonul regulat.

Subiacent acestei „aşteptări" este un principiu de inferenţă plauzibilă pe care am putea încerca să-l formulăm astfel :

„Nici una din posibilităţile eligibile să nu fie favorizată, dacă nu există o raţiune suficientă ca aceea să fie aleasă".

Am putea numi această sentinţă „principiul raţiunii non-suficiente". Este un principiu care are oarecare importanţă în rezolvarea problemelor ; destul de frecvent, el ne permite să prevedem soluţia sau să alegem un procedeu care conduce la soluţie. Cînd contextul este matematic, poate că este mai avantajoasă o formulare ceva mai specifică :

„Este de aşteptat ca necunoscutele care joacă unul şi acelaşi rol în condiţie să joace unul şi acelaşi rol şi în soluţie."

Sau, mai concis : „Nici o diferenţă între condiţii, nici o diferenţă între rezultate". Sau, altfel : „ Pentru necunoscutele supuse la aceleaşi condiţii, aşteaptă-te să obţii aceleaşi valori".

În problemele de geometrie, principiul favorizează simetria (aşa cum am văzut). De aceea s-ar putea să găsim uneori mai sugestivă următoarea formulare a principiului raţiunii non-suficiente (deşi, este, de fapt, mai puţin clară) :

„Ne aşteptăm ca orice simetrie constantă în datele şi în condiţia problemei să se reflecte în soluţie."

„Din simetrie trebuie să rezulte simetrie".

Într-o oarecare măsură, „simetria constatată în date şi în condiţie" trebuie să se reflecte nu numai în „obiectul-soluţie", ci şi în „procedeul de rezolvare"[6].

Bineînţeles, trebuie să nu uităm că principiul este doar euristic şi să nu luăm plauzibilul drept cert[7].

Principiul raţiunii non-suficiente joacă un anumit rol şi în chestiuni care nu sînt strict matematice[8].

Iată acum un exemplu pregnant care contrazice flagrant principiul (şi pe care, pentru concizie, îl vom descrie folosind terminologia algebrei). Problema este următoarea : Să se găsească n cantităţi, fiind date n funcţii elementare simetrice de acele cantităţi. Principiul raţiunii non-suficiente ne determină să ne aşteptăm că cele n cantităţi vor fi egale. Şi totuşi, la o ecuaţie algebrică ai cărei coeficienţi sînt daţi „la întîmplare", trebuie să ne aşteptăm că toate cele n rădăcini vor fi distincte.

---

[6] Vezi *CRP*, „Simetria", pp. 206—207 şi ex. 5.13 pentru terminologie.

[7] Cf. *MRP*, vol. I, pp. 220—222, ex. 40 şi 41. Vezi, de asemenea, articolul autorului *On the Role of the Circle in Certain Variational Problems*, în „Annales Univ. Scient., Budapest. Sectio Math.", vol. 3—4, 1960—1961, pp. 233—239.

[8] Vezi J. M. Keynes, *A Treatise of Probability*, pp. 41—64.

15.24. *Măgarul lui Buridan.* Un măgar teribil de înfometat s-a pomenit în faţa a două căpiţe de fin la fel de ispititoare, una era la dreapta, alta la stînga sa, iar el la mijloc aşa că simetria era perfectă. „Atras" la fel de ambele căpiţe, măgarul nu s-a putut decide pe care s-o aleagă şi a murit de foame.

Sărmanul măgar — a căzut victimă principiului raţiunii non-suficiente.

15.25. Dintre toate poliedrele înscrise într-o sferă dată şi cu un număr V dat de vîrfuri, care are volumul cel mai mare?

Încercaţi să ghiciţi răspunsul pentru $V = 4$, 6 şi 8.

15.26. Dintre toate poliedrele circumscrise unei sfere date şi cu un număr F dat de vîrfuri, care are volumul cel mai mic?

Încercaţi să ghiciţi răspunsul pentru $F = 4$, 6 şi 8.

15.27. Fiind dată raza r a sferei, calculaţi volumul cubului înscris.

15.28. Considerăm că sfera de rază r este globul terestru. Înscriem în ecuator un hexagon regulat. Cele şase vîrfuri ale acestui hexagon, împreună cu polul nord şi polul sud sînt cele opt vîrfuri ale unei duble-piramide. Calculaţi-i volumul.

15.29. Fiind dată raza r a sferei, calculaţi volumul octaedrului regulat circumscris

15.30. O prismă dreaptă care are ca bază un hexagon regulat este circumscrisă unei sfere de rază r, pe care o considerăm drept globul pămîntesc. Suprafaţa prismei este tangentă la sferă în şase puncte egal distanţate în lungul ecuatorului, precum şi la polul nord şi la polul sud. Calculaţi volumul prismei.

Aveţi vreo remarcă de făcut?

15.31. Comparaţi între ele solidele considerate mai sus (ex. 15.27 cu ex. 15.28, ex. 15.29 cu ex. 15.30) şi încercaţi să găsiţi o explicaţie plauzibilă.

15.32. Iată o ipoteză plauzibilă: dintre două poliedre înscrise în aceeaşi sferă şi cu acelaşi număr V de vîrfuri, cea care are feţe mai multe şi muchii mai multe are şi şanse mai mari de a „umple" (mai bine) sfera. Admiţînd-o fără demonstraţie, ce tip de poliedru vă aşteptaţi că va constitui soluţia ex. 15.26?

15.33. Iată o supoziţie plauzibilă: dintre două poliedre circumscrise aceleiaşi sfere şi cu acelaşi număr F de feţe, cea care are vîrfuri mai multe şi muchii mai multe are şi şanse mai mari de a „încinge" sfera mai strîns. Admiţînd-o fără demonstraţie, ce tip de poliedru vă aşteptaţi că va constitui soluţia ex. 15.26?

15.34. Nu mai aveţi de adăugat nici o altă remarcă sugerată de ex. 15.31?

15.35. Dintre toate poliedrele care au o arie dată a suprafeţei şi un număr de feţe F dat, care are volumul cel mai mare?

Încercaţi să ghiciţi răspunsul pentru $F = 4$, 6 şi 8.

15.36. Rezolvați sistemul, dînd toate soluțiile:

$$2x^2 - 4xy + 3y^2 = 36$$
$$3x^2 - 4xy + 2y^2 = 36$$

Ce se întîmplă cu principiul rațiunii non-suficiente?

15.37. Rezolvați sistemul, dînd toate soluțiile:

$$6x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36$$
$$3x^2 + 6y^2 + 3z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36$$
$$3x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36$$

15.38. Rezolvați sistemul, dînd toate soluțiile:

$$x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36$$
$$6x^2 + y^2 + 5z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36$$
$$5x^2 + 6y^2 + z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36$$

15.39. *Principiul rațiunii non-suficiente în fizică. Sau — natura ar trebui să fie predictibilă.* La începutul lucrării sale *Despre echilibrul planelor sau despre centrele de greutate ale planelor*"[9], Arhimede se ocupa de echilibrul pîrghiei. (Pîrghia este o bară rigidă orizontală care are un punct de sprijin; greutatea barei este considerată neglijabilă.) Arhimede analizează cazul cînd punctul de sprijin este la mijlocul barei, iar extremitățile acesteia poartă greutăți egale (vezi fig. 15.9); el admite ca evident că în această situație de simetrie perfectă, trebuie să existe un echilibru; într-adevăr, primul său postulat afirmă: „Greutăți egale la distanțe egale sînt în echilibru". Într-un fel, pîrghia este, într-adevăr, în situația măgarului lui Buridan: ea nu are nici o rațiune suficientă să se încline mai curînd într-o parte decît în cealaltă.

Aici putem însă pătrunde ceva mai adînc. Să vedem ce se întîmplă dacă cineva contrazice postulatul lui Arhimede și propune o regulă diferită: în situația din fig. 15.9, greutatea din dreapta se va lăsa în jos. Ei bine, dacă această previziune se dovedește corectă pentru mine, cînd mă uit eu la pîrghie, ea trebuie să se dovedească falsă pentru prietenul meu cu care stau față în față și care se uită la pîrghie din partea cealaltă; regula care contrazice postulatul lui Arhimede *nu poate fi general valabilă.* Și putem sesiza acum o rațiune mai profundă de încredere pentru care înclinăm să acceptăm principiul lui Arhimede: noi dorim ca natura să fie predictibilă.

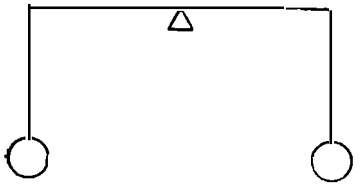


Fig. 15.9. Greutăți egale, la distanțe egale

[9] Vezi *Operele* lui Arhimede editate de T.L. Heath, p. 189.

15.40. *Problema celor n puncte alese pe o suprafață sferică.* Reformulăm ex. 15.25 și ex. 15.26 ca și cum ar fi primele două dintr-o serie de probleme analoge.

Pe suprafața unei sfere date, să se aleagă n puncte în așa fel încît

(1) *poliedrul înscris* ale cărui vîrfuri sînt cele n puncte să aibă volumul maxim;

(2) *poliedrul circumscris* ale cărui n fețe sînt tangente la sferă în cele n puncte să aibă volumul minim;

(3) cea mai scurtă dintre cele $n(n-1)/2$ distanțe între cele n puncte să fie un maxim (un „maximum minimorum": aceasta este „problema celor n *mizantropi*");

(4) presupunînd că în fiecare punct se află cîte o sarcină electrică unitate, cele n sarcini care se resping reciproc să fie în *echilibrul electrostatic cel mai stabil.*

(5) Pe suprafața sferei există o distribuție de masă arbitrară dar continuă, a cărei destinație este „observată" (= măsurată. — *N. T.*) în n puncte. Să se aleagă cele n puncte în așa fel încît estimarea masei totale pe baza celor n date de observație să se facă cel mai exact. (Aceasta este „problema celor n *reporteri*" ai unei agenții mondiale de știri, sau problema *interpolării optime.* Pentru un segment de dreaptă, Gauss a rezolvat —într-un fel — problema analogă, prin celebra lui cvadratură mecanică.)

În toate cele cinci probleme precedente, dacă $n = 4, 6, 8, 12$ sau 20, merită să fie luate în considerare vîrfurile unui anumit poliedru regulat, înscris, cu toate că s-ar putea ca ele să nu dea soluția, așa cum au arătat unele din problemele precedente (Cf. L. Fejes-Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum).*

Dacă cele n puncte sînt alese la întîmplare (așa par să fie distribuite pe cer primele n stele fixe cele mai strălucitoare — dacă n nu este prea mare), se poate calcula distanța medie de la unul din puncte pînă la punctul vecin cel mai apropiat, pînă la punctul cel mai apropiat dintre cele $(n-2)$ puncte restante etc. (Vezi un articol al autorului în „Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, vol. 80, 1935, pp. 126—130.)

Partea a treia

15.41. *Alte probleme.* Să mai considerăm cîteva probleme de cercetare, oarecum similare cu cele discutate în acest capitol, și totuși diferite; și să ne îndreptăm în mod deosebit atenția asupra unor chestiuni de genul: Problema respectivă se încadrează oare în planul de învățămînt, și dacă da — unde anume, în ce context? Problema este instructivă? Are ea un substrat care merită să fie investigat? Ilustrează vreo idee de interes general? Dă oare prilej de raționament inductiv, raționament plauzibil? Prilejuiește oare o demonstrație care, la nivelul clasei, incită, mobilizează puterea de judecată a elevilor? În ce fel trebuie prezentată ea în clasă?

15.42. În 15.4 am verificat o formulă generală, discutînd o serie de cazuri particulare. În ce alte ocazii ați mai putea recurge la o discuție de acest tip? Elaborați efectiv, de la început pînă la sfîrșit, o astfel de discuție în alte cîteva cazuri. Ce merite puteți recunoaște unei astfel de discuții?

15.43. Scopul principal al 15.5 era să ilustreze grafic un aspect al raționamentului inductiv. Dar paragraful acesta n-ar putea fi util elevilor și sub alte aspecte?

15.44. *Fracții zecimale periodice.* Cele trei reprezentări (dezvoltări) zecimale de mai jos:

$$\frac{1}{6} = 0{,}166666666\ldots$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142\ldots$$

$$\frac{1}{8} = 0{,}125$$

sînt de tipuri diferite, și anume fiecare aparține unui alt tip. Cea care reprezintă numărul $\frac{1}{8}$ este *finită*, celelalte două sînt *infinite*. În fapt, aceste două din urmă sînt *fracții zecimale periodice*, sau recurente; în notația standard, ele se scriu sub forma

$$\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}.$$

Bara este plasată deasupra părții care se repetă a *perioadei*, adică deasupra secvenței de cifre care trebuie repetată la infinit. Perioada lui $\frac{1}{6}$ are lungimea 1, cea a lui $\frac{1}{7}$ are lungimea 6; în general, numărul de cifre din perioadă se numește *lungimea* perioadei. Reprezentarea zecimală a lui $\frac{1}{7}$ este *pur periodică* cea a lui $\frac{1}{6}$ este *mixtă*: prima nu conține, în timp ce a doua conține, o secvență inițială de cifre care nu fac parte din perioadă. Iată încă cîte un exemplu din fiecare tip

$$\frac{39}{44} = 0{,}88\overline{63} \qquad \frac{19}{27} = 0{,}\overline{703} \qquad \frac{19}{20} = 0{,}95.$$

Încercați să descoperiți, prin simplă observație, cît puteți mai multe despre cele trei tipuri de reprezentări zecimale, despre lungimea perioadelor lor, despre distribuția cifrelor în perioadă sau despre orice altceva care vi se pare demn de consemnat. Încercați să demonstrați sau să infirmați conjecturile la care v-au condus observațiile.

Alegeți-vă singur fracțiile pe care vreți să le examinați, sau analizați fracțiile zecimale prin care sînt reprezentate numerele propuse la punctele (1) — (7).

(1) $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}$

(2) $\frac{1}{7}, \frac{10}{7}, \frac{100}{7}, \ldots$

(3) Toate fracţiile subunitare al căror numitor este relativ prim cu numărătorul şi este mai mic decît 14.

(4) Toate fracţiile subunitare cu numitorul 27, al căror numărător este relativ prim cu 27.

(5) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{37}$, $\frac{1}{41}$, $\frac{1}{73}$, $\frac{1}{101}$, $\frac{1}{239}$

(6) $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, $\frac{1}{9999}$

(7) $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{101}$, $\frac{1}{1001}$, $\frac{1}{10001}$

În orice caz, examinaţi atent şi străduiţi-vă să înţelegeţi foarte bine că

$$7{,}00000\ldots = 6{,}99999\ldots.$$
$$0{,}50000\ldots = 0{,}49999\ldots.$$

15.45. (Continuare) Observaţi că

$$\frac{1}{9} = 0{,}111111\ldots \qquad \frac{1}{11} = 0{,}090909\ldots$$

$$\frac{1}{27} = 0{,}037037\ldots \qquad \frac{1}{37} = 0{,}027027\ldots$$

$$\frac{1}{99} = 0{,}01010101\ldots \qquad \frac{1}{101} = 0{,}00990099\ldots$$

$$\frac{1}{271} = 0{,}0036900369\ldots \qquad \frac{1}{369} = 0{,}0027100271\ldots$$

şi EXPLICAŢI.

15.46. (Continuare) Pornind de la reprezentarea zecimală şi trecînd de la baza 10 la baza 2, ajungem la reprezentarea binară. Iată un exemplu:

$$\frac{1}{3} = 0{,}01010101\ldots$$

dacă interpretăm partea dreaptă în sistemului binar, adică *dacă* interpretăm relaţia de mai sus în sensul

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \ldots$$

Examinaţi reprezentări binare în modul în care aţi examinat reprezentările zecimale în ex 15.44 şi 15.45.

15.47. (Continuare) Evaluați meritele educative ale proiectului de investigație schițat în ex. 15.44, 15.45 și 15.46.

15.48. *Numere trapezoidale.* Fig. 15.10 (a) reprezintă numărul triunghiular

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

(cf. ex. 3.38 și fig. 3.8). În mod analog, am putea spune că numărul

$$3 + 4 + 5 = 12$$

reprezentat pe fig. 15.10 (b) este un număr „trapezoidal". Dacă în definiție includem și cazurile extreme (ceea ce deseori se dovedește judicios), trebuie să considerăm drept „trapezoidale" și numerele reprezentate de (a) și (c) în fig. 15.10. Dar atunci orice întreg pozitiv ar fi „trepezoidal" [fiindcă orice număr natural poate fi reprezentat printr-un șir de puncte ca cel din fig. 15.10 (c)] și definiția ar fi fără obiect. Sîntem conduși, în felul acesta, la definiția de mai jos.

Fie $t(n)$ — numărul de *reprezentări trapezoidale* ale întregului pozitiv n, adică numărul de reprezentări ale lui n ca sumă de întregi pozitivi consecutivi. Iată cîteva exemple:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

Dacă $n = 1, 2, 3, 6, 15, 81, 105,$

atunci $t(n) = 1, 1, 2, 2, 4, 5, 8.$

Găsiți o „expresie simplă" pentru $t(n)$ prin observații judicioase urmate, dacă este posibil, de o demonstrație.

15.49. (Continuare) Fig. 15.11 ne oferă o prezentare grafică de ansamblu a datelor de observație. Să numim o expresie a lui n de forma

$$n = a + (a + 1) + (a + 2) + \ldots + (a + r - 1)$$

(adică de forma unei sume de r termeni) o reprezentare trapezoidală a lui n *cu r rînduri*. Dacă (și numai dacă) n admite o reprezentare trapezoidală cu r rînduri, atunci punctul (geometric) de abscisă n și ordonată r este marcat pe fig. 15.11; printr-un punct „gras".

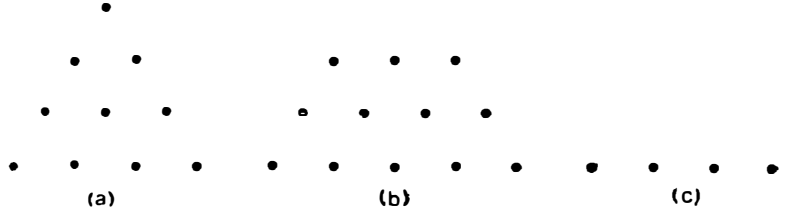


Fig. 15.10. Numere triunghiulare și trapezoidale

Dacă $t(n) = 1$, atunci singura reprezentare trapezoidală posibilă a lui n trebuie să fie reprezentarea banală cu $r = 1$. Enumerați numerele n din fig. 15.11 pentru care $t(n) = 1$.

Care este expresia lui $t(p)$ dacă p este număr prim ?

15.50. (Continuare) Fie $s(n)$ — numărul de reprezentări ale întregului pozitiv n ca sumă de întregi pozitivi *impari consecutivi*. Găsiți o expresie pentru $s(n)$.

Exemple

$$15 = 3 + 5 + 7$$

$$45 = 13 + 15 + 17 = 5 + 7 + 9 + 11 + 13$$

$$48 = 23 + 25 = 9 + 11 + 13 + 15 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$$

Dacă $n = 2, 3, 4, 15, 45, 48, 105,$

atunci $s(n) = 0, 1, 1, 2, 3, 3, 4.$

15.51. Discutați critic proiectul de investigație schițat în ex. 15.48 și 15.49.

15.52. Considerați următoarele trei figuri plane :

(1) un pătrat cu o diagonală verticală,

(2) cercul (de rază a) circumscris pătratului,

(3) pătratul circumscris cercului, care are o latură verticală.

Diagonala verticală din (1) împarte fiecare figură în două jumătăți simetrice. Prin rotirea în jurul axei lor comune verticale de simetrie, cele trei figuri plane descriu trei solide de rotație.

(1) un con dublu

(2) o sferă

(3) un cilindru.

Calculați, în toate cele trei cazuri,

V — volumul solidului,

S — aria suprafeței solidului,

A — aria figurii plane,

L — perimetrul figurii plane,

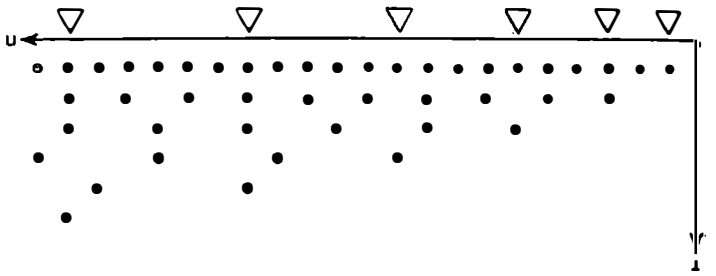


Fig. 15.11. Reprezentare trapezoidală a lui n cu r rînduri

X_A — distanța de la centrul de greutate al semiariei figurii plane pînă la axa de revoluție,

X_L — distanța de la centrul de greutate al semiperimetrului figurii plane pînă la axa de revoluție.

Grupați cele 18 cantități într-un tabel 3×6, EXAMINAȚI-L, și încercați să explicați cele observate.

15.53. Observînd că

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} - 1 &= \sqrt{2} - \sqrt{1} \\
(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} &= \sqrt{9} - \sqrt{8} \\
(\sqrt{2} - 1)^3 = 5\sqrt{2} - 7 &= \sqrt{50} - \sqrt{49} \\
(\sqrt{2} - 1)^4 = 17 - 12\sqrt{2} &= \sqrt{289} - \sqrt{288}
\end{aligned}$$

încercați să generalizați și demonstrați conjectura pe care ați enunțat-o.

15.54. De foarte multe ori nu-i prea important *în ce anume* constă conjectura, dar este totdeauna extrem de important în ce *fel* vă verificați conjectura.

15.55. *Fapt și conjectură.* În anecdota care urmează (și căreia nu-i pot garanta autenticitatea) este vorba de sir John și de un portar. Sir John este membru al lui Royal Society, așa că avem toate motivele să credem că știe (totdeauna) să facă distincție netă între

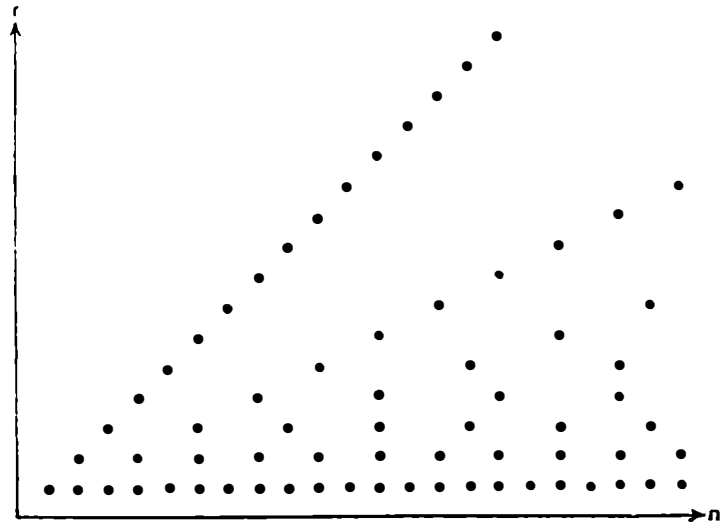


Fig. 15.12. Pentru cititorul cu spirit de observație, o diagramă de Leibniz: n este divizibil cu r

fapt şi conjectură; dar şi portarul — care este doar slujbaş în clădirea lui Royal Society — a făcut, în mod neaşteptat, o astfel de distincţie, într-o anumită ocazie.

Într-o zi, Sir John soseşte cu întîrziere la o şedinţă a lui Royal Society şi este vizibil grăbit. El trebuie însă să-şi lase pălăria la vestiar şi să primească în schimb un număr. Portarul care era de serviciu în ziua aceea la vestiar îi spuse foarte serviabil: „Vă rog, sir, puteţi să nu aşteptaţi numărul, fiindcă şi fără el vă voi restitui pălăria." Sir John se duse la şedinţă fără să-şi ia numărul, plăcut impresionat dar şi oarecum neliniştit de soarta pălăriei. Însă cînd, după şedinţă, s-a dus din nou la vestiar, portarul i-a restituit pălăria fără nici o ezitare. Sir John era vizibil satisfăcut, dar ceva — nu ştiu ce — l-a făcut să-l întrebe totuşi pe portar: „De unde ştii că aceasta este pălăria mea?" Dar şi portarului nu ştiu ce i-a venit — a găsit, poate, că sir John i-a vorbit pe un ton prea protector — în orice caz, fapt este că i-a răspuns destul de tăios: „Sir, nu ştiu dacă această pălărie este sau nu a dv.; dar este cea pe care mi-aţi dat-o".

ANEXE

Anexa I*

INDICAŢII ŞI RECOMANDĂRI PENTRU PROFESORI ŞI PENTRU PROFESORII PROFESORILOR

Profesorii care-şi propun să folosească această carte în activitatea lor didactică nu trebuie să neglijeze — desigur — nici recomandările adresate tuturor cititorilor, dar este bine ca ei să dea atenţie şi observaţiilor de mai jos.

1. Aşa cum s-a arătat în Prefaţă, cartea aceasta a fost scrisă cu intenţia de a da posibilitate şi prilej viitorilor profesori de matematică pentru şcoala medie (precum şi profesorilor deja în funcţie) să desfăşoare o oarecare *activitate de creaţie la un nivel adecvat.* După părerea mea, este foarte de dorit să se creeze profesorilor o astfel de posibilitate, fiindcă de la un profesor care n-are nici un fel de experienţă personală, într-o formă sau alta, de activitate de creaţie, este greu de aşteptat că va fi în stare să inspire, să conducă, să sprijine, sau măcar să-şi dea seama de activitatea creatoare a elevilor săi.

Nu ne putem aştepta de la un profesor „mijlociu" să abordeze teme de cercetare foarte avansate. Rezolvarea unei probleme de matematică este însă o muncă realmente de creaţie — dacă problema se ridică deasupra tiparelor problemelor de rutină. Problemele pro-

* În ediţia engleză, *Descoperirea în matematică* a apărut în două volume, iar Anexa I este tipărită după primele şase capitole, care formează volumul I al lucrării — ceea ce explică multe particularităţi de redactare ale acestor Indicaţii şi recomandări. — *N.T.*

puse în această carte (cele care nu sînt marcate cu semnul †) nu cer cunoştinţe mult peste nivelul şcolii medii, dar ele cer un anumit grad — iar uneori chiar un grad destul de înalt — de concentrare şi de judecată independentă. Rezolvarea unor probleme de acest tip este, după părerea mea, tipul de „muncă de creaţie" care ar trebui introdus în programul de pregătire a profesorilor de matematică pentru şcoala medie. Într-adevăr, rezolvînd probleme de acest tip, viitorul profesor are prilejul să dobîndească o *cunoaştere profundă a matematicii de şcoală medie* — o cunoaştere reală, gata de a fi folosită în practică, dobîndită nu prin simplă memorizare, ci prin aplicarea celor învăţate la probleme interesante. Apoi, şi faptul acesta este chiar mai important, el poate dobîndi un oarecare *know-how*, o oarecare îndemînare în mînuirea matematicii de şcoală medie, o oarecare pătrundere în esenţa meşteşugului de a rezolva probleme. Toate acestea îi vor permite să călăuzească şi să judece, mai eficient activitatea elevilor săi.

2. În prima parte a lucrării (cap. 1—6), metodele de predare nu sînt expuse nemijlocit, ci doar sugerate implicit; ele vor fi discutate explicit într-un capitol din partea a doua.

Această primă parte conţine totuşi multe probleme care ar putea fi folosite la lecţiile pentru anumite clase ale şcolii medii (în special, la clasele mai „mari"). Propun profesorilor, ca un exerciţiu util, *să reflecteze la o eventuală folosire la lecţii* a problemelor pe care le rezolvă.

Momentul cel mai potrivit pentru asemenea reflecţii este, probabil, imediat după ce s-a obţinut şi s-a asimilat temeinic soluţia unei probleme. Atunci cred că este cel mai bine să *examinaţi retrospectiv* problemea rezolvată şi să vă întrebaţi: „Unde aş putea folosi această problemă? Ce alte probleme ar trebui tratate în prealabil, pentru a pregăti clasa pentru problema aceasta? Cum aş putea prezenta această problemă? Cum aş putea-o prezenta la cutare clasă (precizaţi care anume clasă) — sau, cum i-aş putea-o prezenta elevului Petrişor Petrescu?" Toate aceste întrebări sînt întrebări bune, utile, şi pe lîngă ele există multe alte întrebări bune şi utile — dar întrebarea cea mai bună rămîne totuşi cea care-ţi vine spontan în minte.

3. Deşi nu constituie un curs complet, primele şase capitole conţin totuşi suficient material pentru a fi folosit ca un fel de manual pentru un *seminar de rezolvat probleme.* Eu am condus asemenea seminare în diferite institute pentru pregătirea sau pentru perfecţionarea cadrelor didactice; mai mulţi colegi s-au arătat interesaţi de ideea unor astfel de seminare şi mi-au solicitat materiale adecvate; cunosc cîteva colegii în care, nu de mult, au fost organizate efectiv asemenea seminarii sau au fost introduse ore de învăţămînt cu con-

ţinut similar. Şi tocmai ţinînd seama de această situaţie m-am decis să public acest prim volum[1], înainte de a fi gata şi cel de-al doilea, în ciuda riscurilor evidente pe care le prezintă asemenea publicare incompletă.

4. După o serie de încercări, am elaborat în detaliu un plan de desfăşurare a activităţii în seminarul condus de mine, şi cred că este util să prezint aici o descriere edificatoare[2].

Un număr de probleme tipice, de natură să pună în evidenţă o schemă utilă, sînt rezolvarea în clasă sub formă de discuţie cu auditorii condusă de profesor; textul primelor patru capitole reconstituie (destul de fidel — în măsura în care lucrul acesta este posibil în scris) cîteva asemenea discuţii. După aceea discuţia este orientată şi canalizată spre identificarea şi formularea explicită a schemei generale implicate în rezolvare — în textul capitolelor citate este arătat cum se face şi lucrul acesta.

Temele „pentru acasă" constau din probleme (de felul celor tipărite aici la sfîrşitul fiecărui capitol) care dau prilej cursanţilor să aplice, să dezvolte şi să-şi clarifice schema obţinută (precum şi observaţiile metodologice făcute) în clasă.

5. Am folosit seminarul meu (şi aceasta este una din caracteristicile lui esenţiale) pentru a crea participanţilor o oarecare obişnuinţă (practică) în explicarea problemelor şi îndrumarea elevilor în cursul elaborării rezolvării problemelor, în fapt — pentru a da participanţilor un oarecare prilej de *practică pedagogică*, activitate nu îndeajuns de prezentă în majoritatea programelor (obişnuite) de învăţămînt.

Cînd studenţii aduc temele pe care le-au avut de rezolvat acasă, se alege o chestiune (o rezolvare mai originală, o problemă mai nevralgică) şi ea este prezentată în clasă, la tablă, de către unul din participanţii care au rezolvat chestiunea aceea deosebit de bine sau deosebit de prost. Mai tîrziu, cînd cursanţii s-au mai familiarizat cu stilul de lucru, un participant preia pentru un timp rolul profesorului la conducerea discuţiei în clasă. Dar practica cea mai eficientă este cea prilejuită de *lucrul în grup*. Acesta se realizează în trei etape.

Într-o primă etapă, la începutul unei sesiuni de practică, fiecare participant primeşte cîte o problemă distinctă (dar numai una singură) pe care are sarcina s-o rezolve în cursul sesiunii respective; el are datoria să nu se consulte cu colegii, dar poate primi unele îndrumări din partea profesorului.

---

[1] Vezi nota de la p. 375.

[2] Unele din propoziţiile care urmează sînt împrumutate — aşa cum au fost şi unele dintre cele precedente — dintr-un articol publicat în „The Journal of Education, Vancouver and Victoria" (vezi Bibliografia).

Apoi, între o sesiune şi cea următoare, fiecare participant trebuie să-şi verifice, să-şi completeze, să-şi revadă şi, dacă este posibil, să simplifice rezolvarea elaborată iniţial, să caute şi alte căi de a ajunge la rezultat, urmărind ca, prin aceste procedee sau prin altele, să ajungă să-şi cunoască şi să-şi stăpînească problema cît mai complet. El trebuie, de asemenea, să-şi întocmească un anumit plan de prezentare a problemei ca atare şi a rezolvării ei în faţa clasei. I se dă posibilitatea să-şi consulte profesorul asupra oricăruia din punctele de mai sus.

În fine, în următoarea sesiune de practică, participanţii se asociază în *grupuri de discuţie:* fiecare grup constă din patru membri (numărul poate fi şi impar); grupurile acestea se formează cu asentimentul mutual al participanţilor, fără intervenţia profesorului. Unul din membrii grupului îşi asumă rolul de profesor, ceilalţi fiind „elevii". „Profesorul" îşi prezintă problema în faţa „elevilor", se străduieşte să le stimuleze iniţiativa şi caută să-i călăuzească în căutarea soluţiei, exact în stilul în care procedează profesorul în timpul discuţiilor din clasă. După ce s-a obţinut soluţia, urmează o scurtă critică prietenească a prezentării. Apoi un alt membru al grupului îşi asumă rolul de profesor şi îşi prezintă problema, şi procedeul este repetat pînă ce vine rîndul tuturor membrilor grupului. După aceea, participanţii se regrupează parţial (eventual, două grupuri îşi trimit unul altuia pe unul din membrii săi în calitate de „profesor" la celălalt grup), aşa că fiecare cursant are posibilitatea să-şi cizeleze expunerea, fiindcă are prilejul să-şi prezinte problema de mai multe ori. Unele probleme deosebit de interesante, sau unele prezentări deosebit de reuşite, sînt expuse, şi după aceea discutate, în prezenţa întregii clase. Asocieri pe bază de simpatie reciprocă se pot forma şi spontan, în vederea discutării unor probleme care sînt noi pentru toţi participanţii; asemenea iniţiative trebuie, desigur, încurajate.

Sistemul acesta de rezolvare a problemelor în grupuri de discuţie devenea rapid foarte popular printre participanţii la seminariile mele, şi am rămas cu impresia că înseşi seminariile în ansamblu au însemnat un succes. Mulţi dintre participanţi erau ei înşişi profesori cu experienţă şi cel puţin unii dintre ei au simţit efectiv că participarea la seminar le-a sugerat idei utile în legătură cu modul cum şi-ar putea conduce mai bine propriile lor lecţii.

6. Volumul de faţă poate fi de folos profesorilor de colegiu care conduc un Seminar de rezolvat probleme — mai ales cînd o fac pentru prima dată. Eventual, ei pot urma întocmai procedeul descris mai sus (paragrafele 4 şi 5). În ceea ce priveşte discuţiile în clasă, ei pot folosi textul unuia sau al altuia dintre primele patru capitole. Problemele tipărite la sfîrşitul capitolului sînt potrivite pentru a

fi propuse ca teme pentru acasă: într-adevăr, pentru a elabora o prezentare completă a rezolvării, pornind de la schiţa de rezolvare dată la sfîrşitul cărţii, s-ar putea să fie nevoie de un efort considerabil din partea rezolvatorului. (Atenţie: profesorul nu poate însă alege problema la întîmplare; înainte de a o propune ca temă pentru acasă, este bine ca el să analizeze atent atît problema ca atare şi rezolvarea ei, cît şi problemele vecine.) S-ar putea ca, la examen şi pentru lucrările de sfîrşit de an, profesorul să dorească să evite totuşi problemele tipărite aici; el poate consulta atunci diferite manuale adecvate (precum şi ex. 1.50, 2.78 şi 3.92). Problemele care urmează să fie dezbătute în grupurile de discuţie (vezi 5) trebuie să fie ceva mai dificile, dar nu-i nevoie să fie strîns legate de capitolele tratate; probleme potrivite ca asemenea teme pot fi selectate, eventual, din această primă parte a cărţii, precum şi din capitolele următoare.

Pot fi discutate, sau recomandate pentru lectură, şi capitolele 5 şi 6, însă rolul lor va deveni mai clar după ce va fi expus mai pe larg în volumul al doilea.

Bineînţeles, după ce a acumulat oarecare experienţă, profesorul conducător de seminar poate adopta spiritul acestei lucrări şi *fără* s-o urmărească foarte îndeaproape în toate detaliile.

Rezolvări şi soluţii

CAPITOLUL 1

1.1. Cercul cu punctul dat — ca centru, şi cu distanţa dată — ca rază.

1.2. Două drepte paralele cu dreapta dată.

1.3. O dreaptă ; mediatoarea segmentului ale cărui extremităţi sînt date.

1.4. O dreaptă paralelă cu dreptele date şi echidistantă faţă de ele, aşadar, care bisectează distanţa dintre paralelele date.

1.5. Două drepte perpendiculare una pe alta, şi anume bisectoarele unghiurilor formate de dreptele date.

1.6. Două arce de cerc simetrice în raport cu segmentul AB ; ele au aceleaşi extremităţi : punctele A şi B.

1.8. Două locuri geometrice, ex. 1.1.

1.9. Două locuri geometrice, ex. 1.1, 1.2.

1.10. Două locuri geometrice, ex. 1.2, 1.6.

1.11. Două locuri geometrice, ex. 1.1, 1.6.

1.12. Două locuri geometrice, ex. 1.5.

1.13. Două locuri geometrice, ex. 1.2.

1.14. Două locuri geometrice, ex. 1.1, 1.2.

1.15. Două locuri geometrice, ex. 1.6.

1.16. Prin considerente de simetrie, se reduce la 1.3(2) sau la ex. 1.2.

1.17. Două locuri geometrice, ex. 1.6.

1.18. (*a*) Dacă X variază în aşa fel încît ariile celor două triunghiuri, $\triangle XCA$ şi $\triangle XCB$, rămîn egale, locul geometric al lui X este mediana care trece prin C. (Demonstraţi!). Punctul cerut este intersecţia medianelor. (*b*) Dacă X variază în aşa fel încît aria $\triangle ABX$ rămîne egală cu o treime din aria triunghiului dat, $\triangle ABC$, locul geometric al lui X este o paralelă la latura AB, la o distanţă egală cu o treime din înălţimea coborîtă din C (vezi ex. 1.2). Punctul cerut este intersecţia unor astfel de paralele la laturi. Ambele rezolvări folosesc „două locuri geometrice".

1.19. Uniţi centrul cercului înscris cu extremităţile laturii a; în triunghiul astfel obţinut, unghiul la centrul cercului înscris este

$$180° - \frac{\beta + \gamma}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Două locuri geometrice (ex. 1.2, 1.6).

1.20. Figură auxiliară: triunghiul dreptunghic cu ipotenuza a şi cateta h_b.

1.21. Figură auxiliară (vezi ex. 1.20).

1.22. Figuri auxiliare (vezi ex. 1.20).

1.23. Figură auxiliară: triunghiul dreptunghic cu cateta h_a şi unghiul opus β.

1.24. Figuri auxiliare (vezi ex. 1.23). Altă rezolvare (vezi ex. 1.34).

1.25. Figură auxiliară: triunghiul dreptunghic cu ipotenuză d_a şi înălţimea h_a.

1.26. Figură auxiliară: triunghiul determinat de cele trei laturi.

1.27. Fie că a este mai mare decît c. Figură auxiliară: triunghiul determinat de laturile $a - c$, b, d [vezi *CRP*, „Modificări ale problemei" (5), pp. 132—133].

1.28. Generalizare a ex. 1.27 care corespunde cazului $\varepsilon = 0$. Figură auxiliară: triunghiul determinat de a, c, ε (vezi *MRP*, vol. II, pp. 168—170).

1.29. Figură auxiliară: triunghiul determinat de a, $b + c$, $\frac{\alpha}{2}$.

1.30. Figură auxiliară: triunghiul determinat de a, $b + c$, $90° + (\beta - \gamma)/2$.

1.31. Figură auxiliară: triunghiul determinat de $a + b + c$, h_a, $\frac{\alpha}{2} + 90°$. [Vezi *CRP*, „Elemente auxiliare" (3), pp. 92—94, şi „Simetria", pp. 206—207].

1.32. O modificare convenabilă a modului de abordare a problemei prezentat în 1.6(1) : să micşorăm una din raze cu exact aceeaşi viteză cu care o mărim pe cealaltă. Figură auxiliară: tangentele la un cerc duse dintr-un punct exterior dat, apoi — construirea a două dreptunghiuri.

1.33. Cf.1.6(1). Figură auxiliară : cercul circumscris triunghiului ale cărui vîrfuri sînt centrele celor trei cercuri date.

1.34. Triunghiul asemenea determinat de α, β; dimensiunile cerute se obţin apoi folosind lungimea dată d_γ . În esenţă, aceeaşi rezolvare ca la ex. 1.24.

1.35. Figuri asemenea : centrul de similitudine este vîrful unghiului drept al triunghiului dat. Bisectoarea acestui unghi drept intersectează ipotenuza în vîrful pătratului cerut.

1.36. Generalizare a ex. 1.35. Centrul de similitudine este A (sau B). [Cf. *CRP*, 18, pp. 35—37.]

1.37. Figuri asemenea : centrul de similitudine este centrul cercului. Pătratul cerut este simetric în raport cu axa de simetrie a sectorului de cerc dat.

1.38. Figură asemenea : orice cerc tangent la dreapta dată şi al cărui centru se află pe mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte. Punctul de intersecţie al acestei mediatoare cu dreapta dată este centrul de similitudine. Două soluţii.

1.39. Simetria în raport cu bisectoarea unuia din unghiurile (convenabil ales) dintre tangentele date dă încă un punct prin care trebuie să treacă cercul, aşa că problema se reduce la cazul din ex. 1.38.

1.40. Razele cercului înscris care trec prin punctele de tangenţă formează între ele unghiurile $180° - \alpha$, $180° - \beta$, ... ; aşadar, se obţine imediat o figură asemenea celei căutate.

Procedeul este aplicabil la poligoanele circumscriptibile cu orice număr de laturi.

1.41. Fie A — aria triunghiului căutat, şi a, b , c — laturile lui (ex. 1.7) ; evident sînt satisfăcute egalităţile :

$$2A = ah_a = bh_b = ch_c.$$

Construiţi triunghiul cu laturile date, egale cu h_a, h_b, h_c, şi fie A' — aria lui iar a', b', c' înălţimile corespunzătoare laturilor, aşa că au loc egalităţile :

$$2A' = h_a a' = h_b b' = h_c c'.$$

Prin urmare,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

aşa că triunghiul cu laturile a', b', c', care se pot obţine uşor, este *asemenea* cu triunghiul cerut.

1.42. Rezolvarea precedentă a ex. 1.41 este imperfectă: dacă $h_a = 156$, $h_b = 65$, $h_c = 60$, triunghiul cerut există, dar triunghiul auxiliar cu laturile date h_a, h_b, h_c nu există.

Unul din „remediile" posibile constă într-o *generalizare*: fie k, l, m trei numere întregi, pozitive, oarecare, și fie (atenție: notația nu este aceeași ca în ex. 1.41) a', b', c' înălțimile triunghiului cu laturile kh_a, lh_b, mh_c; atunci

$$\frac{a}{ka'} = \frac{b}{lb'} = \frac{c}{mc'}.$$

De exemplu, triunghiul cu laturile 156, 65 și 120 $= 2 \times 60$ există.

1.43. Din centrul cercului circumscris duceți o dreaptă care trece prin una din extremitățile laturii a, și perpendiculara pe această latură. Obțineți în felul acesta un triunghi dreptunghic cu ipotenuza R, o catetă egală cu $a/2$ și cu unghiul opus acestei catete egal cu α. Aceasta dă o *relație* între a, α și R: cunoscînd două din aceste mărimi, o puteți construi univoc pe a treia. (Relația aceasta poate fi exprimată și de ecuația trigonometrică $a = 2R \sin \alpha$.) Dacă datele problemei propuse nu satisfac această relație, problema este imposibilă; dacă ele satisfac relația, problema este nedeterminată.

1.44. (*a*) Triunghiul determinat de α, β, γ: problema este fie imposibilă, fie nedeterminată. (*b*) Situația generală subiacentă ex. 1.43 și (*a*): existența soluției implică o relație între date și, prin urmare, soluția fie este nedeterminată, fie nu există, după cum datele satisfac sau nu satisfac acea relație. (*c*) Folosind rezolvarea (din ex. 1.43, se reduce la cazul: să se construiască triunghiul determinat de a, β, α. (*d*) Folosind rezolvarea din ex. 1.43, se reduce la ex. 1.19.

1.45. Neglijăm perturbațiile care influențează viteza sunetului dar pe care nu le putem controla (cum ar fi vîntul și variațiile de temperatură). Atunci, din diferența de timp dintre momentul în care a fost auzit zgomotul în posturile de reperare acustică A și B, obținem diferența dintre două distanțe, și anume $AX - BX$, ceea ce dă un loc geometric pentru X: o hiperbolă. Comparînd pe C cu A (sau cu B) obținem o altă hiperbolă, iar intersecția celor două hiperbole dă punctul X. Principala analogie cu ex. 1.15: observațiile dau două locuri geometrice. Principala deosebire: acolo, locurile geometrice sînt arce de cerc, aici — hiperbole. Nu putem construi o hiperbolă cu rigla și cu compasul, dar o putem construi cu alte instrumente și se poate construi un aparat cu care să se prelucreze comod datele de observație furnizate de cele trei posturi de reperare acustică.

1.46. Aceste locuri geometrice nu sînt utilizabile dacă urmăm strict descrierea schemei dată la sfîrșitul paragrafului 1.2. În fapt însă, aceste locuri geometrice sînt utile și ele au și fost folosite, în repetate rînduri, în exemplele precedente, așa că cea care trebuie extinsă este tocmai acea descriere: ar trebui să acceptăm în calitate de „loc geometric" orice reuniune a unui număr finit de drepte, sau de cercuri, sau de segmente de drepte, sau de arce de cerc.

1.48. Dacă părțile în care este împărțită condiția, luate în ansamblu, sînt echivalente cu condiția, atunci și diferitele moduri de împărțire trebuie să fie echivalente între ele. De

aici — o teoremă referitoare la triunghi: mediatoarele laturilor (ele sînt în număr de trei) trec printr-un acelaşi punct ; şi o alta referitoare la tetraedru : planele perpendiculare pe muchii în punctele mediane ale acestora (ele sînt în număr de şase) trec printr-un acelaşi punct.

1.50. (1) Luaţi drept date oricare trei mărimi distincte dintre părţile constituente ale unui triunghi enumerate în ex. 1.7 — evitînd însă anumite cazuri care constituie excepţii (vezi ex. 1.43 şi 1.44) şi propuneţi-vă să construiţi triunghiul respectiv. Iată cîteva combinaţii pentru care construcţia nu este de loc dificilă :

$$a, \quad h_b, \quad R$$
$$a, \quad h_b, \quad m_b$$
$$a, \quad h_b, \quad m_a$$
$$h_a, \quad d_\alpha, \quad b$$
$$h_a, \quad m_a, \quad m_b$$
$$h_a, \quad m_b, \quad m_c$$
$$h_a, \quad h_b, \quad m_a$$
$$a, \quad b, \quad R$$

De asemenea, luaţi α, β şi oricare dintre lungimile nemenţionate în ex. 1.24 sau ex. 1.34. Construcţia este ceva mai dificilă dacă alegeţi drept date

$$\alpha, \quad r, \quad R.$$

(2) Există mai multe probleme referitoare la unghiurile diedre, asemănătoare celei discutate în 1.6 (3), care sînt importante şi care pot fi rezolvate fără a recurge explicit la geometria descriptivă ; iată una : „Fiind date a — unul din unghiurile feţei şi β şi γ — unghiurile diedre adiacente ale unui unghi triedru, să se construiască b şi c — celelalte două unghiuri ale feţelor". Rezolvarea nu este dificilă, dar ar ocupa prea mult spaţiu dacă am expune-o aici.

(3) Ex. 1.47 este analogul în spaţiu al paragrafului 1.3(1). Discutaţi analogele în spaţiu ale paragrafelor 1.3(2), 1.3(3), ex. 1.18, ex. 1.14.

Nu implică rezolvări : 1.7, 1.47, 1.49, 1.51.

CAPITOLUL 2

2.1. Dacă Ionel are x monede de 5 bani şi y monede de 10 bani, putem transpune condiţia în sistemul de două ecuaţii

$$5x + 10y = 350$$
$$x + y = 50$$

care, după o simplificare evidentă, coincide cu sistemul din 2.2(3).

2.2. Fie m conducte de umplere şi n conducte de golire a rezervorului. Prima conductă poate umple rezervorul în a_1 minute, conducta a doua în a_2 minute, ... conducta numărul m în a_m minute. Dintre conductele de celălalt tip, prima poate goli rezervoru

în b_1 minute, a doua în b_2 minute, ... conducta numărul n în b_n minute. Dacă toate conductele sînt deschise, în cît timp se va umple rezervorul inițial gol?

Durata cerută, t, satisface ecuația

$$\frac{t}{a_1} + \frac{t}{a_2} + \ldots + \frac{t}{a_m} - \frac{t}{b_1} - \frac{t}{b_2} - \ldots - \frac{t}{b_n} = 1$$

(Dacă valoarea lui t care satisface ecuația se dovedește a fi negativă, cum interpretați această soluție? S-ar putea să nu existe nici o soluție — nici o valoare t care să satisfacă ecuația. Cum interpretați acest caz?)

2.3. (*a*) Dl. Vokach (numele acesta înseamnă „Ionescu" în limba poldaviană!) își cheltuiește o treime din venituri pe hrană, o pătrime pentru locuință, o șesime pentru îmbrăcăminte și nu mai are alte cheltuieli (în fericita Poldavie nu există impozite pe venit...). El se întreabă cît timp ar putea trăi cu venitul pe an.

(*b*) Ce tensiune ar trebui menținută între două puncte conectate între ele prin trei rezistoare în paralel, cu rezistențele de 3, 4 și 5 (ohmi) respectiv, pentru ca intensitatea totală a curentului să aibă valoarea 1 (amper)?

Și așa mai departe.

2.4. (*a*) Formula pentru x nu se schimbă dacă înlocuim pe w cu $(-w)$: plecînd în misiune în direcția vîntului și revenind la bază împotriva lui, avionul atinge un același punct extrem, pentru o durată totală de zbor dată.

(*b*) Verificare cu ajutorul dimensiunii (vezi *CRP*, pp. 209—211).

2.5. Sistemul

$$\begin{aligned} x + y &= v \\ ax + by &= cv \end{aligned}$$

este identic cu cel obținut în 2.6(2).

2.6. Alegeți sistemul de coordonate în aceeași poziție relativă față de segmentul AB ca în 2.5(1), și notați $AB = a$. Centrul căutat (x, y) al cercului tangent la cele patru arce date satisface două ecuații

$$a - \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + y^2} - \frac{a}{4}$$

$$x = \frac{a}{2}$$

din care rezultă

$$y = a\sqrt{6}/5.$$

2.7. Formula lui Heron pare destul de înfricoşătoare — este lungă şi complicată — dar, în realitate, este foarte uşor de minuit dacă puneţi în evidenţă, de suficient de multe ori, produse de forma „sumă ori diferenţă" :

$$\begin{aligned} 16D^2 &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\ &= [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] \\ &= (2bc - a^2 + b^2 + c^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2) \\ &= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= 4(p^2 + q^2)(p^2 + r^2) - (2p^2)^2. \end{aligned}$$

2.8. (*a*) *Cunoştinţe relevante.* Calea de rezolvare (3) presupune cunoştinţe de geometrie plană mai ample (formula lui Heron este mai puţin familiară decît formula ariei în funcţie de bază şi de înălţime). În schimb, calea de rezolvare (4) necesită cunoştinţe de geometrie în spaţiu mai ample (trebuie să sesizăm, şi apoi să demonstrăm, că k este perpendicular pe a).

(*b*) *Simetrie.* Cele trei date A, B şi C joacă roluri identice, problema este simetrică în A, B şi C. Calea de rezolvare (3) respectă această simetrie, în timp ce calea de rezolvare (4) o „strică", fiindcă dă preferinţă lui A.

(*c*) *Planul de rezolvare.* Planul de rezolvare (3) procedează mai „metodic" — mergînd pe această cale, simţim încă de la început că putem avea oarecare încredere în reuşita finală. Şi, într-adevăr, el ne conduce, cît se poate de clar, la acel sistem de şapte ecuaţii care, la prima vedere, ni s-a părut prea complicat. [„Vina" însă nu este a planului de rezolvare care, de fapt, ne sugerează un procedeu de rezolvare a sistemului; vezi 6.4(2).] Este mai puţin vizibil de la început că planul de rezolvare (4) va fi eficient, dar, pînă la urmă, el „se descurcă" — oarecum „pe dibuite" şi graţie unei remarci fericite — şi ajunge la rezultatul final prin calcule mult mai scurte.

2.9. $$V^2 = p^2q^2r^2/36 = 2AB/9.$$

2.10. Din cele trei ecuaţii din 2.5(3) care exprimă pe a^2, b^2 şi c^2 în funcţie de p, q şi r, obţinem

$$p^2 + q^2 + r^2 = S^2$$
$$p^2 = S^2 - a^2, \qquad q^2 = S^2 - b^2, \qquad r^2 = S^2 - c^2$$

aşa că ex. 2.9 ne dă

$$V^2 = (S^2 - a^2)(S^2 - b^2)(S^2 - c^2)/36$$

2.11. $d^2 = p^2 + q^2 + r^2$. Această problemă este tratată pe larg în *CRP*, Partea I, pp. 22—23, 24—26, 27—28, 29—32.

2.12. Notaţiile alese concordă atît cu cele din ex. 2.11, cît şi cu cele din 2.5(3) — atenţie la cele două diagonale ale unei aceleiaşi feţe. Repetînd calculul făcut în ex. 2.10, găsim

$$d^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/2.$$

2.13. Un tetraedru este determinat de lungimile celor şase muchii ale sale — aceasta rezultă din analogia în spaţiu a celei dintîi probleme studiate de noi în 1.1. Dar noi

obținem configurația de șase muchii cerută în problemă (și, prin aceasta, tetraedrul propus) alegînd în mod convenabil cîte o diagonală pe fiecare din fețele cutiei considerate în ex. 2.11 și 2.12. Volumul acestei cutii este pqr. Tăiați din cutie patru tetraedre identice care au fiecare cîte un vîrf trirectangular și volumul egal cu $pqr/6$ (vezi ex. 2.9); obțineți în felul acesta tetraedrul propus, al cărui volum este, prin urmare,

$$V = pqr - 4pqr/6 = pqr/3.$$

Dar (vezi ex. 2.10), $p^2 = S^2 - a^2$ și așa mai departe; prin urmare

$$V^2 = (S^2 - a^2)(S^2 - b^2)(S^2 - c^2)/9.$$

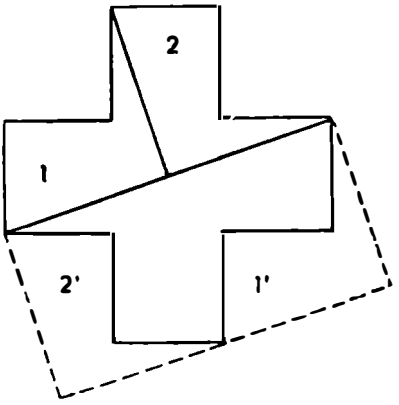


Fig. S2.15

2.14. Ex. 2.10: Dacă $V = 0$, unul din factori, de pildă, $S^2 - a^2 = p^2$, este nul, așa că două fețe degenerează în segmente de dreaptă; celelalte două fețe devin triunghiuri dreptunghice care coincid.

Ex. 2.13: Dacă $V = 0$, tetraedrul degenerează într-un dreptunghi dublu (două dreptunghiuri suprapuse); toate cele patru fețe devin triunghiuri dreptunghice identice; într-adevăr, $S^2 - a^2 = 0$ implică $a^2 = b^2 + c^2$.

2.15. Așa cum arată ultima ecuație din 2.7, latura x a dreptunghiului căutat este ipotenuza unui triunghi dreptunghic cu catetele $3a$ și a. Acest segment x poate fi înscris în cruce în patru moduri distincte (dar nu esențial diferite); punctul lui median trebuie să coincidă cu centrul crucii care, prin urmare, împarte segmentul în două părți, fiecare de lungime $x/2$, ca și cealaltă latură a dreptunghiului dorit. Toate acestea sugerează insistent soluția prezentată pe fig. S2.15.

2.16. (*a*) $x^2 = 12 \cdot 9 - 8 \cdot 1$, $x = 10$.

(*b*) Translație cu două unități spre stînga și cu o unitate în sus, fiindcă

$$10 = 12 - 2 = 9 - 1.$$

(*c*) Păstrarea simetriei centrale este mai probabilă.

Toate acestea sugerează fig. S2.16.

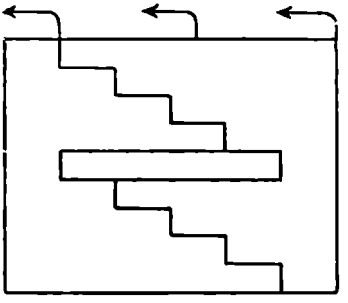


Fig. S2.16

2.17. Fie x și y poverile cărate de catîr și respectiv de măgar. Atunci

$$y + 1 = 2(x - 1),\ x + 1 = 3(y - 1);$$

$$x = 13/5,\ y = 11/5.$$

2.18. Domnul are h kg bagaje, doamna w kg, iar greutatea maximă scutită de taxe este x kg:

$$h + w = 94, \quad \frac{h - x}{30} = \frac{w - x}{40} = \frac{90 - x}{270}; \; x = 40.$$

2.19. 700, 500, $x = 400$, din

$$x + (x + 100) + (x + 300) = 1600.$$

2.20. Fiecare fiu primeşte 3000.

2.21. Dacă partea fiecărui copil exte x iar întreaga avere este y, părţile copiilor sînt

primul copil: $\quad x = 100 + \dfrac{y - 100}{10}$

al doilea: $\quad x = 200 + \dfrac{y - x - 200}{10}$

al treilea: $\quad x = 300 + \dfrac{y - 2x - 300}{10}$

şi aşa mai departe.

Diferenţa dintre oricare doi membri consecutivi din dreapta este

$$100 - \frac{x + 100}{10}.$$

Dacă această diferenţă este (aşa cum şi trebuie) egală cu 0, atunci $x = 900$ şi deci (din prima ecuaţie) $y = 8100$: au fost 9 copii.

2.22. Fie că cei trei jucători aveau iniţial sumele, respectiv, x, y şi z; va fi avantajos să introducem

$$x + y + z = s$$

($s = 72$). Trebuie să vedem ce sume aveau jucătorii în patru momente diferite; între fiecare două momente consecutive are loc o partidă; suma totală pe care o au împreună cei trei este mereu s:

Primul	Al doilea	Al treilea
x	y	z
$2x - s$	$2y$	$2z$
$4x - 2s$	$4y - s$	$4z$
$8x - 4s = 24$	$8y - 2s = 24$	$8z - s = 24.$

Prin urmare, $x = 39$, $y = 21$, $z = 12$.

2.23. Problema este analogă cu cele din 2.4(1) şi 2.4(2) şi este un caz particular al ex. 2.2 cu

$$m = 3,\ n = 0,\ a_1 = 3,\ a_2 = 8/3,\ a_3 = 12/5.$$

Prin urmare, $t = 8/9$ săptămîni.

2.24. Newton subînţelege o generalizare în sensul celei din ex. 2.2, dar nu merge chiar atît de departe : neexistînd „conducte de golire", înseamnă că nu există b-uri aşadar $n = 0$.

2.25. Grîul, orzul şi ovăzul costă, respectiv 5, 3 şi 2 şilingi buşelul (vezi ex. 2.26).

2.26. Fie

$$x, \qquad y, \qquad z,$$

preţurile celor trei mărfuri, şi fie p, preţul (total) al unui amestec care conţine, respectiv

$$a_\nu, \qquad b_\nu, \qquad c_\nu,$$

unităţi din cele trei mărfuri, $\nu = 1, 2, 3$. Obţinem astfel un sistem de trei ecuaţii

$$a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z = p,$$

$\nu = 1, 2, 3$. Pornind de la ex. 2.25, obţinem această generalizare trecînd de la tabloul de numere

40	24	20	312
26	30	50	320
24	120	100	680

la tabloul de litere

a_1	b_1	c_1	p_1
a_2	b_2	c_2	p_2
a_3	b_3	c_3	p_3

Nu este nici o dificultate să trecem de la 3 la n mărfuri diferite.

2.27. Fie

$l\alpha$ — cantitatea de iarbă pe acru, în momentul în care începe să fie folosită păşunea

β — cantitatea de iarbă mîncată de un bou în timp de o săptămînă,

c— γ antitatea de iarbă care creşte pe un acru în timp de o săptămînă,

a_1, a_2, a — numărul de boi,

m_1, m_2, m — numărul de acri,

t_1, t_2, t — numărul de săptămîni respectiv în cele trei cazuri considerate.

a, α, β şi γ sînt necunoscute, celelalte opt mărimi au valori numerice date.

Condiţiile sînt:

$$m_1(\alpha + t_1\gamma) = a_1t_1\beta$$
$$m_2(\alpha + t_2\gamma) = a_2t_2\beta$$
$$m(\alpha + t\gamma) = at\,\beta$$

adică un sistem de trei ecuaţii pentru trei necunoscute, α/β, γ/β şi a, care dă

$$a = \frac{m[m_1a_2t_2(t - t_1) - m_2a_1t_1(t - t_2)]}{m_1m_2t(t_2 - t_1)}$$

iar cu valorile numerice, $a = 36$.

2.28. Într-o progresie aritmetică cu cinci termeni $a,\ a + d,\ \ldots,\ a + 4d$ să se găsească primul termen şi raţia a, d ştiind că suma tuturor termenilor este egală cu 100

$$a + (a + d) + \ldots + (a + 4d) = 100$$

iar suma ultimilor trei este egală cu de 7 ori suma primilor doi termeni

$$(a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) = 7[a + (a + d)]$$

Din ecuaţiile

$$5a + 10d = 100,\ 11a - 2d = 0,$$

obţinem $a = 5/3$, $d = 55/6$, aşa că progresia este

$$10/6,\ 65/6,\ 120/6,\ 175/6,\ 230/6.$$

2.29.

$$\frac{m}{r} + m + mr = 19$$

$$\frac{m^2}{r^2} + m^2 + m^2r^2 = 113$$

Notăm

$$r + \frac{1}{r} = x$$

Sistemul devine

$$m(x + 1) = 19,\quad m^2(x^2 - 1) = 133.$$

Împărţind membru cu membru, se obţine un sistem de două ecuaţii liniare pentru mx şi m. De aici, $m = 6$, $x = 13/6$, $r = 3/2$ sau $2/3$; există două progresii (diferenţa dintre ele este însă banală): 4, 6, 9 şi 9, 6, 4.

2.30. $a(q^3 + q^{-3}) = 13$, $a(q + q^{-1}) = 4$.
Împărţind membru cu membru se obţine o ecuaţie pătratică în q^2. Progresia este

$$1/5,\ 4/5,\ 16/5,\ 64/5$$

ori — aceeaşi termeni luaţi în ordinea inversă.

2.31. Fie x — numărul de parteneri. Exprimați cîștigul asociației în două moduri distincte (cum este încasat și cum este distribuit):

$$(8240 + 40x \cdot x)\,\frac{x}{100} = 10x \cdot x + 224$$

Ecuația

$$x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0$$

nu are nici o rădăcină negativă (înlocuiți $x = -p$). Dacă există o rădăcină rațională, ea trebuie să fie un întreg pozitiv, și anume unul din divizorii lui 560. Aceasta vă conduce la a încerca succesiv valorile $x = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, \ldots$ În fapt rădăcinile sînt 7, 8 și 10. (Bineînțeles, Euler a scris mai întîi ecuația, și după aceea anecdota — ați putea încerca să-l imitați.)

2.32. Centrele celor patru cercuri neconcentrice cu pătratul dat sînt vîrfurile unui alt pătrat căruia îi exprimăm diagonala în două moduri distincte

$$(4r)^2 = 2(a - 2r)^2,$$

de unde obținem

$$r = \left(\sqrt{2} - 1\right)a/2.$$

2.33. Fie $x + (d/2)$ înălțimea triunghiului isoscel perpendiculară pe bază. Atunci

$$\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = s^2, \quad x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Eliminarea lui x dă

$$4s^4 - 4d^2s^2 + b^2d^2 = 0.$$

2.34. (*a*) În d^2 sau în b^2, ecuația este de gradul întîi, dar este de gradul al doilea în s^2; se poate considera, deci, în mod rezonabil, că problema determinării lui s este mai dificilă decît celelalte două.

(*b*) d are o valoare pozitivă dacă și numai dacă $4s^2 > b^2$.

b are o valoare pozitivă dacă și numai dacă $d^2 > s^2$.

s are două valori pozitive distincte dacă și numai dacă $d^2 > b^2$.

Cititorul poate învăța aici mai multe lucruri. Newton comentează soluția ex. 2.33 în felul următor: „Și deci însăși această analiză ne poruncește să nu facem nici o deosebire între cantitățile date și cele căutate. Căci dat fiind că același calcul se potrivește la oricare caz de mărimi date și [mărimi] căutate, este comod ca ele să fie concepute și comparate [între ele] fără [a face nici o] deosebire [între unele și altele]... sau, mai degrabă, este comod să vă imaginați că problema este propusă cu acele *data* și *quaesita*, adică cu acele cantități date și cantități căutate, cu care considerați că este cel mai ușor să scrieți ecuația". El adaugă, ceva mai departe: „Cred deci că vă va fi clar ce înțeleg geometrii cînd vă îndeamnă să vă imaginați că s-a obținut deja ceea ce se căuta". („Să ne imaginăm că problema a fost deja rezolvată"; cf. 1.4.)

2.35. Cînd punem problema în ecuație, procedăm exact invers decît sugerează soluția inginerului topograf: considerăm ca date pe x și unghiurile α, β, γ și δ, și pe

l ca necunoscută. Din ΔUVG găsim pe GV în funcție de x, $\alpha + \beta$ și γ (legea sinusurilor). Din ΔVUH găsim pe HV în funcție de x, β și $\gamma + \delta$ (legea sinusurilor). Din ΔGHV găsim pe l în funcție de GV, HV și δ (legea cosinusurilor) și, folosind expresiile pentru GV și HV, obținem

$$l^2 = x^2\left[\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)} + \frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\beta+\gamma+\delta)} - \frac{2\sin(\alpha+\beta)\sin\beta\cos\delta}{\sin(\alpha+\beta+\delta)\sin(\beta+\gamma+\delta)}\right]$$

De aici, exprimați pe x^2 în funcție de l, α, β, γ și δ.

2.36. Fie

A,	$2s$,	a,	b, c
aria	perimetrul	ipotenuza	celelalte laturi.

A și s sînt date, a, b și c sînt necunoscute. Pentru a rezolva sistemul

$$a + b + c = 2s, \quad bc = 2A, \quad a^2 = b^2 + c^2$$

exprimați $(b + c)^2$ în două moduri distincte:

$$(2s - a)^2 = a^2 + 4A$$

$$a = s - \frac{A}{s}.$$

2.37. Lungimile laturilor triunghiului sînt $2a$, u și v; fie $u + v = 2d$; înălțimea perpendiculară pe latura de lungime $2a$ are lungimea h.

Fiind date a, h, d, găsiți u, v.

Introduceți x și y, proiecțiile ortogonale ale laturilor u și respectiv v pe $2a$, precum și z, unde

$$x - y = 2z,$$

Avem, de asemenea,

$$x + y = 2a$$

$$u^2 = h^2 + x^2 \qquad v^2 = h^2 + y^2.$$

De aici

$$u^2 - v^2 = x^2 - y^2$$

sau

$$2d(u - v) = 2a \cdot 2z$$

$$u = d + \frac{a}{d}z \qquad v = d - \frac{a}{d}z$$

$$x = a + z \qquad y = a - z$$

$$\left(d + \frac{a}{d}z\right)^2 = h^2 + (a + z)^2$$

$$z^2 = d^2\left(1 - \frac{h^2}{d^2 - a^2}\right).$$

2.38. Dacă a şi b sînt lungimile celor două laturi neparalele, iar c şi d sînt lungimile celor două diagonale, atunci

$$2(a^2 + b^2) = c^2 + d^2.$$

Într-adevăr, diagonalele împart paralelogramul în patru triunghiuri: aplicaţi legea cosinusurilor în două triunghiuri alăturate.

2.39. $$(2b - a)x^2 + (4a^2 - b^2)(2x - a) = 0.$$

Dacă $a = 10$, $b = 12$, atunci $x = 16(-8 + 3\sqrt{11})/7$, o valoare foarte apropiată de $32/7$. Interpretaţi cazul $a = 2b$.

2.40. $$a^2(3 + \sqrt{3})/2.$$

2.41. 1/3, 2/9, 2/9, 2/9. Într-adevăr, laturile triunghiului mai mare sînt împărţite de vîrfurile triunghiului înscris în raportul 2 : 1.

2.42. (Stanford, 1957) Consideraţi mai întîi cazul cel mai simplu, cel al triunghiului echilateral. Simetria figurii ne poate face să bănuim că, în acest caz, şi cele patru fragmente triunghiulare trebuie să fie echilaterale. Dar dacă lucrurile stau aşa, atunci laturile fragmentelor triunghiulare trebuie să fie *paralele* cu laturile triunghiului dat: prin această remarcă am descoperit trăsătura esenţială a configuraţiei care rezolvă problema nu numai în cazul particular examinat, ci şi în cazul general. (De la triunghiul echilateral trecem la triunghiul oarecare prin „afinitate".) Cu patru paralele la una din laturile triunghiului dat, împărţim fiecare din celelalte două laturi în cîte cinci segmente egale. Repetînd construcţia de încă două ori, în raport cu celelalte două laturi ale triunghiului dat, îl împărţim în 25 triunghiuri identice între ele şi asemenea triunghiului mare. Din aceste 25 triunghiuri putem selecta uşor pe cele patru cerute în problemă: aria fiecăruia este 1/25 din aria triunghiului dat. (Soluţia aceasta este univoc determinată; nu dau aici demonstraţia.)

2.43. (Stanford, 1960) Generalizaţi: Punctul P se află în interiorul unui dreptunghi, distanţele lui faţă de cele patru vîrfuri sînt a, b, c şi d, iar faţă de cele patru laturi sînt x, y, x' şi y', luate în ordine ciclică (în sensul acelor unui ceasornic).
Atunci, alegînd convenabil notaţiile,

$$a^2 = y'^2 + x^2, \quad b^2 = x^2 + y^2, \quad c^2 = y^2 + x'^2, \quad d^2 = x'^2 + y'^2,$$

de unde

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0.$$

În cazul nostru $a = 5$, $b = 10$, $c = 11$ şi deci

$$d^2 = 25 - 100 + 196 = 121, \quad d = 11.$$

De remarcat că datele a, b şi c care sînt suficiente pentru a determina pe d nu sînt suficiente pentru a determina laturile $x + x'$ şi $y + y'$ ale dreptunghiului.

2.44. (I) Fie s latura pătratului. Atunci, după ex. 2.43, $x + x' = y + y' = s$, şi avem trei ecuaţii pentru cele trei necunoscute x, y şi s:

$$x^2 + (s - y)^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = b^2, \quad y^2 + (s - x)^2 = c^2.$$

De aici

$$2sy = s^2 + b^2 - a^2, \quad 2sx = s^2 + b^2 - c^2.$$

Ridicînd la pătrat şi adunînd, obţinem

$$s^4 - (a^2 + c^2)s^2 + [(b^2 - a^2)^2 + (b^2 - c^2)^2]/2 = 0,$$

adică o ecuaţie pătratică pentru s^2.

(II) Verificaţi semnificaţia geometrică a cazurilor particulare

(1) $s^2 = 2a^2$ sau $s = 0$.

(2) $s = a$,

(3) s este imaginar, cu excepţia cazului $c^2 = 2b^2 = 2s^2$.

(4) s este imaginar, cu excepţia cazului $a^2 = c^2 = s^2$.

2.45. (Stanford, 1959) $100\pi/4$ şi $100\pi/(2\sqrt{3})$ sau, aproximativ, 78,54% şi respectiv 90,69%. Trecerea de la o masă mare (pătrată) la planul infinit implică, de fapt, conceptul de limită asupra căruia, însă, nu insistăm, fiindcă rezultatul este evident intuitiv.

2.46. Urmînd procedeul din ex. 2.32, exprimăm diagonala unui cub convenabil ales în două moduri distincte:

$$(4r)^2 = 3(a - 2r)^2$$

$$r = (2\sqrt{3} - 3)a/2$$

2.47. Cele patru vîrfuri ale unui dreptunghi, luate în ordine ciclică, sînt respectiv la distanţele a, b, c şi d faţă de un punct P (care se poate afla oriunde în spaţiu). Fiind date trei dintre aceste distanţe, să se găsească cea de a patra distanţă.

Relaţia

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$$

găsită în ex. 2.43 rămîne valabilă şi în situaţia mai generală de aici, şi din ea decurge imediat soluţia căutată. Cele de mai sus se aplică, de pildă, unui punct P şi unui grup de patru vîrfuri convenabil alese dintre cele opt ale unei cutii (un paralelipiped dreptunghic), fiindcă oricare două diagonale ale unei cutii sînt şi diagonale ale unui anumit dreptunghi.

2.48. Rezolvarea unei probleme de geometrie în spaţiu depinde deseori de construirea unei „figuri plane cheie" care deschide calea spre stabilirea unor relaţii esenţiale.

Prin înălţimea piramidei, ducem un plan paralel cu două din laturile bazei (şi perpendiculara pe celelalte două). Intersecţia acestui plan cu piramida este un triunghi

isoscel care poate fi folosit ca figură-cheie: înălțimea lui este h, baza lui — s-o notăm cu a — este egală ca lungime cu latura bazei piramidei, iar celelalte două laturi au lungimea $2a$, deoarece fiecare din ele este înălțimea unei fețe laterale.
De aici,

$$(2a)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2,$$

așa că aria căutată este

$$5a^2 = 4h^2/3.$$

2.49. De pildă: Aria suprafeței unei piramide regulate este egală cu de patru ori aria bazei ei hexagonale. Fiind dată a — lungimea unei laturi a acestei baze, să se găsească h — înălțimea piramidei ($h = \sqrt{6}\,a$).

Vezi, de asemenea, ex. 2.52.

2.50. Într-un paralelogram, suma pătratelor celor două diagonale este egală cu suma pătratelor celor patru laturi. (O altă formulare a rezultatului ex. 2.38).

Într-un paralelipiped, fie

D, E, F,

suma pătratelor celor

4 diagonale 12 muchii 12 diagonale ale fețelor

Atunci:

$$D = E = F/2.$$

Soluția se obține aplicînd de mai multe ori rezultatul de la ex. 2.38.)

2.51. Pătratul ariei căutate este

$$16s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Formula aceasta poate fi considerată un analog al teoremei lui Heron, dar asemănarea între situații este prea mare pentru ca analogia să fie interesantă.

2.52. (Stanford, 1960) Fie a — latura unui triunghi, T — volumul tetraedrului și O — volumul octaedrului.

Prima soluție. Un plan convenabil ales împarte octaedrul în două piramide regulate identice, cu o bază pătrată comună, a cărei arie este a^2. Înălțimea uneia dintre aceste piramide este $a/\sqrt{2}$ („figura plană-cheie" trece prin una din diagonalele bazei), așa că

$$O = 2\,\frac{a^2}{3}\,\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Ducem un plan prin înălțimea (de lungime h) a tetraedrului și prin una din muchii cu care aceasta se intersectează; intersecția planului cu tetraedrul (figura plană-cheie) pune în evidență două triunghiuri din care

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$= \frac{2a^2}{3},$$

așa că

$$T = \frac{1}{3}\,\frac{a}{2}\,\frac{a\sqrt{3}}{2}\,\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12},$$

și deci

$$O = 4T.$$

A doua soluție. Considerăm tetraedrul regulat de muchie $2a$; volumul lui este 2^3T; patru plane care trec, fiecare, prin punctele mediane de pe cele trei muchii care se termină într-un același vîrf, împart tetraedrul în patru tetraedre regulate, fiecare de volum T, și într-un octaedru regulat de volum O. De aici

$$4T + O = 8T$$

care dă, din nou, $O = 4T$.

2.53. Volumele sînt în rapoartele

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

iar ariile suprafețelor, în rapoartele

$$\frac{b+c}{a} : \frac{c+a}{b} : \frac{a+b}{c}.$$

2.54. (Stanford, 1951) Diferența volumelor, trunchiul de con minus cilindrul,

$$\pi h\left[\frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi h(a-b)^2}{12}$$

este pozitivă, cu excepția cazului $a = b$, în care cele două corpuri coincid.

MRP, vol. I, cap. VIII, conține cîteva aplicații ale inegalităților algebrice la geometrie.

2.55. Fie r — raza cercului circumscris triunghiului ΔABC. Atunci

$$r^2 = h(2R - h), \qquad r = \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{3}a}{2},$$

prin urmare

$$R = \frac{a^2}{6h} + \frac{h}{2}.$$

Deseori, în practică, termenul $\frac{h}{2}$ este neglijabil.

2.57. 35 mile (vezi ex. 2.58).

2.58. Dăm, între paranteze, după literele care le generalizează, valorile numerice date în enunț;

a (7/2) este viteza lui A,

b (8/3) este viteza lui B,

c (1) numărul de ore care se scurg între cele două plecări,

d (59) distanța dintre cele două puncte de plecare. Atunci

$$x + y = d, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c, \quad x = \frac{a(bc+d)}{a+b}.$$

Newton formulează problema generalizată în felul următor: „Fiind date vitezele a două corpuri mobile, A și B, care se mișcă spre un același loc, împreună cu intervalul sau distanța dintre locurile și dintre momentele din, și în, care ele încep să se miște, să se determine locul în care ele se întîlnesc".

2.59. (Stanford, 1959) Folosim notațiile

u pentru viteza lui Alec

v pentru viteza lui Bill

t_1 pentru timpul (măsurat de la plecare) după care băieții se întîlnesc prima dată,

t_2 pentru timpul după care ei se întîlnesc a doua oară,

d pentru distanța căutată dintre cele două case. Atunci

$$ut_1 = a, \qquad ut_2 = d + b$$

$$vt_1 = d - a, \; vt_2 = 2d - b.$$

(1) Exprimînd pe u/v în două moduri distincte, obținem

$$\frac{a}{d-a} = \frac{d+b}{2d-b}.$$

De aici, după ce eliminăm rădăcina nulă, găsim $d = 3a - b$.

2) Bineînțeles, Alec. Numeric: $u/v = 3/2$.

2.60. (Stanford, 1955) Vezi ex. 2.61, vezi, de asemenea, *CRP*, pp. 217, 220, 226: problema 12.

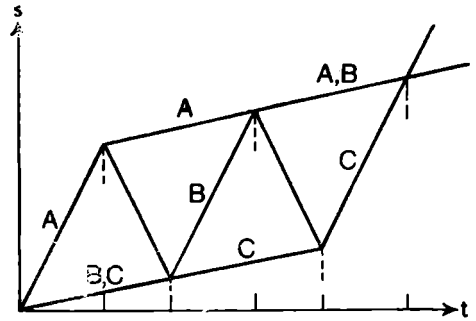


Fig. S2.61

2.61. Între punctul de plecare şi primul punct în care se întîlnesc din nou toţi cei $n + 1$ prieteni, sînt de deosebit $2n - 1$ faze distincte:

(1) Bob călătoreşte împreună cu A

(2) Bob călătoreşte singur

(3) Bob călătoreşte împreună cu B

(4) Bob călătoreşte singur

. . . . . .

($2n - 1$) Bob călătoreşte împreună cu L.

Fig. S2.61, în care $n = 3$, pune în evidenţă cinci faze; liniile care reprezintă deplasările ui A, B sau C sînt marcate cu literele respective; linia care reprezintă itinerarul automobilului este uşor de recunoscut după panta ei mai mare. Din simetria configuraţiei (deosebit de clară din fig. S2.61) vedem că toate cele n faze impare au aceeaşi durată, s-o notăm T, iar toate cele $n-1$ faze pare au, şi ele, aceeaşi durată, s-o notăm T'. Exprimăm cu cît avansează cu toţii în cele $2n-1$ faze [adică în $nT + (n - 1)\,T'$ unităţi de timp] în două moduri distincte (ne ocupăm mai întîi de Bob, apoi de unul din prietenii lui):

$$nTc - (n - 1)\,T'c = Tc + (n - 1)\,(T + T')\,p\,,$$

de unde

$$\frac{T}{T'} = \frac{c + p}{c - p}.$$

(1) Viteza de înaintare a întregului grup este

$$\frac{nTc - (n - 1)\,T'c}{nT + (n - 1)\,T'} = c\,\frac{c + (2n - 1)p}{(2n - 1)\,c + p}.$$

(2) Fracţiunea de timp în care automobilul îl transportă numai pe Bob este

$$\frac{(n-1)T'}{nT + (n-1)T'} = \frac{(n - 1)\,(c - p)}{(2n - 1)\,c + p}.$$

(3) Rezultatele (1) şi (2) devin cu totul intuitive în cazurile extreme [numai (2), pentru $n = \infty$, este mai puţin evident

	$p = 0$	$p = c$	$n = 1$	$n = \infty$
(1) Viteza de înaintare	$c/(2n-1)$	c	c	p
(2) Fracţiunea de timp cînd Bob este singur	$(n - 1)\,/\,(2n - 1)$	0	0	$(c - p)/2c$.

2.62. Fie t_1 — timpul de coborîre a pietrii şi t_2 — timpul de ascensiune a sunetului. Din

$$T = t_1 + t_2, \quad d = gt_1^2/2, \quad d = ct_2$$

găsim

$$d = \{- c\,(2g)^{-1/2} + [c^2(2g)^{-1} + cT]^{1/2}\}^2$$

Cf. *MRP*, vol. I, pp.197 şi 305, ex. 29.

2.63. Introducem $\beta' = \sphericalangle ACO$. Deoarece

$$\frac{\sin\omega}{\sin\beta} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{\sin\omega'}{\sin\beta'} = \frac{AC}{AO}$$

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'}\,\frac{\sin\beta'}{\sin\beta} = \frac{t}{t'}.$$

Pe de altă parte, $\beta' = \beta - (\omega' - \omega)$. Exprimînd pe $\sin\beta'/\sin\beta$ în două moduri distincte, obţinem

$$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}(\omega' - \omega) - \frac{t \sin\omega'}{t' \sin\omega \sin(\omega' - \omega)}.$$

2.64. Adunînd cele trei ecuaţii, obţinem

$$0 = a + b + c.$$

Dacă datele a, b şi c nu satisfac această relaţie, „problema este imposibilă", adică nu există numere x, y şi z care satisfac simultan cele trei ecuaţii. Dacă relaţia este satisfăcută, problema este *nedeterminată*, adică există infinit de multe soluţii: din primele două ecuaţii obţinem

$$x = z + (3a + b)/7$$

$$y = z + (2a + 3b)/7,$$

în care z rămîne arbitrar.

Cf. ex. 1.43 şi 1.44.

2.65. (Stanford, 1955) Comparînd coeficienţii aceloraşi puteri din cei doi membrii ai identităţii, obţinem cinci ecuaţii

$$1 = p^2, \; 4 = 2qp, \; -2 = q^2 + 2pr, \; -12 = 2qr, \; 9 = r^2$$

pentru cele trei necunoscute p, q şi r. Prima ecuaţie dă $p = \pm 1$, de unde următoarele două ecuaţii, folosite succesiv, determină două sisteme de soluţii

$$p = 1, \; q = 2, \; r = -3 \quad \text{şi} \quad p = -1, \; q = -2, \; r = 3$$

şi se întîmplă că ambele sisteme satisfac şi restul de două ecuaţii.

De obicei, rădăcina pătrată nu poate fi extrasă, fiindcă de regulă nu se poate satisface un sistem cu mai multe ecuații decît necunoscute.

2.66. (Stanford, 1954) Dezvoltînd membrul din dreapta al identității ipotetice și egalînd între ei coeficienții corespondenți, obținem

1) $aA = bB = cC = 1$

(2) $bC + cB = cA + aC = aB + bA = 0$

Din (2) deducem că

$$bC = -cB, \quad cA = -aC, \quad aB = -bA$$

și înmulțind între ele aceste trei ecuații, deducem în continuare că

$$abcABC = -abcABC$$

$$abcABC = 0.$$

Dar din (1) deducem că

$$abcABC = 1.$$

Această condiție arată că identitatea ipotetică de la care am pornit este imposibilă.

Am arătat aici că un (anumit!) sistem de șase ecuații cu șase necunoscute a, b, c, A, B și C este imposibil.

2.67. Valorile

$$x = 5t, \quad y = 60 - 18t, \quad z = 40 + 13t$$

sînt pozitive dacă și numai dacă $0 < t < 60/18$. Această dublă inegalitate permite pentru t valorile 1, 2, 3, iar pentru (x, y, z), trei sisteme de valori

$$(5, 42, 53), \ (10, 24, 66), \ (15, 6, 79)$$

2.68. Procedați ca la ex.2.67: sistemul

$$x + y + z = 30$$

$$14x + 11y + 9z = 360$$

este satisfăcut de

$$x = 2t, \quad y = 45 - 5t, \quad z = 3t - 15$$

$$t = 5, 6, 7, 8 \text{ sau } 9$$

2.69. $$100 + x = y^2, \quad 168 + x = z^2$$

Scăzînd membru cu membru, obținem

$$(z - y)(z + y) = 68.$$

Deoarece $68 = 2^2 \cdot 17$ poate fi descompus într-un produs de doi factori numai în trei moduri:

$$68 = 1 \cdot 68 = 2 \cdot 34 = 4 \cdot 17$$

și y și z trebuie să fie sau ambii pari, sau ambii impari, există numai o singură soluție

$$z - y = 2, \quad z + y = 34, \quad z = 18, \quad y = 16, \quad x = 156.$$

2.70. (Stanford, 1957) Bob are x timbre dintre care y șeptimi sînt în clasorul al doilea; x și y sînt întregi pozitivi,

$$\frac{2x}{10} + \frac{yx}{7} + 303 = x$$

și deci

$$x = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 101}{28 - 5y}.$$

Numitorul din partea dreaptă trebuie să fie pozitiv și *impar* fiindcă trebuie să dividă exact numărătorul care este impar. De aici rezultă trei posibilități: $y = 1, 3$ și 5, dar numai ultima este acceptabilă: $y = 5$ și $x = 3535$ sînt univoc determinate.

2.71. (Stanford, 1960) Dacă prețul redus este x cenți și stocul rămas este y pixuri, atunci $x < 50$ și

$$xy = 3193.$$

Dar $3193 = 31 \times 103$ este produsul a doi factori primi, prin urmare, are numai patru divizori distincți: 1, 31, 103 și 3193. Dacă presupunem că x este un număr întreg, atunci $x = 1$, sau $x = 31$. Dacă *presupunem în plus* că $x > 1$, atunci $x = 31$.

2.72. (1) Incompatibilitate: Printre cele trei plane, sau există două care sînt distincte și paralele, sau oricare două se intersectează și cele trei drepte de intersecție sînt distincte și paralele.

(2) *Dependență*: Planele au o dreaptă comună; două din ele, sau chiar toate trei, pot fi coincidente.

(3) *Compatibilitate și independență*: Există un singur punct comun, cel de intersecție

2.73. Manualele curente pentru școlile medii conțin numeroase „probleme școlărești", dar problemele acestea nu sînt suficient de variate. Iar cele care lipsesc de obicei sînt tocmai problemele cu aplicații și chestiuni tipice care ar putea pune în lumină interesul general pe care-l prezintă „schema carteziană".

Din exemplele precedente, cititorul poate învăța să adauge problemei pe care tocmai a rezolvat-o unele întrebări utile, instructive. Iată cîteva asemenea întrebări, cu trimiteri la cîte un exemplu ilustrativ pentru fiecare în parte (ar fi însă bine ca cititorul să caute și alte ilustrări):

Putem verifica rezultatul? (Ex. 2.4.)

Verificați rezultatul în cazuri extreme (degenerate, limită). (Ex. 2.14.)

Putem obține rezultatul și pe o altă cale? Să comparăm între ele diferitele căi de rezolvare. (Ex. 2.8.)

Putem imagina o altă interpretare a rezultatului? (Ex. 2.3.)

Generalizați problema. (Ex. 2.2.)

Imaginați o problemă analogă. (Ex. 2.47.)

Pornind de la o problemă oarecare și punîndu-și întrebările de mai sus, sau altele similare, cititorul poate elabora probleme noi și poate găsi, eventual, vreo problemă realmente interesantă și nu prea greu de rezolvat. În orice caz, punîndu-și asemenea întrebări el are bune șanse să ajungă la o înțelegere mai profundă a problemei de la care a pornit și să-și dezvolte îndemînarea în domeniul rezolvării problemelor.

Iată, pentru exemplificare, două probleme (nu dintre cele mai ușoare) elaborate pornind de la cele precedente.

(I) Verificați rezultatul ex. 2.35

(1) presupunînd că $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$, $\alpha + \beta = 90°$;

(2) presupunînd că $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$, dar fără a impune o valoare pentru suma $\alpha + \beta$;

(3) înlocuind unghiurile α, β, γ și δ respectiv cu unghiurile δ, γ, β și α.

(II) Încercați să vă imaginați probleme de geometrie în spațiu analoge ex. 2.45. (În ex. 3.9, puteți găsi o sugestie.)

Nu implică rezolvări: 2.56, 2.72, 2.73, 2.74, 2.76, 2.77.

CAPITOLUL 3

3.1. Pentru $n = 0$ și $n = 1$ afirmația este evidentă. Presupuneți că ea este adevărată pentru o valoare oarecare n :

$$(1 + x)^n = 1 + \ldots + \binom{n}{r-1} x^{r-1} + \binom{n}{r} x^r + \ldots + x^n.$$

Înmulțind ambii membrii cu $(1 + x)$ obțineți

$$(1 + x)^{n+1} = 1 + \ldots + \left[\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}\right] x^r + \ldots + x^{n+1}.$$

În virtutea formulei de recurență din 3.6(2), coeficientul lui x^r în $(1 + x)^{n+1}$ este deci egal cu

$$\binom{n+1}{r},$$

așadar teorema binomului, presupusă valabilă pentru n, se dovedește valabilă și pentru $(n + 1)$. Trebuie să remarcați că am folosit și *condiția la limită* din 3.6(2). Unde?

3.2. Presupuneți stabilit rezultatul ex. 3.1, notați

$$x = \frac{b}{a}$$

și considerați

$$a^n(1 + x)^n = (a + b)^n.$$

3.3. Considerați afirmația „S_p este un polinom de grad $p + 1$" drept o conjectură (ceea ce și era, la început). Această conjectură este cu siguranță adevărată în primele cazuri particulare, $p = 0$, 1 și 2 (care, de fapt, au sugerat-o; vezi începutul 3.3). Să *presupunem* că conjectura s-ar verifica pînă la $p = k - 1$, adică pentru $p = 0, 1, 2, \ldots, k - 1$ (pentru $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$). *În aceste condiții*, putem conchide (priviți ultima ecuație din 3.4) că

$$\binom{k+1}{2} S_{k-1} + \binom{k+1}{3} S_{k-2} + \ldots + S_0 = P$$

(introducem notația P pentru concizie) este un polinom de grad k. Apoi, din ecuația amintită deducem că

$$S_k = \frac{(n+1)^{k+1} - 1 - P}{k+1}. \tag{1}$$

Deoarece P este de gradul k în n, termenul de gradul cel mai mare din $(n + 1)^{k+1}$, care este n^{k+1}, nu se poate simplifica, așa că formula noastră arată că S_k este un polinom de grad $(k + 1)$ în n. Am ajuns la această concluzie presupunînd că S_0 este de gradul 1 S_1 de gradul 2, ... și S_{k-1} de gradul k.

Intuitiv, putem spune că proprietatea considerată a lui S_k (aceea că S_k este de grad $k + 1$) are o „tendință nepotolită de a se propaga". Am aflat foarte de timpuriu că S_0, S_1 și S_2 au această proprietate; prin urmare, pe baza demonstrației precedente, și suma S_3 trebuie s-o aibă; pe baza aceleiași demonstrații, și S_4 trebuie s-o aibă, apoi — și S_5 și așa mai departe.

Acum, din formula (1) este evident că și termenul de gradul cel mai înalt din S_k este de forma afirmată.

Cîteva dintre problemele care urmează oferă alte căi de a ajunge la acest din urmă rezultat (vezi, de asemenea, ex. 4.2 — 4.7).

3.4.

$$S_4 = S_2 \frac{6S_1 - 1}{5}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Demonstrarea prin inducție matematică se face după schema standard (vezi *MRP*, vol. I, pp. 135—140).

3.5. Schema sugerată de 3.2, 3.3. și 3.4, și de ex. 3.3.

3.6. Analog 3.4 :

$$n^k - (n-1)^k = \binom{k}{1} n^{k-1} - \binom{k}{2} n^{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k}$$

3.7. Analog 3.4 :

$$[n(n+1)]^k - [(n-1)n]^k = n^k[(n+1)^k - (n-1)^k]$$
$$= 2\binom{k}{1}n^{2k-1} + 2\binom{k}{3}n^{2k-3} + 2\binom{k}{5}n^{2k-5} + \ldots$$

3.8. Analog 3.4 :

$$(2n+1)[n(n+1)]^k - (2n-1)[(n-1)n]^k$$
$$= n^k(n+1)^k + (n-1)^k + 2n^{k+1}[(n+1)^k - (n-1)^k]$$
$$= 2\left[\binom{k}{0} + 2\binom{k}{1}\right]n^{2k} + 2\left[\binom{k}{2} + 2\binom{k}{3}\right]n^{2k-2} + \ldots$$

3.9. Din ex. 3.7, prin recurență și inducție matematică.

3.10. Din ex. 3.7, prin recurență și inducție matematică.

3.11. În virtutea ex. 3.9 și 3.10, este suficient să se verifice afirmația pentru $S_1(x)$ și

$$S_2(x) = S_1(x)\frac{2x+1}{3}.$$

3.12. (a) Prin „metoda micului Gauss" (primul procedeu din 3.1) :

$$[1 + (2n-1)] + [3 + (2n-3)] + \ldots = 2n\frac{n}{2} = n^2.$$

(*b*) Folosind al doilea procedeu din 3.1 ; vezi în continuare.

(*c*) Generalizați : considerați suma unei progresii aritmetice cu termenul inițiala, cu rația d și cu n termeni :

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+(n-1)d).$$

Notați ultimul termen $a + (n-1)\,d = b$; atunci (acesta este al doilea procedeu din 3.1)

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (b-2d) + (b-d) + b$$
$$S = b + (b-d) + (b-2d) + \ldots + (a+2d) + (a+d) + a.$$

Adunînd membru cu membru și apoi împărțind totul la 2

$$S = \frac{a+b}{2}n.$$

Particularizați : $a = 1$, $b = 2n-1$; atunci

$$S = \frac{1+(2n-1)}{2}n = n^2.$$

(*d*) Vezi fig. 3.9.

(*e*) Vezi ex. 3.13.

3.13. $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n)^2 - 4(1 + 4 + \ldots + n^2)$

$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1}{6} - 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

3.14. Urmați schema de la ex. 3.13:

$$\frac{4n^2(2n+1)^2}{4} - 8\frac{n^2(n+1)^2}{4} = n^2(2n^2-1).$$

3.15. Folosiți notația de la ex. 3.11:

$$1^k + 3^k + \ldots + (2n-1)^k = S_k(2n) - 2^k S_k(n).$$

3.16. S-ar putea să fie mai ușor de răspuns la mai multe întrebări, decît la una singură. (Acesta este „paradoxul inventatorului": vezi *CRP*, p. 148.) Pe lîngă relația propusă,

$$2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + (3n-1)^2 = U$$

considerați și relația

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + \ldots + (3n-2)^2 = V.$$

Atunci (sugerat de ex. 3.15)

$$U + V + 9S_2(n) = S_2(3n).$$

În plus,

$$U - V = 3 + 9 + 15 + \ldots + (6n-3) = 3n^2.$$

Avem aici un sistem de două ecuații liniare pentru cele două necunoscute U și V, care dă nu numai suma cerută

$$U = n(6n^2 + 3n - 1)/2,$$

ci și suma

$$V = n(6n^2 - 3n - 1)/2.$$

Pentru o altă metodă, vezi ex. 3.17.

3.17. (Vezi Pascal, *op. cit.*, nota de subsol 3, de la cap. 3.) Generalizînd notația din 3.3 (în care ne-am ocupat de cazul particular $a = d = 1$), introducem

$$S_k = a^k + (a+d)^k + (a+2d)^k + \ldots + [a + (n-1)d]^k.$$

Evident, $S_0 = n$. Înlocuind pe n cu 1, 2, 3, ..., n în relația

$$(a+nd)^{k+1} - [a + (n-1)d]^{k+1} =$$

$$= \binom{k+1}{1}[a + (n+1)d]^k d + \binom{k+1}{2}[a + (n-1)d]^{k-1} d^2 + \ldots$$

și adunînd, obținem

$$(a+dn)^{k+1} - a^{k+1} = \binom{k+1}{1}S_k d + \binom{k+1}{2}S_{k-1}d^2 + \ldots + S_0 d^{k+1}$$

Prin urmare, obținem sumele S_1, S_2, ..., S_k una după alta, prin recurență. Calculați în detaliu cazul $a = 2$, $d = 3$, $k = 2$ (vezi ex. 3.16).

3.18. Suma cerută este

$$\frac{1\cdot 2}{2}2 + \frac{2\cdot 3}{2}3 + \frac{3\cdot 4}{2}4 + \ldots + \frac{(n-1)n}{2}n$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2^3-2^2) + (3^3-3^2) + (4^3-4^2) + \ldots + (n^3-n^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(S_3 - S_2) = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$$

pe baza rezultatelor din 3.2 și 3.3.

3.19. (*a*) $\dfrac{n(n^2-1)}{6}$; (*b*) $1^{n-1}\,2^{n-2}\,3^{n-3}\ldots(n-1)^1$; (*c*) $\dfrac{n^2(n^2-1)}{12}$.

3.20. Am calculat deja E_1 în 3.1 și E_2 în ex. 3.18. Un procedeu mai eficient se bazează pe o propoziție clasică din algebră: funcțiile simetrice elementare pot fi exprimate în funcție de sumele aceloraşi puteri:

$$E_1 = S_1$$
$$E_2 = (S_1^2 - S_2)/2$$
$$E_3 = (S_1^3 + 2S_3 - 3S_1S_2)/6$$
$$E_4 = (S_1^4 + 3S_2^2 + 8S_1S_3 - 6S_1^2S_2 - 6S_4)/24.$$

Combinați aceste relații cu rezultatele obținute anterior (3.1, 3.2 și 3.3, ex. 3.4). Combinînd anumite proprietăți ale expresiei generale a lui E_k în funcție de S_1, S_2, ..., S_k (E_k este „izobară") cu ex. 3.9 și 3.10, putem obține nu numai gradul, ci și coeficientul termenului de gradul cel mai mare,

$$E_k(n) = \frac{n^{2k}}{k!\,2^k} + \ldots$$

și putem deduce că, pentru $k \geqslant 2$, $E_k(n)$ este divizibil cu

$$(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)\left[n(n+1)\right]^{[3(-1)^k]/2}$$

3.21. *Procedeul* (*a*) *este un caz particular al procedeului* I(*b*). ntr-adevăr, dacă A_{n+1} este implicată de A_n luată singură, atunci ea este *a fortiori* (= cu atît mai puternic) implicată de afirmațiile $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ și A_n, luate împreună. Aceasta înseamnă, că, dacă afirmația (II*a*) se dovedește corectă, atunci afirmația (II*b*) trebuie să fie corectă. Prin urmare, dacă acceptăm procedeul (*b*), sîntem obligați să acceptăm și procedeul (*a*).

Procedeul (*b*) poate fi redus la procedeul (*a*). Definim B_n ca fiind afirmarea simultană a n propoziții A_1, A_2, ..., A_{n-1} și A_n. Atunci:

afirmația (I) statuează: B_1 *este adevărată.*

afirmația (II*b*) se reduce la: B_n *implică* B_{n+1}.

De aici, afirmațiile (I) și (II*b*) referitoare la șirul $A_1, A_2, A_3, \ldots$ se reduc la afirmațiile (I) și (II*a*) în care s-a înlocuit A_n cu B_n (bineînțeles, $n = 1, 2, 3, \ldots$).

3.22. Fig. 3.3 poate fi cunoscută ca reprezentînd cazul în care Bernie, Charlie, Dick, Roy și Artie (cvartalele străbătute mergînd de la nord-vest spre sud-est) ridică cortul, iar ceilalți cinci băieți (Ricky, Abe, Al, Alex și Bill — cvartalele străbătute mergînd de la nord-est spre sud-vest) pregătesc cina. Pornind de la acest caz concret, trebuie să reușiți să înțelegeți că fiecărei împărțiri distincte a băieților în două echipe de cîte cinci îi corespunde un traseu minim, în zigzag, de la vîrful de sus, la cel de jos, de pe fig. 3.3 și că, și invers, fiecărui traseu de acest tip îi corespunde o astfel de împărțire; corespondența este biunivocă. Prin urmare, numărul de împărțiri căutate este 252 (vezi fig. 3.3).

3.23. Avem aici de-a face cu situația generală al cărui caz particular reprezentativ (*MRP*, vol. I, p. 41, ex. 10) ne-a apărut în ex. 3.22 și în fig. 3.3.

Numerotăm indivizii de la 1 la n și individului numărul k îi punem în corespondență „baza" (rîndul orizontal) numărul k din triunghiul lui Pascal. Un individ aparține submulțimii dacă și numai dacă traseul în zigzag sosește la baza corespunzătoare individului în triunghiul lui Pascal coborînd de-a lungul unui cvartal în direcția *de la nord-vest la nord-est*. În felul acesta, orice submulțime de volum n conținută în mulțimea dată de volum n poate fi vizualizată ca un traseu în zigzag care se termină într-un punct dinainte fixat, și numărăm submulțimile numărînd traseele în zigzag. (Cf. *MRP*, vol. II, pp. 124—125, ex. 31.)

3.24. $\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ drepte, $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ triunghiuri.

3.25. Fiind date n puncte în spațiu, într-o poziție „generală" (= oarecare) există

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

tetraedre cu vîrfurile alese printre cele n puncte date.

3.26. $$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

3.27. Două diagonale care se intersectează în interiorul poligonului *convex* dat sînt diagonalele unui anumit patrulater convex cu vîrfurile alese dintre cele n vîrfuri ale poligonului dat. Prin urmare, numărul de intersecții despre care este vorba este

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

3.28. Fața roșie poate fi aleasă în

$$\binom{6}{1} = 6$$

moduri distincte. Cele două fețe albastre pot fi alese, printre cele cinci fețe rămase, în

$$\binom{5}{2} = 10$$

moduri distincte. Prin urmare, numărul total de posibilități distincte de distribuire, în modul stabilit în enunț, a celor trei culori pe cele șase fețe este

$$\binom{6}{1}\binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60.$$

3.29. $\binom{n}{r}\binom{s+t}{s} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}\cdot\dfrac{(s+t)!}{s!\,t!} = \dfrac{n!}{r!\,s!\,t!}.$

3.30. O mulțime formată din n indivizi este împărțită în h submulțimi care nu se suprapun (prin urmare, două submulțimi distincte nu au nici un element comun); prima submulțime are r_1 elemente, a doua are r_2 elemente, ... și ultima submulțime are r_h elemente, în așa fel încît

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_h = n.$$

Există

$$\frac{n!}{r_1!\,r_2!\,r_3!\ldots r_h!}$$

subdivizări de acest tip. De reținut că numerotarea sau „etichetarea" submulțimilor este esențială: dacă unele dintre numerele $r_1, r_2, \ldots, r_h$ se întîmplă să fie egale, trebuie să nu confundăm între ele submulțimile de același volum dar etichetate diferit. Astfel, în ex. 2.22, facem distincție (= *știm* cum să facem deosebire) între cei cinci băieți care ridică cortul și ceilalți cinci care pregătesc cina; sau — ceea ce înseamnă, în esență, același lucru — facem deosebire, pe fig. 3.3, între un traseu (oarecare) în zigzag și traseul care este imaginea în oglindă a primului, față de linia mediană a figurii (care unește A-ul inițial, cu A-ul final). Tot așa, în ex. 3.29, cele r fețe au o culoare predeterminată *diferită* de cea a celor s fețe, chiar dacă valorile lui r și s s-ar întîmpla să coincidă.

3.31. La această egalitate se poate ajunge pe toate cele patru căi indicate în 3.8, precum și pe calea din ex. 3.23.

(1) Rețeaua de străzi este simetrică față de verticala care trece prin vîrful triunghiului lui Pascal.

(2) Aceeași simetrie este manifestă și în formula de recurență și în condiția la limită.

(3) Folosind pentru factorial notația

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots m = m!$$

avem

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r}$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)(n-r)\ldots 3.2.1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r\,(n-r)\ldots 3.2.1}$$
$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{n-r}.$$

(4) Deoarece binomul $(a+b)^n$ nu se schimbă dacă schimbăm între ei pe a şi b, înseamnă că şi în dezvoltarea lui, termenii $a^r b^{n-r}$ şi $a^{n-r} b^r$ trebuie să apară cu acelaşi coeficient.

(5) Ori de cîte ori, dintr-o mulţime de n indivizi, selectăm o submulţime de r indivizi, automat lăsăm o altă submulţime de $(n-r)$ indivizi. Prin urmare, există exact atîtea submulţimi de un tip — cîte de celălalt tip.

3.32. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$

Demonstraţie: puneţi $a = b = 1$ în dezvoltarea lui $(a+b)^n$. *Altă demonstraţie*: Există 2^n trasee minime distincte de la vîrful triunghiului lui Pascal pînă la baza a $n-a$; faptul acesta este evident fiindcă, alegînd pe fig. 3.3 un drum care să ducă neapărat „în jos", la fiecare nouă încrucişare de străzi (fiecare bază) avem de ales între două, şi numai două alternative: spre sud-vest sau spre sud-est. *Încă o demonstraţie*: Într-o mulţime de n indivizi există 2^n submulţimi, dacă includem printre ele mulţimea vidă şi mulţimea totală $\left|\text{ele sînt „numărate" de termenii } \binom{n}{0} \text{ şi respectiv } \binom{n}{n}\right|$; faptul este evident fiindcă selectînd o submulţime, putem accepta sau refuza (două posibilităţi!) oricare dintre cei n indivizi ai mulţimii.

3.33. $$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

pentru $n \geqslant 1$. Puneţi $a = 1$ şi $b = -1$ în dezvoltarea lui $(a+b)^n$.

Altă demonstraţie: Din condiţia la limită şi formula de recurenţă, avem

$$\binom{n}{0} = \binom{n-1}{0}$$
$$-\binom{n}{1} = -\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1}$$
$$\binom{n}{2} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} = (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-2} + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}$$
$$(-1)^n\binom{n}{n} = (-1)^n\binom{n-1}{n-1}$$

Adunați!

Încă o demonstrație: Fiecare traseu în zigzag care atinge baza a $(n-1)$-a se ramifică în două trasee care duc la baza a n-a, dintre care unul duce la un nod „pozitiv" ($r = 0, 2, 4, \ldots$), iar celălalt la un nod „negativ" ($r = 1,3,5, \ldots$).

3.34. În mod analog (pe „bulevardul" al patrulea)

$$1 + 5 + 15 + 35 = 56$$

și în general (pe bulevardul numărul r)

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Demonstrație prin inducție matematică: Afirmația este adevărată pentru $r = n$: într-adevăr

$$\binom{r}{n} = \binom{r+1}{r+1}$$

în virtutea condiției la limită.

Presupunem acum că afirmația este valabilă pentru o anumită valoare n. Adunînd aceeași cantitate în ambii membri ai egalității presupuse, găsim

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{n}{r} + \binom{n+1}{r} = \binom{n+1}{r+1} + \binom{n+1}{r} = \binom{n+2}{r+1}$$

în virtutea formulei de recurență, așa că rezultă valabilitatea afirmației pentru valoarea imediat următoare, $n + 1$.

Prin aceasta, teorema este demonstrată pentru $n \geqslant r$.

Altă demonstrație: În fig. 3.7(I), A este vîrful, iar L este un punct dat, specificat prin numerele $(n + 1)$ și $(r + 1)$; numărul total de trasee minime de la A la L este $\binom{n+1}{r+1}$. Fiecare dintre aceste trasee trebuie să folosească o „stradă" sau alta ca să treacă de pe „bulevardul" numărul r pe „bulevardul" $(r + 1)$; numerele de trasee care folosesc străzile succesive sînt, respectiv,

$$\binom{r}{r}, \binom{r+1}{r}, \binom{r+2}{r}, \ldots, \binom{n}{r}$$

și prin urmare suma acestor numere dă tocmai numărul total de trasee de care este vorba, $\binom{n+1}{r+1}$, după cum s-a afirmat.

3.35. Adunînd mai întîi numerele de pe frontiera de nord-vest (bulevardul zero), apoi pe cele de pe bulevardul unu, ... și, în fine, pe cele de pe bulevardul al cincilea din fig. 3.5, obținem, respectiv,

6, 21, 56, 126, 252, 462

iar suma acestor șase numere este 923, număr pe care-l căutăm în zadar în vecinătatea fragmentului din triunghiul lui Pascal reprezentat pe fig. 3.5. Găsim însă în triunghiul lui Pascal numărul imediat următor

$$924 = \binom{12}{6}.$$

Să remarcăm acum că am fi putut evita osteneala de a efectua adunările (inclusiv ultima — a șasea), folosind ex. 3.34 și un tabel de coeficienți binomiali, și putem demonstra ușor, pornind de la exemplul nostru reprezentativ, că, în general,

$$\sum_{l=0}^{m} \sum_{r=0}^{n} \binom{l+r}{r} = \binom{m+n+2}{m+1} - 1.$$

3.36. În membrul din stînga al egalității propuse, primii factori sînt luați de pe baza a 5-a a triunghiului lui Pascal, iar factorii secunzi — de pe baza a 4-a; membrul din dreapta poate fi găsit pe baza a 9-a. În exemplul $1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 1 = 56$ sînt implicate, în mod analog, bazele a 5-a, a 3-a și a 8-a. Situația mai generală considerată în 3.9 implică bazele a n-a, din nou a n-a și a 2 n-a. Aceste exemple sugerează teorema generală:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{r-2} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}.$$

De fapt, scriind această relație, am admis implicit o extensiune a semnificației simbolurilor folosite; o definiție formală a extinderii va fi dată mai jos, în ex. 3.65 (III).

Ambele demonstrații date în 3.9 pot fi extinse la cazul mai general de aici. Demonstrația geometrică este sugerată de compararea fig. 3.7(II) cu fig. 3.7(III). Demonstrația analitică constă în calcularea în două moduri distincte a coeficientului lui x^r în dezvoltarea egalității

$$(1 + x)^m (1 + x)^n = (1 + x)^{m+n}.$$

3.37. În membrul din stînga al egalității propuse, primii factorii sînt luați de pe primul „bulevard" al triunghiului lui Pascal, iar factorii secunzi — de pe bulevardul al doilea; membrul din dreapta poate fi găsit pe bulevardul al 5-lea. În exemplul

$$1 \cdot 10 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 1 = 56$$

sînt implicate, în mod analog, bulevardul al 2-lea, din nou al 2-lea și al 5-lea. Putem interpreta situația generală tratată în ex. 3.34 și fig. 3.7(I) ca implicînd, într-un mod analog, bulevardele numerele 0, r și $(r + 1)$. Aceste exemple sugerează teorema generală:

$$\binom{r}{r}\binom{s+n}{s} + \binom{r+1}{r}\binom{s+n+1}{s} + \binom{r+2}{r}\binom{s+n-2}{s} + \cdots + \binom{r+n}{r}\binom{s}{s} = \binom{r+s+n+1}{r+s+1}.$$

Demonstrația geometrică (mai generală decît demonstrația geometrică din ex. 3.34, analogă celei din 3.9 și ex. 3.36) : În fig. 3.7(IV), punctul L este specificat de numerele $r + 1 + s + n$ (numărul total de cvartale) și $r + 1 + s$ (cvartalele străbătute spre dreapta, și în jos), așa că numărul total de trasee minime, în zigzag, de la vîrful A la punctul L este

$$\binom{r + s + n + 1}{r + s + 1}.$$

Fiecare dintre aceste trasee trebuie să folosească o „stradă" sau alta pentru a trece de pe „bulevardul" r, pe bulevardul $(r + 1)$; în membrul din stînga al egalității propuse, clasificăm traseele în funcție de „strada" folosită, și numărăm separat traseele din fiecare clasă ; în membrul din dreapta, numărăm la un loc toate traseele în cauză.

Ar fi de dorit să dăm aici, în paralel, și cealaltă demonstrație, cea analitică, din 3.9 și ex. 3.36, în care formula este dedusă din examinarea produsului a două serii ; operația aceasta este mai puțin imediată, așa că rămîne o lacună. Ar fi, de asemenea, de dorit să găsim vreo corelație (algebrică ?) între cele două formule similare, cea obținută aici și cea din ex. 3.36 ; aceasta este o altă lacună.

3.38. Al n-lea număr triunghiular este

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2} = \binom{n + 1}{2}$$

Numerele triunghiulare 1, 3, 6, 10, ... formează al doilea „bulevard" al triunghiului lui Pascal.

3.39. Al n-lea număr piramidal este

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n + 1}{2} = \binom{n + 2}{3} = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6}.$$

Am folosit aici ex. 3.34. Numărul piramidal 1, 4, 10, 20, ...formează al treilea „bulevard" al triunghiului lui Pascal.

Remarcă. Expresiile pentru numerele triunghiulare și piramidale erau cunoscute încă înainte de formula generală explicită pentru coeficienții binomiali (3.7) și s-ar putea să fi condus, prin inducție, la descoperirea formulei generale.

3.40. $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3.41. Traseele minime, în zigzag, care unesc vîrful cu punctul reprezentat de numerele

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$$

(numărul total de cvartale) și

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_k$$

(cvartalele străbătute de la nord-vest spre sud-est) care, însă, sînt supuse la restricția că trebuie să treacă prin $(h-1)$ puncte intermediare date, reprezentate, în mod analog de numerele

$$\begin{array}{ll} n_1 & \text{și} \quad r_1 \\ n_1+n_2 & \text{și} \quad r_1+r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ n_1+n_2+\ldots+n_{h-1} & \text{și} \quad r_1+r_2+\ldots+r_{h-1}. \end{array}$$

3.42. (*a*) Fig. 3.10 reprezintă *două* trasee care aparțin mulțimii, dar nu și submulțimii (1). Ele au același punct inițial A, același punct final C și trec prin același punct intermediar B care se află pe linia de simetrie și împarte fiecare traseu în două arce, AB și BC. Arcele AB sînt simetrice față de axa de simetrie și nici unul din ele nu are un punct *interior* situat pe această axă; arcele BC coincid. Dintre aceste două arce, unul aparține submulțimii (2) iar celălalt submulțimii (3). Invers, orice traseu care aparține acestor submulțimi poate fi „cuplat" cu un alt traseu, în modul prezentat în fig. 3.10: căutăm „al doilea" punct comun B al traseului cu axa de simetrie (vîrful A este „primul" asemenea punct comun). Această „cuplare" totdeauna posibilă stabilește o corespondență biunivocă între submulțimile (2) și (3).

(*b*) Am putea „cupla" traseele și în alt mod: în timp ce în fig. 3.10 cele două arce AB sînt simetrice în raport cu dreapta care trece prin punctele A și B, în fig. 3.11 ele sînt simetrice în raport cu punctul median al segmentului AB.

(*c*) Din (*a*) și (*b*) rezultă că

$$\binom{n}{r} = N + 2\binom{n-1}{r}$$

Folosind mai întîi prima, apoi a doua din următoarele două relații

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}, \quad \binom{n-1}{r} = \frac{n-r}{n}\binom{n}{r}$$

obținem două expresii diferite

$$N = \binom{n-1}{r-1} - \binom{n-1}{r} = \frac{2r-n}{n}\binom{n}{r}.$$

Am dedus cele de mai sus presupunînd că $2r > n$. Putem însă elimina ușor această restricție folosind simetria triunghiului lui Pascal.

3.43. *Prin inducție matematică*: Verificați rezultatul prezis pentru $n = 1, 2, 3$, $(m = 0,1)$ examinînd figura.

De la $2m$, *la* $2m+1$. Ori de cîte ori construim un traseu de lungime $2m$ care nu are nici un alt punct în comun cu axa de simetrie în afară de vîrful triunghiului, obținem două trasee de lungime $2m+1$ și de aceeași natură. Admițînd rezultatul prevăzut pentru valoarea $n = 2m$, obținem, astfel, pentru $n = m+1$

$$2\binom{2m}{m}$$

ca valoare a numărului căutat.

De la $2m+1$ *la* $2m+2$. Cînd construim un traseu de lungime $2m+1$ de tipul specificat (vezi mai sus), în cele mai multe cazuri obţinem două trasee de lungime $2m+2$ de aceeaşi natură : fac excepţie traseele care se termină în cele două puncte de pe baza $(2m+1)$ proxime axei de simetrie. Vizualizînd acest caz, admiţînd rezultatul prevăzut pentru $n = 2m+1$ şi folosind cazul particular potrivit din ex. 3.42, obţinem, pentru $n = 2m+2$,

$$4\binom{2m}{m} - 2\frac{1}{2m+1}\binom{2m+1}{m+1}$$

ca valoare a numărului căutat, expresie care, după cîteva transformări convenabile, se dovedeşte egală cu

$$\binom{2m+2}{m+1}$$

Fără inducţie matematică. Folosim prima expresie pentru N obţinută rezolvînd ex. 3.42, punctul (c), şi efectuăm suma de mai jos pentru toate valorile r care satisfac $n/2 < r \leqslant n$:

$$2\Sigma\left[\binom{n-1}{r-1} - \binom{n-1}{r}\right]$$

este valoarea numărului căutat şi dă rezultatul prevăzut dacă deosebim cu grijă cazurile $n = 2m$ şi $n = 2m+1$.

3.44.

0, 1, 6, 21, 50, 90, 126, 141, 126, ...

0, 1, 7, 28, 77, 161, 266, 357, 393, 357, ...

Cu excepţia numărului 1,393 şi 1, toate celelalte numere de pe baza a 7-a sînt divizibile cu 7.

3.45. Analog cu ex. 3.1.

3.46. Analog cu ex. 3.31.

3.47. Analog cu ex. 3.32.

3.48. Analog cu ex. 3.33.

3.49. Analog cu 3.9 ; pentru o generalizare mai largă, analog cu ex. 3.36.

3.50. Liniile înclinate de la nord-est la sud-vest

1, 1, 1, 1, 1, ...

1, 2, 3, 4, 5, ...

1, 3, 6, 10, 15, ...

sînt şi „bulevarde" ale triunghiului lui Pascal.

3.51. Simetria, vizibilă în primele rînduri, se păstrează; este suficient să scriem cele două baze (a 7-a și a 8-a) pînă la mijloc

$$\frac{1}{8}\quad\frac{1}{56}\quad\frac{1}{168}\quad\frac{1}{280}$$

$$\frac{1}{9}\quad\frac{1}{72}\quad\frac{1}{252}\quad\frac{1}{504}\quad\frac{1}{630}$$

3.52. Pe o „bază" dată a triunghiului armonic, numitorii sînt proporționali cu coeficienții binomiali, iar factorul de proporționalitate apare la numitorii termenilor extremi. Mai explicit, în poziții corespondente în cele două triunghiuri găsim numerele

$$\binom{n}{r} \qquad\qquad \frac{1}{(n+1)\binom{n}{r}}$$

Pascal Leibniz

Demonstrație. Pentru $r=0$, condiția la limită a triunghiului lui Pascal este verificată. Pentru a-i verifica și formula de recurență, folosim mai întîi formula de recurență a coeficienților binomiali, apoi formula explicită a acestora:

$$\frac{1}{(n+1)\binom{n}{r-1}}+\frac{1}{(n+1)\binom{n}{r}}=\frac{\binom{n+1}{r}}{(n+1)\binom{n}{r-1}\binom{n}{r}}$$

$$=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}\cdot\frac{(r-1)!\,(n-r+1)!}{n!}\cdot\frac{r!\,(n-r)!}{n!}$$

$$=\frac{(r-1)!\,(n-r)!}{n!}=\frac{1}{n\binom{n-1}{r-1}}.$$

3.53. În membrul din stînga figurează termenul inițial al unui „bulevard" din fig. 3.13, iar în membrul din dreapta suma tuturor termenilor de pe bulevardul imediat următor. Pentru o demonstrație, vezi rezolvarea ex. 3.54.

3.54. Folosim formula de recurență a triunghiului lui Leibniz

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{1}{60}$$

$$\frac{1}{30}-\frac{1}{42}=\frac{1}{105}$$

. . . . . .

Adunăm! (Termenii situați „foarte departe" pe bulevardul al doilea sînt „neglijabili".) De la acest caz particular reprezentativ „putem trece ușor la propoziția generală: În triunghiul lui Leibniz, suma tuturor termenilor (sînt o infinitate!) de pe „bulevardul" care începe cu un anumit termen inițial și se îndreaptă spre sud-est este egală cu vecinul de la nord-vest al termenului inițial. Schimbînd termenii

„Leibniz" „o infinitate" „sud-vest" „nord-vest"

cu termenii

„Pascal" „număr finit" „nord-est" „sud-est"

trecem de la rezultatul de aici la cel din ex. 3.34, fapt în care vedem o altă manifestare a „analogiei prin contrast" observate în ex. 3.51.

3.55. Ținînd seama de formula explicită pentru termenul general al triunghiului armonic (ex. 3.52), linia numărul $(r-1)$ din enunț diferă numai printr-un factor de linia corespunzătoare din ex. 3.53, pentru $r = 2, 3, \ldots$, și suma ei este

$$\frac{1}{(r-1)!\,(r-1)}.$$

3.57. Produsul este egal cu 1. Cititorul care are cunoștințe de teoria seriilor infinite interpretează ecuația

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = (1-x)^{-1}$$

într-un sens mai puțin formal, știe condițiile în care ea are acea semnificație și cunoaște și o demonstrație satisfăcătoare.

3.58. $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; ex. 3.57. este un caz particular.

3.59. Fiecare serie corespunde unui bulevard din triunghiul lui Pascal. Pentru prima serie, vezi ex. 3.57. Prin aplicarea repetată a ex. 3.58 și a ex. 3.34, găsim că

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = (1 + x + x^2 + \ldots)^2$$

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots = (1 + x + x^2 + \ldots)^3$$

și, în general,

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} x + \binom{r+2}{r} x^2 + \ldots + \binom{r+n}{r} x^n + \ldots$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots)^{r+1} = (1-x)^{-r-1}.$$

Pentru o demonstrație formală, folosiți inducția matematică.

3.60. Calculați în două moduri distincte coeficientul lui x^n în produsul

$$(1-x)^{-r-1}(1-x)^{-s-1}.$$

Calea este cu totul analogă procedeului analitic de rezolvare a ex. 3.36, care trimite la 3.9(3).

3.61. 1, 0, 0, 0, respectiv, fapt care poate fi considerat drept o confirmare a conjecturii N.

3.62. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{4}{81}, -\frac{7}{243}$, respectiv, valori calculate prin două procedee esențial diferite, fapt care poate fi considerat drept o altă confirmare a conjecturii N.

3.63. $(1+x)^{1/2}(1+x)^{1/2} =$

$$= \left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \dots\right)\left(1 + \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{4x^3}{81} - \frac{7x^4}{243} + \dots\right)$$

$$= 1 + x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \dots,$$

ceea ce constituie o altă confirmare a conjecturii N.

3.64.

$$1 + \frac{-1}{1}x + \frac{(-1)(-2)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$= [1 - (-x)]^{-1} = (1+x)^{-1}$$

în virtutea ex. 3.57, ceea ce confirmă conjectura N pe o cu totul altă cale N-ar putea fi oare deduse din conjectura N și alte serii din ex. 3.59 ?

3.65.

$$\binom{r-1-x}{r} = \frac{r-1-x}{1} \cdot \frac{r-2-x}{2} \dots \frac{-x}{r}$$

$$= (-1)^r \frac{x}{1} \dots \frac{x-r+2}{r-1} \cdot \frac{x-r+1}{r}.$$

3.66. Conform conjecturii N, coeficientul lui x^n în dezvoltarea lui $(1-x)^{-r-1}$ este $\binom{-r-1}{n} = (-1)^n \binom{n+r}{n} = (-1)^n \binom{r+n}{r}$; am folosit mai întîi ex. 3.65(II), iar apoi am presupus că r este un întreg nenegativ și am folosit ex. 3.31. Înlocuind pe x cu $(-x)$, și deci, pe x^n cu $(-1)^n x^n$, obținem rezultatul general din ex. 3.59, ceea ce demonstrează conjectura N într-un caz particular foarte cuprinzător : pentru valori întregi negative ale lui a.

3.67. Din

$$\left[\binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \dots + \binom{a}{r}x^r + \dots\right]\left[\binom{b}{0} + \dots \binom{b}{r-1}x^{r-1} + \binom{b}{r}x^r + \dots\right]$$

$$= \binom{a+b}{0} + \binom{a+b}{1}x + \dots \binom{a+b}{r}x^r + \dots$$

deducem (vezi ex. 3.56) că

$$(*)\quad \binom{a}{0}\binom{b}{r} + \binom{a}{1}\binom{b}{r-1} + \ldots + \binom{a}{r}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{r}.$$

Dacă punem $a = m$ şi $b = n$, regăsim rezultatul din ex. 3.36, dar aici domeniul este altul : m şi n erau limitaţi la valori întregi nenegative, în timp ce a şi b sînt numere arbitrare, fără nici o restricţie.

3.68. Relaţia (*), dedusă din conjectura N, nu este demonstrată : ea nu este decît o conjectură.

Cazul particular al relaţiei (*) în care a şi b sînt întregi pozitivi a fost demonstrat în ex. 3.36. De fapt, ţinînd seama de rezolvarea ex. 3.66, cazul particular al relaţiei (*) în care a şi b sînt întregi negativi este echivalent cu rezultatul ex. 3.57, aşa că şi el este demonstrat. (De remarcat că (*) constituie astfel corelaţia dorită între ex. 3.36 şi ex. 3.37 ; vezi observaţia de la sfîrşitul rezolvării ex. 3.37.)

N-am putea oare folosi ex. 3.36, care este un caz particular cuprinzător al relaţiei dorite (*), ca un „punct de sprijin" spre o demonstrare completă a relaţiei (*) ? (Ba da — dacă cunoaştem propoziţiile de algebră relevante : dacă un polinom în două variabile x şi y se anulează pentru toate valorile întregi şi pozitive ale lui x şi y, polinomul trebuie să fie identic nul.)

Notăm

$$\binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{n}x^n + \ldots = f_a(x).$$

Relaţia (*) este echivalentă, în esenţă, cu relaţia

$$f_a(x)\,f_b(x) = f_{a+b}(x).$$

Să admitem acum relaţia (*) ; rezultă

$$f_a(x)\,f_a(x)\,f_a(x) = f_{2a}(x)\,f_a(x) = f_{3a}(x)$$

şi, în general,

$$[f_a(x)]^n = f_{na}(x)$$

pentru orice n întreg pozitiv. Fie m un întreg (pozitiv sau negativ) ; deoarece am verificat deja conjectura N pentru valori întregi pozitive şi negative ale lui a (vezi ex. 3.1 şi respectiv, ex. 3.66), conchidem că

$$[f_{m/n}(x)]^n = f_m(x) = (1+x)^m$$

$$f_{m/n}(x) = (1+x)^{m/n},$$

aşa că *am dedus conjectura N din relaţia* (*), pentru toate *valorile raţionale ale exponentului a.*

(De fapt, ultimul pas este destul de riscant; extrăgînd rădăcina de ordinul n, n-am specificat despre care din valorile posibile ale acestei rădăcini este vorba, şi prin aceasta am lăsat o lacună pe care este greu s-o umplem dacă rămînem la punctul de vedere pur formal din ex. 3.36. Dar am descoperit totuşi elementele esenţiale pentru construirea unei demonstraţii complete. Un secol şi jumătate după scrisoarea lui Newton, şi anume în 1826, a apărut un memoriu al marelui matematician norvegian Niels Henrik Abel în care acesta discuta convergenţa şi valoarea seriei binomiale, inclusiv pentru valorile complexe ale lui x şi a, şi făcea prin aceasta un mare pas înainte în teoria generală a seriilor infinite; vezi *Opere complete* publicate în 1881, vol. 1, p. 219—250.)

3.69. Găsim valorile 1, 2, 6, 20 pe axa de simetrie a triunghiului lui Pascal. Explicaţie: coeficientul lui x^n este

$$(-4)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} = 4^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\,.\,2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{n!\,n!}$$

$$= \binom{2n}{n}.$$

3.70.

$a_0 u_0 = b_0$

$a_0^2 u_1 = a_0 b_1 - a_1 b_0$

$a_0^3 u_2 = a_0^2 b_2 - a_0 a_1 b_1 + (a_1^2 - a_0 a_2) b_0$

$a_0^4 u_3 = a_0^3 b_3 - a_0^2 a_1 b_2 + (a_0 a_1^2 - a_0^2 a_2) b_1 - (a_1^3 - 2a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3)\, b_0$

3.71. Cazurile $n = 0, 1, 2, 3$ tratate în ex. 3.70 sugerează că $a_0^{n+1} u_n$ este un polinom în a-uri şi b-uri, în care toţi termenii au

(1) acelaşi grad n în a-uri

(2) acelaşi grad 1 în b-uri

(3) aceeaşi pondere n în a-uri şi b-uri luate împreună.

Justificare:

(1) Dacă înlocuim a_n cu $a_n c$ (pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$, cu o valoare c arbitrară), u_n trebuie înlocuit cu $u_n c^{-1}$.

(2) Dacă înlocuim b_n cu $b_n c$, u_n trebuie înlocuit cu $u_n c$.

(3) Dacă înlocuim, simultan, pe a_n cu $a_n c^n$ şi pe b_n cu $b_n c^n$ (ca rezultat al înlocuirii lui x cu cx), atunci şi u_n trebuie înlocuit cu $u_n c^n$.

3.72. $u_n = b_n - b_{n-1}$: această este valoarea care trebuie să rezulte dacă, după ce l-am exprimat pe u_n în funcţie de a-uri şi b-uri, punem $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 1$. Acesta este un test preţios; aplicaţi-l pentru $n = 0, 1, 2, 3$ (ex. 3.70).

3.73. $u_n = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ (vezi ex. 3.58) : aceasta este valoarea care trebuie să rezulte dacă, după ce l-am exprimat pe u_n în funcție de a-uri și b-uri ; punem $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = 0$. Acesta este un test prețios; aplicați-l pentru $n = 0, 1, 2, 3$ (ex. 3.70) .

3.74.

$$1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{40} - \frac{x^3}{336} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n)\,(2n+1)} + \ldots$$

(Cf. *MRP*, vol. I, p. 109, ex. 2).

3.75.

$$\begin{aligned}
&a_1 u_1 = 1 \\
-\,&a_1^3 u_2 = a_2 \\
&a_1^5 u_3 = 2a_2^2 - a_1 a_3 \\
-\,&a_1^7 u_4 = 5a_2^3 - 5a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_4 \\
&a_1^9 u_5 = 14a_2^4 - 21a_1 a_2^2 a_3 + 3a_1^2 a_3^2 + 6a_1^2 a_2 a_4 - a_1^3 a_5 .
\end{aligned}$$

3.76. Cazurile tratate în ex. 3.75 sugerează că $a_1^{2n-1} u_n$ este un polinom în a-uri în care, fiecare termen

1) este de grad $n - 1$ și

(2) are ponderea $2n-2$.

Justificare :

(1) Dacă a_n este înlocuit cu $a_n c$ (ca un rezultat al înlocuirii lui x cu $c^{-1}x$), atunci u_n trebuie să fie înlocuit cu $u_n c^{-n}$.

(2) Dacă a_n este înlocuit cu $a_n c^n$ (ca un rezultat al înlocuirii lui y cu cy), atunci u_n trebuie să fie înlocuit cu $u_n c^{-1}$.

3.77. $x = \dfrac{y}{1-y}$, $y = \dfrac{x}{1+x}$ așa că

$$y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots .$$

Așadar, dacă punem $a_n = 1$ în ex. 3.75, trebuie să obținem $u_n = (-1)^{n-1}$. Acesta este un test prețios; aplicați-l pentru $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

3.78. $1 - 4x = (1+y)^{-2}$ sau

$$y = -1 + (1-4x)^{-1/2} = 2x + 6x^2 + \ldots + \binom{2n}{n} x^n + \ldots \text{ (vezi ex.3.69).}$$

3.79. $y = -1 + (1 + 4ax)^{1/2}(2a)^{-1}$

$$= x - ax^2 + 2a^2x^3 - 5a^3x^4 + 14a^4x^5 - \ldots$$

Coeficientul lui x^n este

$$\frac{(4a)^n}{2a}\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}a^{n-1}}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

(calculul este similar celui din ex. 3.69) și u_n din ex. 3.75 trebuie să se reducă la această valoare dacă $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $a_3 = a_4 = \ldots = 0$. (Cf. *MRP*, vol. I, pp.128—129, ex. 7, 8, 9.)

3.80. $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \ldots$

3.81. $u_0 = u_1 = u_2 = 1$, $u_3 = \frac{4}{3}$, $u_4 = \frac{7}{6}$.

3.82. Inducție matematică: Afirmația este adevărată pentru $n = 3$. Presupunem, în continuare, că $n > 3$ și că afirmația a fost demonstrată pentru coeficienții anteriori lui u_n, așa că

$$u_{n-1} > 1, \quad u_{n-2} > 1, \ldots, u_3 > 1.$$

Știm că $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ și prin, urmare,

$$nu_n = u_0u_{n-1} + u_1u_{n-2} + \ldots + u_{n-1}u_0 > n$$

3.83. Punem

$$y = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots + u_nx^n + \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \cdot 1u_2 + \ldots + n(n-1)u_nx^{n-2} + \ldots$$

Din ecuația diferențială obținem

$$n(n-1)u_n = -u_{n-2}$$

Din condiția inițială obținem

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0$$

În fine, pentru $m = 1, 2, 3, \ldots$, avem

$$u_{2m} = \frac{(-1)^m}{2m!}, \quad u_{2m-1} = 0$$

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

3.84. $B_n = B_{n-5} + A_n$

$C_n = C_{n-10} + B_n$

$D_n = D_{n-25} + C_n$

$E_n = E_{n-50} + D_n$.

Ultima ecuație dă, pentru $n = 100$,

$$E_{100} = E_{50} + D_{100}$$

iar ecuația precedentă dă, pentru $n = 20$,

$$D_{20} = C_{20}$$

fiindcă $D_{-5} = 0$: într-adevăr oricare dintre mărimile introduse care apar cu indice negativ trebuie considerat — pe drept cuvînt — egal cu zero. Aceste exemple ar trebui să fie suficiente pentru a ilustra caracteristica principală a sistemului de ecuații obținut: putem calcula oricare din necunoscute (cum a fost E_{100}), dacă au fost calculate anterior o anumită necunoscută de același tip dar cu indice mai mic (cum a fost E_{50}) și o altă necunoscută de un tip anterior (notată cu litera anterioară în alfabet, cum a fost D_{100}). (Există cazuri în care este nevoie numai de *o* singură necunoscută calculată anterior, vezi D_{20}. În alte cazuri, avem nevoie de unele dintre „valorile la limită" pe care le știam înainte de a scrie ecuațiile: mă refer la B_0, C_0, D_0, E_0 și A_n, pentru $n=0, 1, 2, 3, \ldots$). Pe scurt, calculăm necunoscutele recurgînd la indici mai mici sau la litere anterioare în alfabet și, eventual, la valorile la limită. Diferența de notație nu trebuie să ne ascundă analogia dintre calculul de aici și determinarea coeficienților binomiali prin formula de recurență și condiția la limită; vezi 3.6(2).)

Ar fi bine ca cititorul să-și alcătuiască o schemă de calcul convenabilă, pe care o va putea verifica cu ajutorul valorilor următoare:

$$B_{10} = 3, \quad C_{25} = 12, \quad D_{50} = 49, \quad E_{100} = 292.$$

(Pentru mai multe detalii, și pentru o interpretare concretă a problemei, vezi *CRP*, pp. 230—231, ex. 20 și „American Mathematical Montly", 63, 1956, pp. 689—697.)

3.85. Inducție matematică: admițînd forma propusă pentru derivata $y^{(n)}$, găsim, derivînd încă o dată,

$$y^{(n+1)} = (-1)^{n+1}(n+1)!\, x^{-n-2} \ln x + \\ + (-1)^n x^{-n-2}[n! + (n+1)c_n]$$

care este de forma dorită dacă

$$c_{n+1} = n! + (n+1)c_n.$$

Scriind această relație sub forma

$$\frac{c_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c_n}{n!} + \frac{1}{n+1}$$

și folosind $c_1 = 1$, găsim

$$c_n = n!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

3.86. O problemă foarte înrudită este cea a sumării unei progesii geometrice: în cele ce urmează vom folosi atît rezultatul sumării, cît și metoda de obținere a acelei sume.

Notăm cu S suma cerută. Atunci

$$(1 - x)\, S = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} - nx^n$$

$$= \frac{1 - x^n}{1 - x} - nx^n.$$

De aici, expresia compactă cerută:

$$S = \frac{1 - (n + 1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}.$$

3.87. Folosim metoda, notația și rezultatul de la ex. 3.86: notăm cu T suma cerută și considerăm

$$(1 - x)\, T = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots + (2n - 1)x^{n-1} - n^2x^n$$
$$= 2S - (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) - n^2x^n$$

așa că, după un calcul algebric de rutină, găsim

$$T = \frac{1 + x - (n + 1)^2x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1 - x)^3}.$$

3.88. Urmînd procedeul din ex. 3.86 și 3.87, am putea găsi o expresie pentru

$$1^k + 2^kx + 3^kx^2 + \ldots + n^kx^{n-1}$$

prin recurență, adică reducînd cazul k la cazurile $k - 1$, $k - 2$, ..., 2, 1, 0.

3.89. Inducție matematică. Afirmația este evident adevărată pentru $n = 1$, și

$$\frac{a_n(n + \alpha) - a_1(1 + \beta)}{\alpha - \beta} + a_{n+1} = \frac{a_{n+1}(n + 1 + \beta) - a_1(1 + \beta)}{\alpha - \beta} + a_{n+1}.$$

3.90. Aplicăm ex. 3.89 cu

$$a_1 = \frac{p}{q}, \quad \alpha = p, \quad \beta = q - 1.$$

Rezultă că suma cerută este egală cu

$$\frac{p}{p - q + 1}\left(\frac{p + 1}{q}\,\frac{p + 2}{q + 1} \ldots \frac{p + n}{q + n - 1} - 1\right).$$

3.91. (1) 8, $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{3}$, 6.

(2) $C_n = 2n \operatorname{tg}(\pi/n)$, $I_n = 2n \sin(\pi/n)$.

De aici, o verificare directă, folosind identități trigonometrice binecunoscute.

3.92. Pentru alte exemple de inducție matematică, vezi *CRP*, pp. 120—126 și *MRP*, vol. I, pp. 108—120. Probleme corelate cu cele din Partea a doua și Partea a treia

pot fi găsite în cărţile de calculul probabilităţilor sau de analiză combinatorie. Probleme corelate cu cele din Partea a patra sau cu ex. 3.53—3.55 pot fi găsite în cărţile de serii infinite sau de variabile complexe. Problemele strîns legate de ex. 3.81, 3.82 şi 3.83 acoperă un capitol întins din teoria ecuaţiilor diferenţiale.

Există nenumărate surse de teme pentru alte exemple de studiat. Iată numai un exemplu: coeficienţii polinomiali (cf. ex. 3.28, 3.29, 3.30). Coeficienţii dezvoltării lui

$$(a + b + c)^n$$

pentru $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ pot fi asociaţi cu nodurile unei reţele într-un octant al spaţiului, aşa cum coeficienţii lui

$$(a + b)^n$$

sînt asociaţi, în triunghiul lui Pascal, cu nodurile unei reţele într-un cvadrant al planului. Care sînt, în cazul dispunerii în spaţiu, analogele condiţiei la limită, al formulei de recurenţă, al „bulevardelor", „străzilor" şi „bazelor" din triunghiul lui Pascal, al ex. 3.31—3.39? Care este legătura cu ex. 3.44—3.50? N-am vorbit încă nimic despre proprietăţile numerice teoretice ale coeficienţilor binomiali, sau polinomiali. Şi aşa mai departe.

Nu implică rezolvare: 3.56.

CAPITOLUL 4

4.1. Fie A vîrful piramidei opuse („apexul" piramidei). Împărţim baza piramidei în n triunghiuri de arii, respectiv

$$B_1, B_2, \ldots, B_n.$$

Fiecare dintre aceste triunghiuri formează baza unui tetraedru care are apexul A şi înălţimea h; piramida este subdivizată (prin plane care trec prin A) în aceste n tetraedre de volume, respectiv

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_n$$

Evident

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_n = B$$
$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V.$$

Presupunînd că formula cerută pentru volum a fost demonstrată pentru cazul particular al tetraedrului, avem

$$V_1 = \frac{B_1 h}{3}, \quad V_2 = \frac{B_2 h}{3}, \quad \ldots, \quad V_n = \frac{B_n h}{3}.$$

Adunarea (superpoziţia!) acestor relaţii particulare dă relaţia generală

$$V = \frac{Bh}{3}.$$

4.2. Un polinom de grad k este de forma

$$f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k,$$

unde $a_0 \neq 0$. Înlocuim succesiv pe x cu 1, 2, 3, ..., n şi adunăm: obţinem, folosind notaţia din ex. 3.11,

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = a_0S_k(n) + a_1S_{k-1}(n) + \ldots + a_kS_0(n).$$

Membrul din dreapta este, ţinînd seama de rezultatul ex. 3.3, un polinom de grad $k + 1$ în n.

4.3. Putem scrie rezultatul din ex. 3.34 sub forma

$$\binom{0}{r} + \binom{1}{r} + \binom{2}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

[vezi ex. 3.65 (III)]. Admiţînd că am rezolvat ex. 4.4, scriem polinomul considerat sub forma

$$f(x) = b_0\binom{x}{k} + b_1\binom{x}{k-1} + \ldots + b_k\binom{x}{0}$$

în care (vezi rezolvarea ex. 4.4), $b_0 = k!a_0 \neq 0$. Înlocuim succesiv pe x cu 1, 2, 3, ..., n şi adunăm: obţinem, cu ajutorul rezultatului ex. 3.34 reformulat mai sus.

$$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = b_0\binom{n+1}{k+1} + b_1\binom{n+1}{k} + \ldots + b_k\binom{n+1}{1}.$$

Membrul din dreapta este un polinom de grad $k + 1$ în n.

4.4. Comparînd între ei coeficienţii lui x^k (puterea cea mai mare a lui x care figurează în expresia dată) din cei doi membrii ai identităţii propuse, găsim

$$a_0 = \frac{b_0}{k!}.$$

Atunci, din identitatea propusă rezultă

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k - k!\,a_0\binom{x}{k} = b_1\binom{x}{k-1} + \ldots + b_k\binom{x}{0}$$

comparînd între ei coeficienţii lui x^{k-1} din ambii membri, exprimăm pe b_1 în funcţie de a_0 şi a_1, şi continuînd în felul acesta, determinăm succesiv pe b_0, b_1, b_2, ..., b_k prin recurenţă.

4.5. Trebuie să determinăm patru numere b_0, b_1, b_2 şi b_3 astfel încît

$$x^3 = b_0\binom{x}{3} + b_1\binom{x}{2} + b_2\binom{x}{1} + b_3\binom{x}{0}$$

să fie o identitate în x. Aceasta înseamnă

$$x^3 = \frac{b_0}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x) + \frac{b_1}{2}(x^2 - x) + b_2 x + b_3.$$

Compararea coeficienților lui x^3, x^2 x^1 și x^0 dă respectiv ecuațiile

$$\begin{aligned} 1 &= b_0/6 \\ 0 &= -b_0/2 + b_1/2 \\ 0 &= b_0/3 - b_1/2 + b_2 \\ 0 &= b_3 \end{aligned}$$

din care deducem

$$b_0 = 6, \quad b_1 = 6, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0.$$

De aici, prin procedeul de la ex. 4.3 ($k = 3$) și operații algebrice de rutină

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}.$$

4.6. Așa cum s-a demonstrat în ex. 4.3, există cinci constante c_0, c_1, c_2, c_3 și c_4 în așa fel încît egalitatea

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = c_0 n^4 + c_1 n^3 + c_2 n^2 + c_3 n + c_4$$

să fie satisfăcută pentru toate valorile întregi, pozitive ale lui n. Punînd succesiv $n = 1, 2, 3, 4$ și 5, obținem un sistem de cinci ecuații pentru cele cinci necunoscute c_0, c_1, c_2, c_3 și c_4. Rezolvînd aceste ecuații obținem

$$c_0 = \frac{1}{4}, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{4}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0,$$

adică obținem același rezultat ca în ex. 4.5, dar cu mai multă bătaie de cap.

4.7. Ex. 4.3 dă o nouă demonstrație a rezultatului ex. 3.3, cu excepția unui punct: procedeul din ex. 4.3 lasă nedeterminat coeficientul lui n^{k+1} din expresia lui $S_k(n)$. (O mică observație suplimentară va da însă și acest coeficient.)

4.8. Da: o dreaptă este reprezentată de o ecuație de forma

$$y = ax + b$$

al cărei membru din dreapta este un polinom de grad ≤ 1.

4.9. Dreapta care coincide cu axa x apare intuitiv ca fiind curba de interpolare cea mai simplă; ea corespunde polinomului identic nul. Orice *alt* polinom de interpolare este, în mod necesar, de grad mai înalt, și anume de grad cel puțin n fiindcă are n zerouri distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

4.10. Polinomul de interpolare al lui Lagrange, dat de formula finală din 4.3, este de grad $\leqslant n - 1$; adaug că este *singurul* polinom de interpolare de grad atît de mic. Într-adevăr, dacă ar exista două polinoame, ambele de grade $\leqslant n - 1$, care iau aceleași valori în cele n abscise date, atunci diferența lor ar avea n zerouri distincte, adică mai multe decît ar permite gradul polinomului-diferență, ceea ce nu se poate decît dacă această diferență este identic nulă. Deoarece polinomul de interpolare al lui Lagrange este singurul de grad $\leqslant n - 1$, înseamnă că el *este* polinomul de interpolare cu gradul minim posibil.

4.12. (*a*) Evident, datorită regulii

$$(c_1y_1 + c_2y_2)' = c_1y_1' + c_2y_2'$$

pentru c_1 și c_2 constante.

(*b*) $y = e^{rx}$ este o soluție a ecuației diferențiale dacă și numai dacă r este o rădăcină a ecuației algebrice în r.

$$r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

(*c*) Dacă ecuația de la punctul (*b*) are d rădăcini *distincte* $r_1, r_2, \ldots, r_d$ și $c_1, c_2, \ldots$ c_d sînt niște constante arbitrare, atunci

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \ldots + c_de^{r_dx}$$

este o soluție a ecuației diferențiale și (așa cum se poate demonstra) este soluția cea mai generală atunci cînd $d = n$.

4.13. Ecuația în r este

$$r^2 + 1 = 0$$

deci soluția generală a ecuației diferențiale este

$$y = c_1e^{ix} + c_2e^{-ix}.$$

Condițiile inițiale dau ecuațiile

$$c_1 + c_2 = 1, \qquad ic_1 - ic_2 = 0$$

care determină pe c_1 și c_2, și prin urmare soluția particulară cerută este

$$y = (e^{ix} + e^{-ix})/2.$$

De remarcat că și $y = \cos x$ satisface atît ecuația diferențială cît și condițiile la limită (vezi de asemenea, ex. 3.83).

4.14. (a) Evident.

(*b*) $y_k = r^k$ este o soluție a ecuației cu diferențe dacă și numai dacă r este o rădăcină a ecuației algebrice date în ex. 4.12(b).

(*c*) Dacă ecuaţia din ex. 4.12(*b*) are d rădăcini *distincte* $r_1, r_2, \ldots, r_d$ şi $c_1, c_2, \ldots, c_d$ sînt constante arbitrare, atunci

$$y_k = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k + \ldots + c_d r_d^k$$

este o soluţie a ecuaţiei cu diferenţe şi (aşa cum se poate demonstra) este soluţia cea mai generală atunci cînd $d = n$.

4.15. Ecuaţia în r este

$$r^2 - r - 1 = 0$$

aşa că soluţia generală a ecuaţiei cu diferenţe este

$$y_k = c_1\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k + c_2\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

Aceasta dă, pentru $k = 0$ şi $k = 1$ (condiţiile iniţiale) ecuaţiile

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$$

care determină pe c_1 şi c_2 şi, în felul acesta, expresia căutată a numerelor lui Fibonacci

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k\right].$$

4.16. Dacă mişcarea reală poate fi obţinută prin *superpoziţia* celor trei mişcări virtuale, coordonatele punctului mobil la momentul t sînt

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = tv \cos \alpha$$

$$y = y_1 + y_2 + y_3 = tv \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2.$$

Eliminarea lui t dă traiectoria proiectilului

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}$$

care este o *parabolă*.

4.18. Există două necunoscute: baza şi înălţimea tetraedrului (vezi fig. 4.5a).

4.19. Fie

V — volumul tetraedrului,
B — baza lui,
H — înălţimea lui,
h — înălţimea bazei sale, perpendiculară pe muchia de lungime dată, a.

Atunci

$$V = \frac{BH}{3}, \quad B = \frac{ah}{2}$$

şi, deci,

$$V = \frac{ahH}{\quad}.$$

Dar, nici h nici H nu sînt date.

4.20. Proiecţia ortogonală a tetraedrului nostru (din ex. 4.17) pe un plan perpendicular pe segmentul de lungime b şi care trece prin una din extremităţile acestuia este un pătrat. Diagonalele acestui pătrat au lungimea a, aria lui este $a^2/2$, iar pătratul ca atare este (vezi fig. 4.5b) baza unei prisme drepte de înălţime b. Această prismă (vezi fig. 4.5b) este împărţită în cinci tetraedre (care nu se întrepătrund); tetraedrul nostru din ex. 4.17 este unul din ele (volumul lui l-am notat cu V); celelalte patru sînt tetraedre identice, baza fiecăruia este un triunghi dreptunghic isoscel de arie $a^2/4$, iar înălţimea fiecăruia este b. Prin urmare

$$a^2b/2 = V + 4a^2b/12$$

$$V = a^2b/6.$$

4.21. Planul care trece printr-o muchie de lungime a şi punctul median de pe muchia opusă este un plan de simetrie pentru tetraedrul nostru şi îl împarte în două tetraedre identice (vezi fig. 4.5c) a căror bază comună (un triunghi isoscel) are, evident, aria $ab/2$ şi a cărei înălţime este $a/2$. Prin urmare, volumul căutat este

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{ab}{2} = \frac{a^2b}{6}.$$

(Există două asemenea plane de simetrie care, împreună, împart tetraedrul nostru în patru tetraedre identice; faptul acesta oferă o altă cale de a ajunge la soluţie, dar nu prea diferită de cea precedentă).

4.22. Putem considera tetraedrul nostru drept un prismoid extrem (un prismoid degenerat, un prismoid-limită) cu înălţimea b şi cu ambele baze reduse la cîte un segment de lungime a; secţiunea lui mediană este un pătrat cu latura $a/2$ (vezi fig 4.5d) De aici

$$h = b, \qquad L = 0, \qquad M = a^2/4, \qquad N = 0$$

şi formula prismoidului dă $V = a^2b/6$.

4.23. Dacă expresia găsită pentru V în ex. 4.19 coincide cu rezultatul dedus pe trei căi distincte în ex. 4.20, 4.21 şi 4.22, trebuie să avem

$$Hh = ab.$$

Dar noi putem demonstra această relaţie independent, calculînd, în două moduri distincte, aria triunghiului isoscel după care este intersectat tetraedrul de către un plan de simetrie (ex. 4.21, fig. 4.5e). În felul acesta am dus la bun sfîrşit o a patra cale de rezolvare (destul de întortocheată) începută în ex. 4.18 şi continuată prin ex. 4.19.

4.24. Calea de la ex. 4.18, prin ex. 4.19, la ex. 4.23 este prea lungă şi întortocheată. Rezolvarea din ex. 4.21 pare cea mai elegantă: ea explorează din plin simetria figurii — dar tocmai din acest motiv s-ar putea să fie mai puţin aplicabilă la cazurile nesimetrice. În felul acesta, argumentele „la prima vedere" sînt în favoarea ex. 4.20. Vedeţi şi vreo altă indicaţie în favoarea ex. 4.20?

4.25. $L = M = N$, aşa că $V = Lh$.

4.26. $N = 0$, $M = L/4$, aşa că $V = Lh/3$.

4.27. Fie L_i, M_i, N_i şi V_i mărimile care sînt legate de P_i, aşa cum L, M, N şi V sînt legate de P pentru $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Toţi prismoizii au aceeaşi înălţime h. Evident

$$L_1 + L_2 + \ldots + L_n = L$$

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = M$$

$$N_1 + N_2 + \ldots + N_n = N$$

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V$$

Combinînd aceste ecuaţii obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{L_i + 4M_i + N_i}{6} h - V_i \right) = \frac{L + 4M + N}{6} h - V.$$

Considerăm membrul din dreapta al acestei egalităţii drept un termen; membrul din stînga este o sumă de n termeni analogi. Dacă n din care $(n + 1)$ termeni legaţi prin ecuaţia noastră sînt nuli, atunci şi termenul restant trebuie să se anuleze.

4.28. Proiecţia ortogonală a tetraedrului nostru pe planul pe care l-am dus prin l este un patrulater (un pătrat, în cazul particular din ex. 4.20, fig. 4.5b, dar un patrulater neregulat, în cazul general). O diagonală a acestui patrulater este muchia l, cealaltă este paralelă şi egală cu n. Acest patrulater este baza unei prisme de înălţime h; prisma este împărţită în cinci tetraedre; unul din ele este tetraedrul nostru, celelalte patru sînt piramide în situaţia descrisă în ex. 4.26, aşa că pentru ele este valabilă formula prismoidului. Această formulă este valabilă şi pentru prismă (conform ex. 4.25) şi deci, ea este valabilă şi pentru tetraedru (conform ex. 4.27).

4.29. Fig. S4.29 reprezintă un prismoid; $B, C, \ldots, K$ sînt vîrfurile bazei inferioare (situată în planul hîrtiei), iar $B', C', \ldots, K'$ sînt vîrfurile bazei superioare.

(1) Considerăm piramida a cărei bază este baza superioară a prismoidului, iar apexul (vîrful opus bazei) este un punct A (arbitrar ales) al bazei inferioare.

(2) Unim punctul A cu vîrfurile $B, C, \ldots, K$ ale bazei inferioare. Fiecare segment astfel obținut este asociat cu o latură a bazei superioare (o muchie a prismoidului); segmentul și latura formează o pereche de muchii opuse într-un tetraedru. (De pildă, segmentul AB este asociat cu latura $B'C'$ și ele determină împreună, ca laturi opuse, tetraedrului $ABB'C'$).

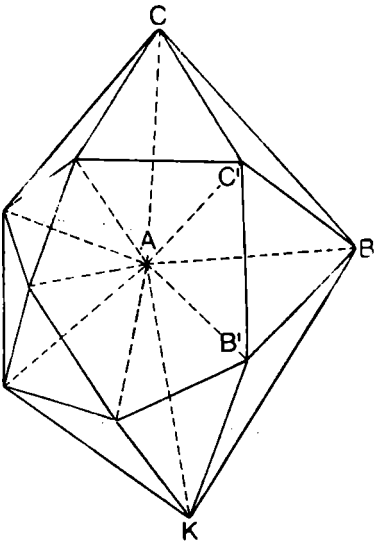


Fig. S4.29

(3) Dreptele trasate din A la vîrfurile $B, C, \ldots, K$ împart baza inferioară în triunghiuri. Fiecare asemenea triunghi este asociat cu un vîrf al bazei superioare; triunghiul formează baza, iar vîrful asociat — apexul unei piramide (care este, de fapt, un tetraedru; de pildă, ABC este asociat cu vîrful C', și ele determină împreună piramida $ABCC'$).

Prismoidul nostru este împărțit în solidele introduse în (1), (2) și (3). (De la baza superioară, (1) ia aria, (2) ia laturile, (3) ia vîrfurile. De la baza inferioară, (1) ia un singur punct, (2) ia segmentele de diviziune, (3) ia aria.) Aplicați ex. 4.26 la piramidele (1) și (3), și ex. 4.28 la tetraedrele (2). Folosind ex. 4.27, demonstrați formula prismoidului pentru prismoidul $BC \ldots KB'C' \ldots K'$ din fig. S4.29.

4.30. Rezolvarea din ex. 4.28 este incompletă, fiindcă ea tratează numai unul din cele trei cazuri posibile. Să considerăm două segmente de dreaptă: l și n, și proiecția ortogonală n' a lui n pe planul paralel cu n care trece prin l. Să considerăm, în continuare, cele două drepte care conțin fiecare cîte unul din aceste două segmente, și punctul de intersecție I al acestor două drepte. Sînt posibile trei situații: punctul I se poate afla

(0) în afara segmentelor l și n',

(1) pe unul dintre aceste două segmente, sau

(2) pe ambele segmente.

Ex. 4.20 tratează numai cazul (2). Dar un tetraedru în situația (1) poate fi considerat drept diferența a două tetraedre în situația (2), iar un tetraedru în situația (0) poate fi considerat drept diferență a două tetraedre în situația (1). Ținînd seama de ex. 4.27, această observație completează demonstrația din ex. 4.28.

4.31. Fig. S4.29 este supusă la două restricții:

(1) Ambele baze sînt convexe.

(2) Fiecare vîrf al unei baze este asociat (există o corespondență biunivocă) cu o latură a celeilalte baze: din vîrf pornesc două muchii laterale care se termină în extremitățile laturii. (De pildă, vîrful B corespunde muchiei $B'C'$, vîrful C' corespunde muchiei BC).

Condiția (2) este, de fapt, mai puțin restrictivă decît ar putea părea: multe configurații care nu intră direct în prevederile ei sînt cazuri-limită (degenerate), iar demonstrația se extinde și asupra unor asemenea configurații (prin continuitate, sau printr-o interpretare convenabilă).

Demonstrația din ex. 4.35 nu este supusă la restricțiile (1) și (2), dar folosește calculul integral.

4.32. $n = 0$; atunci $L = M = N = 1$, $I = 2$; valabilă.

$n = 2m - 1$, impar; $-L = N = 1$, $M = I = 0$: valabilă.

$n = 2m$, par; $L = N = 1$, $M = 0$, $I = 2/(n + 1)$:

valabilă pentru $n = 2$, dar nu și pentru vreun alt întreg par pozitiv.

4.33. $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$: superpoziția cazurilor particulare $n = 0, 1, 2, 3$ din ex. 4.32.

4.34. Substituția

$$x = a + \frac{h(t + 1)}{2}$$

transformă intervalul $a \leqslant x \leqslant a + h$ în intervalul $-1 \leqslant t \leqslant 1$ și orice polinom în x de grad $\leqslant 3$, într-un alt polinom de același tip în t.

4.35. Introducem un sistem de coordonate rectangulare x, y, z. Plasăm prismoidul în așa fel încît baza lui inferioară să fie în planul $z = 0$, iar baza lui superioară în planul $z = h$. Volumul prismoidului este exprimat de

$$V = \int_0^h Q(z)\mathrm{d}z, \tag{1}$$

unde $Q(z)$ reprezintă aria intersecției prismoidului cu planul paralel cu baza inferioară și situat la distanța z de această bază.

Dacă prismoidul are n muchii laterale, această intersecție este un poligon cu n laturi; aria lui este exprimată de

$$Q(z) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i) \tag{2}$$

dacă muchia laterală numărul i este dată de perechea de ecuații

$$x_i = a_i z + c_i, \qquad y_i = b_i z + d_i, \tag{3}$$

unde a_i, b_i, c_i și d_i sînt constante care specifică poziția muchiei; se subînțelege că muchia numărul $(n + 1)$ coincide cu muchia 1, prin urmare

$$a_{n+1} = a_1, \quad b_{n+1} = b_1, \quad \ldots, \quad y_{n+1} = y_1.$$

Ecuațiile (2) și (3) arată că $Q(z)$ este un polinom în z de grad nu mai mare decît 2, așa că (conform ex. 4.34) regula lui Simpson, enunțată în ex. 4.32, este aplicabilă integralei (1), și aceasta dă formula prismoidului enunțată în ex. 4.22, fiindcă, evident,

$$Q(0) = L, \quad Q(h/2) = M, \qquad Q(h) = N$$

reprezintă ariile, respectiv, a bazei inferioare, a secțiunii mediane și a bazei superioare.

Nu implică rezolvări: 4.11, 4.17, 4.36.

CAPITOLUL 5

5.1. Necunoscuta este numărul V.

Datele sînt numerele a și h.

Condiția este că V măsoară volumul unei prisme drepte a cărei înălțime este h și a cărei bază este un pătrat cu latura de lungime a.

5.2. Există două necunoscute, numerele reale x și y. Sau, se poate considera că există o singură necunoscută bipartită, cu componentele x și y, pe care o putem interpreta geometric ca un punct într-un plan cu coordonatele rectangulare x și y.

Condiția este exprimată complet de ecuația propusă.

De date nu are sens să vorbim. (Dacă modificăm problema și, în locul lui 1, în membrul din dreapta al ecuației propuse luăm r^2, acest r va fi o dată.)

O soluție este $x = 1$, $y = 0$; o altă soluție este $x = 3/5$, $y = -4/5$ și așa mai departe. În interpretarea geometrică, mulțimea soluțiilor constă din punctele de pe circumferința unui cerc cu raza 1 și cu centrul în origine.

5.3. Nu există o soluție: mulțimea soluțiilor este mulțimea vidă.

5.4. Există 8 soluții

$$(2, 3) \quad (3, 2) \quad (-2, 3) \quad (-3, 2) \quad (2, -3) \quad (3, -2) \quad (-2, -3) \quad (-3, -2).$$

Mulțimea constă din nodurile planului situate pe circumferința cercului cu raza $\sqrt{13}$ și cu centrul în origine. (Un punct ale cărui coordonate rectangulare sînt numere întregi se numește un *nod al planului*. Configurația nodurilor planului joacă un rol important în teoria numerelor, în cristalografie etc.)

5.5. Interpretăm necunoscuta tripartită (x, y, z) ca un punct în spațiu cu coordonatele rectangulare x, y și z.

(1) Mulțimea soluțiilor constă din punctele *din interiorul* unui octaedru cu centrul în origine și cu cele șase vîrfuri în punctele

$$(1, 0, 0) \quad (-1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, -1, 0) \quad (0, 0, 1) \quad (0, 0, -1)$$

(2) Mulțimea soluțiilor constă din punctele din interiorul și *de pe suprafața* octaedrului.

5.6. Enunțul de mai jos face să fie evidente părțile principale cerute:

Dacă a, b și c sînt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, iar a este lungimea laturii opuse unghiului drept, atunci

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

5.7. Trebuie să reformulăm teorema în așa fel încît să conste în afirmarea simultană a două propoziții de forma obișnuită „dacă — atunci", în care ipoteza și concluzia sînt evidente:

„Dacă n este un pătrat,
atunci $d(n)$ este impar."
„Dacă $d(n)$ este impar,
atunci n este un pătrat."

Iată și un enunț condensat, care folosește condiționarea „dacă și numai dacă":

„Dacă și numai dacă, n este un pătrat, atunci $d(n)$ este impar".

5.16. Începem prin a considera cazul unui poligon convex și amînăm pentru mai tîrziu modificările care ar putea fi necesare pentru a trata cazul general.

(1) Sînt date cele $(n - 1)$ segmente care unesc un (anumit) vîrf al poligonului cu celelalte $(n - 1)$ vîrfuri, și cele $(n - 2)$ unghiuri cuprinse între perechile succesive de segmente.

(2) Se împarte poligonul, prin $(n - 3)$ diagonale, în $(n - 2)$ triunghiuri care sînt toate determinate (fiecare prin cele trei laturi respective) dacă sînt date lungimile diagonalelor folosite și cele n laturi ale poligonului.

(3) Luăm cazul particular al împărțirii în triunghiuri considerate la punctul (2) realizat cu segmentele considerate la punctul (1). Numerotăm triunghiurile în așa fel încît fiecare triunghi (cu excepția primului) să aibă o latură comună cu triunghiul precedent. Dăm trei date independente, oarecare, pentru primul triunghi, iar pentru următoarele $(n - 3)$ triunghiuri, cîte două date independente între ele, precum și de latura care aparține și triunghiului precedent.

(4) Dacă am da cîte două coordonate rectangulare pentru fiecare din cele n vîrfuri — așadar, în total $2n$ date — am determina nu numai poligonul, ci și sistemul de coordonate, a cărui poziție este însă neesențială. Poziția sistemului de coordonate depinde de trei coordonate, deci esențiale sînt numai $2n - 3$ date.

5.17. Pentru a determina baza sînt necesare $2n - 3$ date (vezi ex. 5.16). Pentru a determina apexul (vîrful opus bazei), dăm cele trei coordonate ale apexului în raport cu sistemul de coordonate care are un plan de coordonate coincident cu baza, are ca origine unul din vîrfurile bazei și are o axă în lungul unei laturi a bazei care pornește din vîrful ales. Prin urmare, sînt necesare $2n$ date.

5.18. Ca în ex. 5.17, $2n$.

5.19. Polinomul este de forma

$$f_0 x_v^n + f_1 x_v^{n-1} + \ldots + f_{n-1} x_v + f_n,$$

unde f_j este un polinom de grad j în $(v - 1)$ variabile. Folosind ex. 3.34, demonstrăm prin inducție matematică că numărul de date necesar (numărul de coeficienți în dezvoltarea după puterile lui $x_1, x_2, \ldots, x_v$) este

$$\binom{n+v}{v} = \binom{0+v-1}{v-1} + \binom{1+v-1}{v-1} + \ldots + \binom{n+v-1}{v-1}.$$

Nu implică rezolvări: 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15.

CAPITOLUL 6

6.1. (1) 9 de forma $r(x) = 0$
(2) 9 de forma $r(x) = 0$
(3) 36 de forma $r(x, y) = 0$
(4) 7 de forma $r(x, y, z, w) = 0$
ținînd seama de unele simplificări evidente.
Există, în total, 61 clauze.

6.2. Considerați pe x ca avînd n componente $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

6.3. Fie $x_1 = y_1$, $x_4 = y_3$, considerați pe y_2 ca avînd două componente x_3 și x_2 și considerați combinația (impunerea simultană) a clauzelor r_2 și r_3 ca o singură clauză; obțineți atunci (cu notațiile convenabile) sistemul „recursiv"

$$s_1(y_1) = 0$$
$$s_2(y_1, y_2) = 0$$
$$s_3(y_1, y_2, y_3) = 0$$

6.4. Considerați pe y_1 ca avînd componentele x_1, x_2, x_3 și pe y_2 ca avînd componentele x_4, x_5, x_6, notați $y_3 = x_7$, combinați primele trei clauze r_1, r_2, r_3 într-o clauză unică s_1, iar următoarele trei clauze r_4, r_5, r_6 într-o clauză s_2: obțineți atunci același sistem ca în ex. 6.3.

6.5. În esență planul elaborat deja în 6.4(2).

6.6. Caz particular al sistemului din 6.4(1) (vezi ex. 3.21).

6.7. Două locuri geometrice pentru o dreaptă [cf. 6.2(5)]. Într-adevăr, toate coardele de lungime dată ale unui cerc dat sînt tangente la un cerc (uşor de construit) concentric cu cercul dat.

6.8. Construiţi punctul A pe a şi punctul B pe b, fiecare la distanţa $l/2$ de intersecţia dreptelor a şi b; trasaţi cercul tangent la a în A şi la b în B; deoarece A poate avea două poziţii şi B — la fel, există patru asemenea cercuri. Unul din aceste cercuri este un cerc exînscris triunghiului cerut: dreapta căutată x trebuie să fie tangentă la unul din cele patru arce de cerc. Avem, aşadar, două locuri pentru dreapta x [cf. 6.2(5) şi ex. 6.7].

6.9. MITRALIERE.

7.11. (1) Începeţi cu „constanta" c a pătratului magic. Suma tuturor celor nouă necunoscute este, pe de o parte,

$$= 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$$

iar, pe de altă parte, este suma celor trei rînduri, şi, prin urmare

$$= 3c.$$

Din $45 = 3c$ rezultă că $c = 15$.

(2) Adunaţi cele trei rînduri şi cele două diagonale; suma lor este $5c$. Scădeţi atunci acele linii şi coloane care *nu* conţin elementul x_{22}; ele sînt în număr de patru şi deci, suma lor este $4c$. Obţineţi în felul acesta

$$3x_{22} = 5c - 4c = 15,$$

de unde $x_{22} = 5$.

(3) Pentru a umple acele linii şi coloane care nu conţin elementul central x_{22}, enumeraţi diferitele moduri de a reprezenta numărul 15 sub formă de sumă a trei cifre diferite, alese dintre următoarele opt: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. O trecere în revistă sistematică dă

$$\begin{aligned} 15 &= 1 + 6 + 8 \\ &= 2 + 6 + 7 \\ &= 2 + 4 + 9 \\ &= 3 + 4 + 8 \end{aligned}$$

(4) Cifrele care apar *numai în una* din cele patru reprezentări de mai sus ale numărului 15 au fost culese cu aldine grase; ele trebuie plasate la mijlocul unei linii sau al unei coloane. Celelalte (cu caractere de rînd) apar *de cîte două ori*: ele trebuie plasate în colţurile pătratului magic.

(5) Începeți cu oricare din cifrele culese cu aldine (de pildă cu **1**) și notați-o cu x_{12}. Una din celelalte două cifre din reprezentarea respectivă a lui 15 (în cazul nostru, 6 sau 8) trebuie să fie x_{11}. La prima operație, aveți posibilitatea să alegeți între patru alternative, la a doua — între două alternative, după care nu mai aveți nimic de ales: folosind cele patru reprezentări ale lui 15 date la punctul (3), puteți continua numai într-un singur mod. Puteți obține, de pildă, pătratul magic

6	1	8
7	5	3
2	9	4

și cele $4 \times 2 = 8$ pătrate pe care le puteți obține sînt, într-un anumit sens, „congruente" (identice): le puteți deduce pe toate pornind de la unul oarecare din ele, prin rotații și reflexii. Pătratul dat aici prezintă numărul 61 care apare în „rezolvarea" ex. 6.1.

6.12. (1) Dacă prima cifră (din stînga) a numărului este 2, înmulțirea cu 9 mărește numărul de cifre. Prin urmare, numărul căutat este de forma $1abc$.

(2) În plus, $1abc \times 9 = 9\ldots$, așa că numărul trebuie să fie de forma $1ab9$.

(3) Prin urmare,

$$(10^3 + 10^2a + 10b + 9)9 = 9 \cdot 10^3 + 10^2b + 10a + 1$$

$$89a + 8 = b.$$

De aici, $a = 0$, $b = 8$: numărul cerut este $1089 = 33^2$.

6.13. (1) Deoarece $ab \times ba$ dă un număr cu trei cifre, $a \cdot b < 10$. Să presupunem că $a < b$; nu există atunci decît zece cazuri posibile

$$a = 1, \qquad 2 \leqslant b \leqslant 9; \qquad a = 2, \qquad b = 3 \text{ sau } 4$$

(2) $$(10a + b)(10b + a) = 100c + 10d + c$$

$$10(a^2 + b^2 - d) = 101(c - ab).$$

Așadar, $a^2 + b^2 - d$ este divizibil cu 101; dar

$$-9 < a^2 + b^2 - d \leqslant 82.$$

Prin urmare, $a^2 + b^2 - d = 0$.

(3) $a^2 + b^2 = d \leqslant 9$. De aici $b < 3$, deci $a = 1$, $b = 2$; de unde, $c = 2$, $d = 5$.

6.14. („Mathematical Log", vol. II, nr. 2). Să încercăm să găsim o asemenea pereche paradoxală de triunghiuri.

(1) Printre cele cinci părți nu se pot număra trei laturi: în caz contrar triunghiurile ar fi congruente și ar fi identice *toate* cele șase părți.

(2) Aşadar, triunghiurile concordă în ceea ce priveşte două laturi şi trei unghiuri. Dar dacă ele ar avea aceleaşi unghiuri, ar fi asemenea.

(3) Fie a, b, c laturile primului triunghi, şi b, c, d laturile triunhiului al doilea: dacă ele sînt, în această ordine, laturi corespondente în cele două triunghiuri, trebuie să avem

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}.$$

Cu alte cuvinte, laturile formează o *progresie geometrică*. Aceasta poate fi construită în multe moduri; iată un exemplu:

$$a, \qquad b, \qquad c, \qquad d$$

sînt egale respectiv cu

$$8, \qquad 12, \qquad 18, \qquad 27$$

Se observă că $8 + 12 > 18$ şi că triunghiurile cu laturile 8, 12, 18 şi respectiv 12, 18, 27 sînt asemenea, fiindcă laturile lor sînt proporţionale, prin urmare ele au aceleaşi unghiuri.

6.15. („Mathematical Log", vol. III, nr. 2 şi 3).

(*a*) Trebuie găsite trei numere întregi x, y şi z în aşa fel încît

$$x + y + z = 9, \qquad 1 \leqslant x < y < z.$$

O analiză sistematică a posibilităţilor dă numai trei soluţii (numai trei moduri de a împărţi 9 dolari):

$$\begin{aligned} 9 &= 1 + 2 + 6 \\ &= 1 + 3 + 5 \\ &= 2 + 3 + 4 \end{aligned}$$

(*b*) Aranjaţi aceste trei rînduri într-un pătrat în aşa fel încît şi suma fiecărei coloane să dea 9.

În esenţă (adică, făcînd excepţie de permutările liniilor şi permutările coloanelor) există numai o singură aranjare de acest fel (pe care o prezentăm într-o formă clar simetrică)

6	2	1
2	4	3
1	3	5

(*c*) Acum introducem în joc clauzele „minore" rămase neutilizate ale condiţiei Deoarece 6 este numărul cel mai mare din pătrat, prima linie corespunde lui Alec, iar prima coloană se referă la îngheţată. Singurul număr din pătrat care este dublul numărului aflat la intersecţia aceleiaşi linii cu prima coloană este 4; prin urmare,

linia a doua corespunde lui Bill, iar coloana se referă la sandvişuri. Aşadar, Chris a cheltuit pentru apa minerală numărul de la intersecţia ultimei linii cu ultima coloană, adică 5 dolari.

6.16. („Mathematical Log", vol. III, nr. 2 şi 3).

(a) Soţia cumpără x daruri la preţul de x cenţi fiecare, iar soţul, y daruri la preţul de y cenţi fiecare. Problema cere

$$x^2 - y^2 = 75.$$

Dar $75 = 3 \times 5 \times 5$ are numai şase divizori

$$(x - y)(x + y) = 1 \times 75 = 3 \times 25 = 5 \times 15$$

şi deci nu există decît trei alternative

$$\begin{array}{ccccc} x - y = 1 & & x - y = 3 & & x - y = 5 \\ & \text{sau} & & \text{sau} & \\ x + y = 75 & & x + y = 25 & & x + y = 15 \end{array}$$

care dau tabelul

Soţia	*Soţul*
38	37
14	11
10	5

(b) Acum aruncăm în joc clauzele „minore" rămase neutilizate ale ecuaţiei. Ele arată fără *ambiguitate*

Ann	38	37 Bill Brown
	14	11 Joe Jones
Betty	10	5

aşa că numele de familie a lui Mary *trebuie* să fie Jones.

6.17. (Cf. *Archimedes*, vol. 12, 1960, p. 91.) Evident, numărul cazurilor este limitat încă de la început ($4 ! = 24$). Dar dacă sînteţi un pic ager, n-aveţi nevoie să examinaţi toate aceste cazuri.

(*a*) Fie

$$b, \qquad g, \qquad w, \qquad s$$

numerele de sticle de coca-cola băute, respectiv, de soţia lui

Brown Green White Smith

Atunci

$$b + g + w + s = 14$$
$$b + 2g + 3w + 4s = 30$$

deci

$$g + 2w + 3s = 16.$$

(*b*) Aşa cum arată ultima ecuaţie, numerele g şi s sînt fie ambele impare, fie ambele pare. De aici rezultă că există numai patru cazuri care trebuie examinate:

g	s	$w = 8 - (g + 3s)/2$
3	5	−1
5	3	1
2	4	1
4	2	3

Numai ultimul caz este admisibil. Prin urmare

$$s = 2, \qquad w = 3, \qquad g = 4, \qquad b = 5$$

şi numele complete ale soţiilor sînt

Ann Smith, Betty White, Carol Green, Dorothy Brown.

6.18. Împărţirea condiţiei în clauze se dovedeşte deseori utilă în rezolvarea problemelor de amuzament. Cititorul poate găsi exemple potrivite în culegerile de amuzamente matematice, de exemplu, în H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, (Dover). De asemenea, *Otto Dunkel Memorial Problem Book*, publicată ca supliment la „American Mathematical Montly", **64** (1957) conţine unele materiale adecvate; exerciţiul nr. E 776 de la p. 61 merită să fie citat ca un exemplu excepţional de clar de acest tip.[1]

6.20. (*b*) 6.2(4), $l = 5$. (*c*) ex. 6.6, $n = 4$. (*d*) 6.4(1), $n = 4$. (*e*) 2.5(3), 6.4(2).

6.22. În acest sistem de trei ecuaţii, fiecare din cele trei necunoscute x, y şi z joacă exact acelaşi rol: o permutare ciclică a lui x, y, z schimbă ordinea ecuaţiilor, dar lasă sistemul neschimbat. Prin urmare, *dacă* sistemul determină univoc necunoscutele, trebuie să avem $x = y = z$; admiţînd faptul acesta, avem imediat $6x = 30$, $x = y = z = 5$.

Rămîne de demonstrat că necunoscutele sînt determinate univoc; faptul acesta poate fi demonstrat prin vreunul din procedeele obişnuite de rezolvare a unui sistem de ecuaţii liniare.

---

[1] În româneşte au apărut, editate de Ed. Ştiinţifică, traducerile culegerilor lui M. Gardner. *Auuzamente matematice*, 1968, şi *Alte amuzamente matematice*, 1970, — *N.T.*

6.23.

$$y + z = a$$

$$x \quad + z = b$$

$$x + y \quad = c$$

orice permutare a lui x, y, z lasă neschimbat sistemul membrilor din stînga. Notăm $x + y + z = s$ (care rămîne şi el neschimbat la o permutare a lui x, y, z); adunînd cele trei ecuaţii găsim uşor

$$s = (a + b + c)/2$$

şi sistemul se reduce la trei ecuaţii care conţin, fiecare, numai cîte o necunoscută

$$s - x = a, \qquad s - y = b, \qquad s - z = c.$$

Sistemul în ansamblu (nu numai membrii lui din stînga) este simetric faţă de perechile (x, a), (y, b), (z, c).

6.24. (Stanford, 1958). Notaţi

$$x + y + u + v = s$$

şi vezi ex. 6.23.

Nu implică rezolvări: 6.10, 6.19, 6.21, 6.25.

CAPITOLUL 7

7.1. Liniile de legătură prezentate în fig. 7.10 indică relaţia

$$F = Q + 4T + 4P.$$

Evident

$$Q = a^2h, \qquad T = \frac{h}{2} \cdot \frac{b-a}{2} \cdot a, \qquad P = \frac{h}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Introduceţi în fig. 7.10 liniile de legătură care reprezintă aceste relaţii şi convingeţi-vă că relaţiile de mai sus duc la aceeaşi relaţie finală F, ca şi procedeul analizat în text.

7.2. [Vezi fig. S7.2, (3) şi (4)]; ultima reprezintă situaţia din mintea rezolvatorului o clipă înainte de a scrie ultimul rînd — de-a dreptul dramatic — al formulei $4D^2$ ... [vezi 2.5(4)].

Nu implică rezolvări: 7.3, 7.4, 7.5.

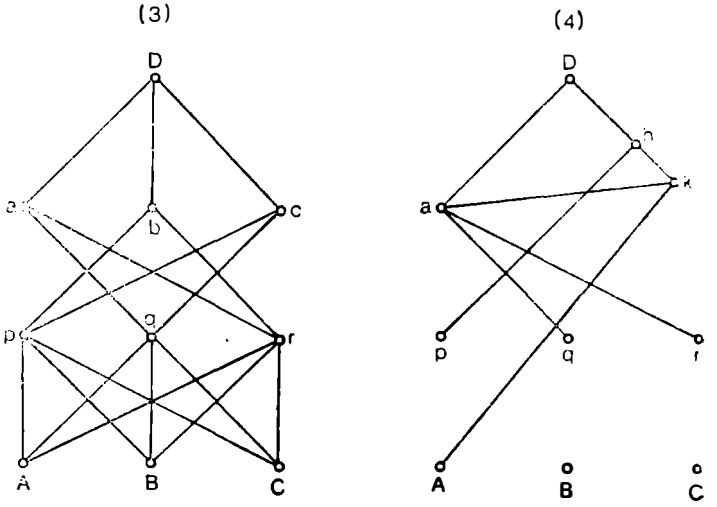


Fig. S7.2

CAPITOLUL 8

8.3. (Stanford, 1965) Din fig. 8.3.

$$AB' = \frac{b}{\sqrt{3}}, \qquad AC' = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Aplicați legea cosinusului în $\Delta B'AC'$:

$$3x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right).$$

Aplicați legea cosinusului în ΔABC pentru a exprima pe $bc\cos\alpha$, notați $bc\sin\alpha = 2T$, unde T este aria ΔABC, și obțineți

$$6x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\ T.$$

T este simetric în a, b și c.

8.4. Secțiunea este

(1) un dreptunghi de arie $2yz = \dfrac{2hx\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$.

(2) un triunghi dreptunghic de arie $\dfrac{xz}{2} = \dfrac{h(a^2 - y^2)}{2a}$.

(3) un segment de cerc.

Planul (2) este de preferat (implică o funcție rațională de y), iar volumul cerut este

$$\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} xz\,dy = \frac{2a^2h}{3}.$$

Nu implică rezolvări: 8.1, 8.2, 8.5, 8.6, 8.7, 8.8.

CAPITOLUL 9

9.5. (Vezi 4.4). Teorema A, enunțată în 4.4(1) și ilustrată în fig. 4.4 este demonstrată cu ajutorul teoremei mai slabe B, enunțate în 4.4(2) și ilustrate pe fig. 4.3.

9.6. Problemele A și B sînt echivalente. Există un avantaj clar în trecerea de la A la B, fiindcă în felul acesta ajungem la numere mai mici. Repetînd această „trecere", obținem succesiv următoarele perechi de numere:

(437, 323), (323, 114), (209, 114), (114, 95), (95, 19)
(76, 19) (57,19) (38,19) (19,19)

Așadar, toți divizorii comuni ai lui 437 și 323 sînt 1 și 19, adică divizorii lui 19 care este divizorul lor comun cel mai mare. Procedeul folosit în acest exemplu este aplicabil în general, este de importanță fundamentală, și se numește *algoritmul lui Euclid* (vezi Euclid VII 2).

9.7. (1) În anumite condiții importante și care se realizează frecvent, condiția B este mai largă decît condiția A. (Iată un caz simplu: $f(x)$ este definită, continuă și are derivată în intervalul închis $a \leq x \leq b$; în plus, se știe că maximul lui $f(x)$ nu se realizează nici pentru $x = a$. nici pentru $x = b$.)

(2) În majoritatea cazurilor, se constată că găsirea rădăcinilor ecuației $f'(x) = 0$ constituie o problemă mai familiară; în afară de aceasta, cunoaștem procedee de a elimina acele rădăcini care nu dau maximul lui $f(x)$.

9.8. (1) Teorema B este mai puternică; ea implică imediat A.

(2) B este mai ușor de demonstrat decît A, din cauză că B adaugă la A un detaliu precis de la care putem începe lucrul: dacă nu dispunem decît de enunțul mai puțin complet A, trebuie să descoperim mai întîi acel detaliu precis, sau vreun fapt echivalent; teorema mai puternică B este mai accesibilă decît A, fiindcă este mai explicită decît A. Cazul acesta este tipic (cf. *CRP*, pp. 120—126, în special p. 125, „Inducția și inducția matematică", mai ales punctul 7).

(3) Fie A unul din vîrfurile triunghiului și M — mijlocul laturii opuse; demonstrați mai întîi că $\Delta MGO \sim \Delta AGE$, din care rezultă $MO \parallel AE$.

9.9. (1) A este o problemă de demonstrat, B este o problemă de aflat care este mai ambiţioasă decît A : putem prevedea de la inceput că o rezolvare completă a problemei B va aduce cu sine fie demonstrarea, fie infirmarea aserţiunii enunţate de A.

(2) A este o problemă de limite, B — una de inegalităţi algebrice, prin urmare B este mai elementară.

(3) Omitem cazul $\varepsilon \geqslant 1$, care este mai uşor. În cazul $\varepsilon < 1$, avem un lanţ de condiţii echivalente:

$$\sqrt{x+1} < \varepsilon + \sqrt{x}$$
$$1 < \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{x}$$
$$\left(\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2 < x.$$

Cu alte cuvinte, peste o anumită valoare a lui x, cantitatea $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ este mai mică decît ε, o cantitate pozitivă arbitrară (care poate fi arbitrar de mică!). Aceasta demonstrează A.

9.10. (1). Cele două propoziţii la care se referă A şi B sînt echivalente (prin contrapoziţie) şi tot astfel şi cele două probleme A şi B.

(2) Afirmaţia „n este număr compus" afirmă existenţa a doi întregi a şi b în aşa fel încît $n = ab$, $a > 1$, $b > 1$. Afirmaţia „n este număr prim" neagă că n este număr compus (putem neglija aici cazul $n = 1$) şi această afirmaţie „negativă" este mai puţin „de nădejde" în calitate de „punct de sprijin". Prin urmare, B ne apare ca fiind mai uşor de tratat.

(3) Dacă $n = ab$

$$2^n - 1 = (2^a)^b - 1$$

este divizibil cu $2^a - 1$.

9.11. Introduceţi, pentru $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_{3m-2} = 2m^{-1/3}, \quad a_{3m-1} = a_{3m} = -m^{-1/3}.$$

Pentru o generalizare a problemei de faţă, vezi, „American Mathematical Monthly", 53, 1946, pp. 283—284, problema 4142. Fără o idee anticipativă, fără o prefigurare a soluţiei, pare imposibil să se reuşească să se introducă clauze suplimentare utile, cum sînt (III) şi (IV).

9.12. Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_l$ sînt numere prime diferite şi $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_l^{a_l}$, atunci

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 2) \ldots (a_l + 1).$$

9.13. Ex. 1.47 şi 1.3(1); 2.5(2), 2.5(3); 3.2 şi 3.1.

9.15. *De ce?* Iată alte două teme analoge celor din ex. 9.6—9.10.

(I) Comparaţi între ele problemele

A. Să se calculeze $\sqrt[4]{\overline{100}}$.

B. Să se calculeze $\sqrt{\overline{100}}$.

† (II) Fie $f(x)$ și $g(x)$ funcții date. Comparați între ele problemele:

A. Să se demonstreze că $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

B. Să se demonstreze că $f(x) \geqslant g(x)$ pentru $a \leq x \leq b$.

Cum ați ajuns la ea? Cele mai uzuale par să fie problemele auxiliare care provin, nemijlocit sau deghizat, din una din cele patru surse enunțate. Un exemplu instructiv: la rezolvarea ex. 3.84 trebuie conjugate generalizarea, particularizarea și analogia (vezi și *CRP* ex. 20, pp. 219, 230—231).

Nu implică rezolvări: 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.14.

CAPITOLUL 10

10.2.

(1)

```
—  —  —  U  —  —  —  —  —  —
—  —  —  U  —  —  —  A  —  —
—  —  —  U  —  I  —  A  —  —
—  —  I  U  —  I  —  A  —  —
—  —  T  U  —  I  —  A  —  —
—  —  T  U  —  I  —  A  —  —
M  —  T  U  —  I  —  A  —  —
```

(2)

$$\int \sqrt{x^7 - x^4}\mathrm{d}x =$$

$$\int x^2\sqrt{x^3 - 1}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \sqrt{x^3 - 1}\cdot x^2\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{3}\int \sqrt{x^3 - 1}\cdot 3x^2\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{3}\int (x^3 - 1)^{1/2}\mathrm{d}(x^3 - 1)$$

Nu implică rezolvare: 10.1.

CAPITOLUL 11

11.2. Fig. 1.1—1.6; fig. 7.1—7.6, reunite în fig. 7.8.

11.3. Vezi cele două exemple citate în rezolvarea ex. 11.2; în primul exemplu „momentul" poate fi fig. 1.6; în cel de-al doilea — fig. 7.3.

11.4. Ex. 10.2.

11.5. În fig. 4.2, sesizarea faptului că abscisele x_1, x_3, ..., x_n sînt *rădăcini* ale polinomului căutat $f(x)$.

11.6. Trecerea de la fig. 1.11 la fig. 1.12. Sau, în *MRP*, vol. II, pp. 168 — 169, trecerea de la fig. 16.2 la fig. 16.3.

Nu implică rezolvări: 11.1, 11.7, 11.8, 11.9, 11.10, 11.11.

CAPITOLUL 12

12.4.

(1) Punctul P se află pe două drepte date; prin construcție, ...

Punctul P se află pe o dreaptă dată și pe un cerc dat, prin construcție, ...

Punctul P se află pe două cercuri date; prin construcție, ...

(2) Fiind date două din laturile ΔABC și unghiul inclus între ele, și notînd cu AB a treia latură, ...

Fiind date lungimea laturii BC și două din unghiurile ΔABC, ...

În triunghiul dreptunghic ABC, fiind date lungimile celor două catete AC și BC, ...

(3) Fiind date baza și înălțimea, ...

Fiind date laturile ΔABC, ...

[De asemenea, toate seturile de date de la (2)].

(4) Fiind date aria bazei ΔABC și lungimea înălțimii coborîte din vîrful D, ...

12.5.

(1) Dacă $\Delta ABC \simeq \Delta EFG$, ...

Dacă $ABFE$ este un paralelogram, ...

(2) Dacă $\Delta ABC \sim \Delta EFG$, ...

Dacă $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle EFG$ sînt unghiuri corespondente obținute prin intersectarea a două paralele cu o secantă, ...

Dacă $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle EFG$ sînt înscrise în același cerc și subîntind același arc, ...

Și așa mai departe (vezi ex. 8.8).

(3) Dacă figura $ABCD$ ... este asemenea cu figura $EFGH$ ..., punctele fiind menționate în ordinea în care se corespund, ...

Dacă $AE \| BF \| CG \| DH$ și A, B, C, D sînt coliniare, așa cum sînt și E, F, G, H, ... (Un enunț mai puțin „încărcat" al teoremei este următorul: „Părțile corespondente de pe drepte tăiate de paralele sînt proporționale".)

(4) Dacă, în triunghiul ABC, $\sphericalangle C < \sphericalangle B$, ...

12.6. Vezi ex. 1.47, 2.5(2), ex. 2.10, ex. 2.13, ex. 2.51, 14.6(3), de asemenea *CRP*, pp. 57—65, în special p. 58 (Analogia, în special punctul (3)) și *MRP*, vol I, pp. 65—66. Mai pot fi găsite multe alte asemenea „perechi" de probleme.

12.7. Mediana într-un triunghi, care are extremitatea în punctul median al laturii AB, trece prin punctul median al oricărui segment interceptat de celelalte două laturi pe o dreaptă paralelă cu AB.

(În tetraedru, secțiunile considerate sînt paralelograme. Planul care trece printr-o muchie și prin punctul median al muchiei opuse dă o intersecție utilă).

12.8. Mediana într-un triunghi împarte aria în două părți egale.

(În cazul tetraedrului, teorema enunțată decurge din principiul lui Cavalieri, fiindcă planul de care este vorba bisectează aria oricărei din secțiunile considerate în ex. 12.7.)

12.9. Bisectoarea unui unghi interior al unui triunghi împarte latura opusă în segmente proporționale cu laturile adiacente.

Nu implică rezolvări: 12.1, 12.2, 12.3, 12.10, 12.11.

CAPITOLUL 13

Nu implică rezolvări: 13.1, 13.2, 13.3.

CAPITOLUL 14

14.1. Aproximativ $9\frac{2}{3}$ minute după-amiază. Longitudinea meridianului „central" după care se stabilește timpul-standard vestic este 120°V.

14.2. Deoarece

$$BD = BD_1, \quad CD = CD_1,$$

punctul D aparține intersecției a două sfere, una cu centrul în B și raza BD_1, cealaltă cu centrul în C și raza CD_1. Planul cercului de intersecție este perpendicular pe dreapta BC care unește centrul sferelor și, de aceea, este perpendicular pe planul orizontal al ΔABC. Prin urmare, proiecția ortogonală F a lui D pe planul orizontal se află pe dreapta prin D_1 perpendiculară pe BC. Bineînțeles, pozițiile lui D_2 și D_3 sînt analoge.

14.3. Punctul F este *centrul radical* (definit în manualele de geometrie analitică) ale celor trei cercuri indicate prin mici arce pe fig. 14.1, iar D_1F, D_2F și D_3F sînt cele trei axe radicale care sînt concurente în F.

14.4. Acțiunea și percepția, în 14.6(4).

14.11. Răspunsurile care urmează sînt doar schițate.

(*7a*) Folosind legea cosinusului în trigonometria plană și în trigonometria sferică putem demonstra inegalitatea

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > \frac{-\cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c}$$

presupunînd că $0 < a < \pi$, $0 < b < \pi$, $0 < c < \pi$ și că cele trei segmente de lungime respectiv a, b și c formează un triunghi. Inegalitatea poate fi dedusă folosind în mod adecvat faptul că funcția $(\sin x)/x$ scade continuu cînd x crește de la zero la π, iar acest fapt poate fi prezentat plauzibil recurgînd la considerente geometrice.

(*7b*) Prin continuitate, un triunghi sferic „foarte mic" este „aproape plan", așa că este „aproape identic" cu imaginea lui din plan, fiindcă cele două triunghiuri au aceleași laturi; prin urmare, unghiurile corespondente sînt „aproape egale".

(*7c*) Proiecția stereografică a sferei (din polul nord, pe planul ecuatorului) păstrează unghiurile.

(*7d*) Teorema lui Arhimede despre aria suprafeței unei zone sferice dă o reprezentare care păstrează o arie simplă.

(*7e*) Proiecția unei emisfere pe un plan, din centrul sferei.

14.24. Restul căutat este un polinom de grad nu mai mare ca 1, de forma $ax+b$. Presupuneți problema rezolvată, presupuneți că a fost găsit cîtul împărțirii, $q(x)$. Aveți atunci identitatea:

$$x^3 + x^5 + \ldots + x^{17} + x^{19} = (x^2 - 1)q(x) + ax + b$$

care dă, pentru $x = 1$ și $x = -1$, două ecuații din care determinați cele două necunoscute a și b:

$$7 = a + b, \qquad -7 = -a + b.$$

Deci $b = 0$ și $a = 7$, iar restul căutat este $7x$.

Numerele prime 3, 5, $\frac{1}{2}$..., 17, 19 „sar în ochi" dar, în fapt, sînt irelevante; dacă ele sînt înlocuite cu oricare alte numere *impare*, rezultatul rămîne același. Lucrul acesta îl vedem clar după ce am rezolvat problema, dar cînd ne uităm prima dată la problemă, aceste numere prime ar putea să ne ducă pe o pistă falsă.

14.25.

(1) πt^2,

(2) $\pi t^2/4$.

Nu implică rezolvări: 14.5—14.10, 14.12—14.23, 14.26, 14.27, 14.28.

CAPITOLUL 15

15.1. „Fiind dat perimetrul, să se găsească figura cu aria maximă". Aceasta este „problema izoperimetrică"; ea poate fi propusă pentru diferite clase de figuri; iată citeva trimiteri:

triunghiuri: *MRP*, vol. I, p.163, ex. 16;

dreptunghiuri: *CRP*, pp. 55—56, „Analizaţi-vă conjectura" (2);

patrulatere: *MRP*, vol. I, p. 169, ex. 41;

poligoane cu un număr dat de laturi: *MRP*, vol. I, p. 212;

toate figurile plane: *MRP*, vol. I, pp. 200—217.

Pentru o prezentare a cîtorva din ideile lui Jacob Steiner, precum şi a cîtorva probleme conexe de fizică, vezi „Modern Mathematics for the Engineer", seria a 2-a, sub redacţia lui E. F. Beckenbach, pp. 420—441.

15.2. Simetrie în a, b şi c; verificare cu ajutorul dimensiunii.

15.3. Deasupra arcului — triunghiuri ascuţite, dedesubt — triunghiuri obtuze.

15.4. Proiecţia centrală a poliedrului (din interiorul lui) pe una din feţele lui, w („fereastra"); alegeţi ca centrul de proiecţie un punct exterior poliedrului, dar suficient de apropiat de un punct din interiorul lui w (cf. *MRP*, vol. I, p. 74, ex.7).

15.5. $\Sigma F_n = F$, $\Sigma V_n = V$.

15.6. $\Sigma n F_n = \Sigma n V_n = 2E$.

15.7. Folosiţi ex. 15.5, ex. 15.6, definiţia din 15.6(2) şi rezultatul final din 15.6(8)

$$\Sigma(n-2)F_n = 2E - 2F = \Sigma \frac{\alpha}{\pi} = 2V - 4.$$

15.8. Din ex. 15.6 şi 15.5.

$$2E = \Sigma n F_n \geqslant 3\Sigma F_n = 3F$$
$$2E = \Sigma n V_n \geqslant 3\Sigma V_n = 3V.$$

În primul din aceste două rînduri, egalitatea se realizează dacă şi numai dacă toate feţele sînt triunghiuri, iar în rîndul al doilea, dacă şi numai dacă din fiecare vîrf pleacă numai trei muchii.

15.9. *Prima demonstraţie.* Consideraţi deocamdată ca adevărată lema de mai jos (dar după aceea, demonstraţi-o !).

Lemă. Dacă o mulţime de mărimi poate fi subdivizată în submulţimi care nu se acoperă, în aşa fel încît media mărimilor din fiecare submulţime este mai mică decît a, atunci media tuturor mărimilor din întreaga mulţime este, şi ea, mai mică decît a.

Această lemă rămîne valabilă dacă specificarea „mai mică decît", exprimată prin semnul $<$, este înlocuită prin oricare din specificările exprimate prin $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ Aplicăm lema de două ori, în (1) şi în (2).

(1) Media unghiurilor feţelor unei feţe cu n laturi este

$$\frac{(n-2)\pi}{n} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi \geqslant \frac{\pi}{3}.$$

(2) Suma unghiurilor feţelor care au vîrful comun este $<2\pi$, numărul acestor unghiuri este $\geqslant 3$, prin urmare media lor este $<2\pi/3$.

A doua demonstraţie. După 15.6(6) şi ex. 15.6, media tuturor unghiurilor feţelor este

$$\frac{\Sigma\alpha}{2E} = \frac{2\pi(E-F)}{2E} = \pi\left(1 - \frac{F}{E}\right) \geqslant \frac{\pi}{3}$$

conform ex. 15.8. Egalitatea se realizează dacă şi numai dacă toate feţele sînt triunghiuri.

Pe de altă parte, după teorema lui Euler demonstrată în 15.6(8),

$$\frac{\Sigma\alpha}{2E} = \frac{2\pi V - 4\pi}{2E} = \frac{\pi V}{E} - \frac{2\pi}{E} \leqslant \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{E}$$

conform ex. 15.8.

15.10. *Prima demonstraţie.* Media unghiurilor feţelor pentru o faţă cu n laturi este

$$\frac{(n-2)\pi}{n} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi \geqslant \frac{2\pi}{3}$$

dacă $n \geqslant 6$. Dacă toate feţele ar avea şase sau mai multe laturi, media tuturor unghiurilor feţelor ar fi $\geqslant 2\pi/3$, ceea ce este imposibil conform ex. 15.9.

A doua demonstraţie. După teorema lui Euler, ex. 15.8 şi 15.6,

$$\begin{aligned} 12 &= 6F - 2E + 6V - 4E \\ &\leqslant 6F - 2E \\ &= \Sigma(6-n)F_n \\ 12 &\leqslant 3F_3 + 2F_4 + F_5 \end{aligned}$$

deci, cel puţin unul din cele trei numere F_3, F_4 şi F_5 trebuie să fie pozitiv.

15.11. (1) Dacă o faţă are n laturi, unde $n > 3$, o putem împărţi în $(n-2)$ triunghiuri trasînd diagonale, aşa că o putem înlocui cu un număr de $(n-2)$ triunghiuri (care este >1) fără a modifica pe V. Prin urmare, F nu poate fi maxim decît dacă toate cele F feţe sînt triunghiuri.

(2) Din 15.8, $2E \geqslant 3F$, cu egalitate dacă şi numai dacă $F_4 = F_5 = \ldots = 0$, $F = F_3$. Dar

$$F + V = E + 2 \geqslant \frac{3}{2}F + 2$$

$$V \geqslant \frac{1}{2}F + 2$$

$$F \leqslant 2(V-2)$$

şi

$$E = F + (V - 2) \leqslant 3(V - 2)$$

cu egalitate dacă şi numai dacă toate feţele sînt triunghiuri.

15.12. Prin analogie, ambele rezolvări de la ex. 15.11 se aplică (cu unele interpretări adecvate) în cazul de faţă şi dă

$$V \leqslant 2(F - 2), \quad E \leqslant 3(F - 2)$$

cu egalitate dacă şi numai dacă din fiecare vîrf al poliedrului pleacă exact trei muchii.

Inegalităţile deduse au aplicaţii interesante. De pildă, putem combina a doua inegalitate obţinută mai sus cu ex. 15.8 în felul următor:

$$\frac{E + 6}{3} \leqslant F \leqslant \frac{2E}{3}.$$

Pentru $E = 6$, aceasta dă

$$4 \leqslant F \leqslant 4,$$

cu alte cuvinte, dă cazul tetraedrului. Dar pentru $E = 7$, aceasta dă

$$\frac{13}{3} \leqslant F \leqslant \frac{14}{3}$$

şi prin urmare F nu poate fi un număr întreg! Ajungem astfel la concluzia că nu există un poliedru convex cu şapte muchii — un fapt consemnat încă de Euler.

15.13.

(1)	0	4	3	100	36
respectiv pentru	tetra-,	hexa -,	octa -,	dodeca-,	icosaedru
(2)	$n(n - 3)$	0		$1 + \frac{n(n-3)}{2}$	
respectiv pentru	n-prismă,	n-piramidă,		n-dublă-piramidă	
(3)	$\frac{(F-2)(F-4)}{8}$	$\frac{(F^2 - 5F + 2)}{2}$		$\frac{(9F^2 - 42F + 8)}{8}$	
respectiv pentru	$n = 3$,	4,		5	

Cazul $n > 5$ este imposibil (vezi ex. 15.10); semnele (...) după 5 sînt înşelătoare.

(4) În funcţie de F_n (cf. ex. 15.6, 15.7) avem

$$D = \frac{V(V-1)}{2} - E - \Sigma \frac{n(n-3)}{2} F_n$$

$$= 1 - \frac{1}{4} \Sigma(2n - 3)(n - 2)F_n + \frac{1}{8} [\Sigma(n - 2)F_n]^2.$$

15.14.

	(1)	(2)	(3)
$\Sigma\delta$	3π	2π	$5\frac{\pi}{2}$
$\Sigma\omega$	2π	0	π

15.15. În cazurile consemnate în ex. 15.14, ambele sume variază în același sens — variația lui $\Sigma\omega$ este dublul variației lui $\Sigma\delta$ — și

$$2\Sigma\delta - \Sigma\omega = 4\pi.$$

Această relație este oare valabilă pentru toate tetraedrele?

15.16. Cf. ex. 15.19.

15.17. Generalizați cazurile (1) și (3) din ex. 15.14; în ambele cazuri, rezultatul este același (cf. ex. 15.19).

15.18. Cf. ex. 15.19.

15.19.

	$2\Sigma\delta - \Sigma\omega$	F	V	E
Tetraedru	4π	4	4	6
Cub	8π	6	8	12
n-piramidă	$(2n-2)\pi$	$n+1$	$n+1$	$2n$
n-prismă	$2n\pi$	$n+2$	$2n$	$3n$
n-dublă-piramidă	$(4n-4)\pi$	$2n$	$n+2$	$3n$

Nici V, nici E, numai F crește oarecum concordant cu $2\Sigma\delta - \Sigma\omega$.

15.20. $2\Sigma\delta - \Sigma\omega = 2\pi F - 4\pi$.

Pentru o demonstrație, exprimați aria sferică (unghiul solid) asociată cu un vîrf în funcție de unghiurile diedre asociate cu muchiile care diverg din acel vîrf. Amintiți-vă că aria unui triunghi sferic cu unghiurile α, β și γ este „excesul sferic" $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ și deduceți de aici o expresie pentru aria unui poligon sferic. Obțineți astfel (vezi, ex. 15.5, 15.6)

$$\Sigma\omega = 2\Sigma\delta - \Sigma\pi(n-2)V_n = 2\Sigma\delta - 2\pi(E-V).$$

15.21. Răspunsurile „obișnuite" sînt: triunghiul echilateral, pătratul, poligonul regulat cu n laturi.

15.22. De obicei se „ghicesc" aceleași forme ca în ex. 15.21.

15.25. Răspunsurile „obișnuite" sînt: tetraedrul regulat, octaedrul regulat, cubul.

15.26. Răspunsurile „obişnuite" sînt: tetraedrul regulat, cubul, octaedrul regulat.

15.27. Diagonala cubului este diametrul sferei. Deci, dacă a este lungimea muchiei cubului

$$(2r)^2 = 3a^2,$$

(cf. *CRP*, pp. 22—28, exemplul principal din Partea I.) Prin urmare, volumul cerut este

$$a^3 = \frac{8\sqrt{3}r^3}{9}.$$

15.28. Fie A aria unui triunghi echilateral de latură r. Volumul cerut este

$$\frac{2 \cdot 6Ar}{6} = \sqrt{3}r^3.$$

Răspunsul în cazul $V = 8$ din ex. 15.25, care ni s-a părut o conjectură destul de plauzibilă, s-a dovedit a fi fals. (Răspunsurile în cazurile $V = 4$ şi 6 sînt totuşi corecte; pentru primul din ele, cf. *MRP*, vol. I, p. 163, ex. 17.)

15.29. Fie A — aria şi h — înălţimea unei feţe a octaedrului. Atunci, volumul cerut este (împărţiţi octaedrul în opt tetraedre)

$$V = \frac{8Ar}{3} = \frac{8r}{3} = \frac{h^2}{\sqrt{3}}.$$

Din considerente de simetrie rezultă că sfera este tangentă la feţe în centrele acestora. Aşadar, h este — într-un triunghi dreptunghic — lungimea ipotenuzei care este împărţită de înălţimea (de lungime r) în două segmente de lungimi $h/3$ şi $2h/3$ respectiv. Eliminînd pe h, găsim

$$V = 4\sqrt{3}r^3.$$

15.30. Volumul prismei este

$$6\frac{r^2}{\sqrt{3}}2r = 4\sqrt{3}r^3.$$

Răspunzînd la cazul $F = 8$ din ex. 15.26, cu greu ne-am fi putut aştepta la aşa ceva ... (Răspunsurile la cazurile $F = 4$ şi 6 sînt corecte).

15.31.

	F	V	E
Cubul	6	8	12
Dubla piramidă hexagonală	12	8	18
Octaedrul regulat	8	6	12
Prismă hexagonală dreaptă	8	12	18

Poliedrul neregulat care „bate" (respectiv, care „echivalează") poliedrul regulat co cordă cu acesta, bineînțeles, în ceea ce privește numărul de elemente *prestabilite* (V în primul caz, F — în cazul al doilea), dar în rest, este mai complicat (are F și mai mari — în primul caz și V și E mai mari — în cazul al doilea). Explică oa aceste circumstanțe abaterea constatată de la principiul rațiunii non-suficiente?

15.32. Cel care are numai fețe triunghiulare (vezi ex. 15.11).

15.33. Cel care are numai vîrfuri cu cîte trei muchii divergente (vezi ex. 15.1

15.34. Între cub și octaedru există o relație reciprocă și aceeași relație poate observată între poliedrele neregulate rivale (cf. *MRP*, vol. I, p. 73 ex. 3 și 4). Aceas sugerează o conjectură: între soluțiile problemelor din ex. 15.25 și 15.26 pentru ac lași număr de date va fi valabilă aceeași relație (topologic) reciprocă (cf. ex. 15.3 și 15.33).

15.35. Răspunsurile „obișnuite" sînt aceleași ca la ex. 15.26, și aceeași este și în treaga situație de ansamblu; răspunsul „obișnuit" este corect pentru $F = 4$ și $F =$ dar este greșit pentru $F = 8$ (cf. *MRP*, vol. I, p. 222, ex. 42).

15.36. (Stanford, 1962) Ni se cere să găsim punctele de intersecție a două elips congruente, simetrice față de dreapta $x = y$. Prin scădere obținem $x^2 = y^2$. Din ce patru puncte de intersecție

$$(6, 6) \qquad (-6, -6) \qquad (2, -2) \qquad (-2, 2)$$

două ascultă de principiul rațiunii non-suficiente, iar celelalte două — nu (cf. ex 6.22).

15.37. În urma unor operații de scădere, obținem $x^2 = y^2 = z^2$. Dintre cele op soluții

$$(1, 1, 1) \qquad (-1, -1, -1)$$

$$(3, -3, -3) \quad (-3, 3, 3) \quad (-3, 3, -3) \quad (3, -3, 3) \quad (-3, -3, 3) \quad (3, 3, -3$$

două ascultă de principiul rațiunii non-suficiente, iar celelalte șase — nu.

15.38. (Stanford, 1963) Aceleași soluții ca la ex. 15.37, dar este mai puțin ușor d stabilit că $x^2 = y^2 = z^2$.

15.41. Vezi ex. 15.42—15.53.

15.42. (1) Putem discuta în felul acesta — verificînd cazuri particulare — rezul tatul oricărei probleme „cu litere" [cf. 2.4(3)]; ex. 2.61; *CRP*. „Se poate verific rezultatul?", (2), p. 205; *MRP*, vol. II, 2, p. 9, pp. 18—20, ex. 3—7; de asemenea articolul nr. 11 al autorului, citat în Bibliografie; etc.].

(2) Verificînd-o în cazuri particulare, ne familiarizăm cu formula, îi înțelegem ma bine „structura". Mai mult, o asemenea discuție poate ilustra cîteva idei general

uportante. Putem învăţa că meritul unei formule constă în generalitatea ei, în aplicabilitatea ei. După aceea, mai putem învăţa să raţionăm plauzibil, să raţionăm inductiv — fundamentînd verosimilitatea unei aserţiuni generale prin analizarea cazurilor particulare. Pe scurt, profesorul care neglijează discuţiile de tipul prezentat în 15.4 atează una din ocaziile cele mai evidente de a face ceva pentru maturizarea intelectuală a elevilor săi.

15.43. Fiecare punct al regiunii înfăţişate pe fig. 15.1 reprezintă o formă triunghiulară. (Pentru diagrame care analizează într-un mod analog formele elipsoidale şi celenticulare, vezi G. Pólya şi G. Szegő, *Isoperimetric inequalities* în *Mathematical Physics*, Princeton University Press, pp. 37 şi 40.) În felul acesta, fig. 15.1 poate pregăti elevul pentru un anumit mod de folosire a diagramelor în ştiinţă, de pildă, ca diagrama de stare în termodinamică. Mai mult, fig. 15.1 oferă un exerciţiu de rutină de loc geglijabil de interpretare geometrică a inegalităţilor liniare.

15.44. Iată cîteva fapte la care poate conduce examinarea directă a fracţiilor zecimale.

Toate cele trei tipuri de dezvoltări zecimale reprezintă numere zecimale şi, invers, dezvoltarea zecimală a unui număr raţional trebuie să facă parte din unul din cele trei tipuri. Deosebirea dintre tipuri se datorează factorilor primi ai numitorului numărului raţional reprezentat; după cum toţi aceşti factori sînt divizori ai lui 10, sau *nici unul* din ei nu divide pe 10, sau *unul divide* pe 10 iar celălalt — nu, fracţia zecimală este finită, sau pur periodică, sau este mixtă. (Vorbind despre numitorul b al unui număr raţional a/b, am presupus că a/b este exprimat sub forma cea mai simplă, cu alte cuvinte, că întregii a şi b nu au un divizor comun mai mare ca 1, şi că $b \geqslant 1$. Am neglijat două cazuri, evidente: cazul $b = 1$ (numerele întregi) şi cazul dezvoltărilor zecimale infinite ale numerelor raţionale care pot fi reprezentate şi printr-o dezvoltare finită. Cf. I. Niven, *Numbers: Rational and Irrational*, Random House, pp. 23—26, 30—37).

Lungimea perioadei este independentă de numărător.

Dacă numitorul este un număr prim p, lungimea perioadei este un divizor al lui $(p - 1)$. (Mai general, lungimea perioadei este un divizor al lui $\varphi(b)$, numărul de întregi pozitivi care nu depăşesc numitorul b şi sînt relativ primi cu b. Ce puteţi spune despre dezvoltările mixte?)

Dacă numitorul este număr prim, iar lungimea perioadei — un număr par, fiecare cifră din a doua jumătate a perioadei completează pînă la 9 cifra corespunzătoare din prima jumătate a perioadei. (De pildă, în dezvoltarea

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$$

$$1 + 8 = 9 \qquad 4 + 5 = 9 \qquad 2 + 7 = 9$$

Cunoaşterea acestui fapt poate economisi multă osteneală, cînd se calculează o fracţie zecimală.)

Dacă numitorul nu este divizibil cu 3, suma cifrelor din perioadă este divizibil cu 9. De pildă

$$\frac{15}{41} = 0{,}\overline{36585}$$

$$3 + 6 + 5 + 8 + 5 = 27.$$

Cititorul trebuie să verifice aceste afirmații pe exemple. Demonstrațiile sînt ușoare cu condiția să dispuneți de unele cunoștințe de teoria numerelor — dar unul din scopuri este tocmai de a stîrni interesul cititorului pentru această teorie.

15.45. Observație:

$$9 \times 11 = 99,\ 27 \times 37 = 999,\ 99 \times 101 = 9999,\ 271 \times 369 = 99999$$

Explicație: Prin urmare, de pildă

$$27 \times 0{,}037037 \ \ldots = 0{,}999999 \ \ldots = 1$$

Să nu ezităm să comparăm lucrurile mărunte cu lucrurile mari (*parva componere magnis*): o asemenea comparare poate fi instructivă. Pasul pe care l-am făcut de la „observare" la „explicare" — de la remarcarea unei regularități, la remarcarea relației subiacente — este infinit mai mic, ca scară, decît pasul de la Kepler la Newton dar ca natură — este similar (cf. *MRP*, vol. I, p. 111, ex. 15).

15.46. Cu excepția ultimei afirmații (referitoare la suma cifrelor din perioada) fiecărui rezultat din ex. 15.44 îi corespunde un rezultat paralel în sistemul binar. De pildă, în dezvoltarea *binară*.

$$\frac{3}{5} = 0{,}\overline{1001}$$

lungimea perioadei este (5 − 1) și

$$1 + 0 = 1, \qquad 0 + 1 = 1.$$

15.47. Practică aritmetică de natură să pună la încercare judecata, practică de lucru cu fracții zecimale și cu descompuneri în factori. Substrat amplu: conceptul de număr real („Ce-ați putea spune despre dezvoltarea zecimală a lui $\sqrt{2}$ sau a lui π?"). Preludiu la teoria numerelor. La nivelul culturii generale: largi posibilități de raționament inductiv, chiar și de elaborare a unei teorii cuprinzătoare pornind de la o bază experimentală.

Luați un detaliu: ex. 15.45 oferă un prilej excepțional de oportun de a confirma o conjectură bazată pe date de observație, printr-o demonstrație, prin înțelegerea relației subiacente.

15.48. Vezi ex. 15.49.

15.49. În fig. 15.11, $t(n)$ este numărul de puncte cu abscisa n. Găsim că $t(n) = 1$ ntru 1, 2, 4, 8, 16.

Cînd p este un număr prim *impar*, $t(p) = 2$.

Dar chiar după aceste indicii semnificative (şi chiar după compararea fig. 15.11 fig. 15.12), s-ar putea să fie nevoie de multe experimentări şi de o oarecare perspicitate pentru a descoperi regula: *$t(n)$ este egal cu numărul de divizori impari ai lui n.* Cititorul ar trebui să demonstreze această regulă; următoarele remarci îi pot fi de los.

(1) Reprezentarea prezentată în ex. 15.49 este echivalentă cu ecuaţia

$$2n = r(r + 2a - 1)$$

(2) Dintre cei doi factori din dreapta, r şi $r + 2a - 1$, unul este par şi celălalt ıpar, iar factorul impar trebuie să fie un divizor al lui n.

(3) Factorul mai mic din cei doi este tocmai r, numărul de rînduri.

(4) Dacă n şi r sînt daţi, a este determinat univoc.

15.50. Folosim simbolul $\tau(n)$ cu definiţia din ex. 9.12. Regula distinge cinci cazuri.

(1) Dacă n este impar şi nu este pătrat, $s(n) = \tau(n)/2$.

(2) Dacă n este impar şi este pătrat, $s(n) = [\tau(n) + 1]/2$.

(3) Dacă n este par şi nu este divizibil cu 4, $s(n) = 0$.

(4) Dacă n este divizibil cu 4 şi nu este pătrat, $s(n) = \tau(n/4)/2$.

(5) Dacă n este divizibil cu 4 şi este pătrat, $s(n) = [\tau(n/4) + 1)]/2$.

Pentru a demonstra această regulă, observaţi că

$$n = (2a + 1) + (2a + 3) + \ldots + (2a + 2r - 1) = r(r + 2a).$$

Dacă n este divizibil cu 4, observaţi că

$$\frac{n}{4} = \frac{r}{2}\left(\frac{r}{2} + a\right).$$

15.51. Să comparăm proiectul prezentat aici cu cel discutat în ex. 15.47. În cazul faţă, problema este mai artificială, substratul mai puţin bogat, legea mai dificil de- icit, dar demonstraţia, deşi pune la încercare judecata, nu necesită decît foarte- ţine cunoştinţe preliminare; după părerea mea, proiectul merită pe deplin osteneala a fi realizat.

Fig. 15.11 dă un exemplu nebanal, instructiv, de relaţie binară (între cei doi tregi n şi r; n este suma a r întregi succesivi) şi de reprezentare a unei asemenea- aţii pe o diagramă. Pentru fig. 15.12, care reprezintă o relaţie binară mai bine- noscută şi mai importantă, vezi Leibniz, *Opuscules*, p. 580. Studierea acestor diagra- : ar putea constitui un preludiu util la introducerea noţiunii de „relaţie binară".

15.52. Mărimile cerute pot fi calculate fără folosirea explicită a calculului integral (principiul lui Cavalieri, regula lui Pappus). Ele sînt trecute în tabelul de mai jos

	Con dublu	Sfera	Cilindrul	
V	$\frac{2\pi a^3}{3}$	$\frac{4\pi a^3}{3}$	$2\pi a^3$	$1:2:3$
S	$2\sqrt{2}\,\pi a^2$	$4\pi a^2$	$6\pi a^2$	$\sqrt{2}:2:3$
A	$2a^2$	πa^2	$4a^2$	$2:\pi:4$
L	$4\sqrt{2}a$	$2\pi a$	$8a$	$2\sqrt{2}:\pi:4$
X_A	$\frac{a}{3}$	$\frac{4}{3\pi}a$	$\frac{a}{2}$	$\frac{X_A}{X_L}=\frac{2}{3}$
X_L	$\frac{a}{2}$	$\frac{2}{\pi}a$	$\frac{3}{4}a$	
	$S=\sqrt{2}\,\frac{dV}{da}$	$S=\frac{dV}{da}$	$S=\frac{dV}{da}$	
	$L=\sqrt{2}\,\frac{dA}{da}$	$L=\frac{dA}{da}$	$L=\frac{dA}{da}$	

Pentru o generalizare a observației în legătură cu X_A / X_L (care, în treacăt fie spus, a apărut în cursul unei discuții în clasă), vezi un articol al lui C. J. Gerriets și al autorului, în „American Mathematical Monthly", **66**, 1959, pp. 875—879.

15.53. Pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m+1} - \sqrt{m},$$

unde m este un întreg pozitiv care depinde de n. Demonstrație prin inducție matematică (de loc dificilă). Vezi „American Mathematical Monthly", **58**, 1951, p. 566.

Nu implică rezolvări: 15.23, 15.24, 15.39, 15.40, 15.54, 15.55.

Anexa II

PROBLEME

Problemele 1.19.1, 1.19.2 şi 1.19.3 (în această ordine) urmează aproximativ după ex. 1.19; problema 2.27.1 urmează după ex. 2.27 etc.

1.19.1. Triunghiul determinat de α, r, R.

[*Aţi putea imagina alte date mai potrivite pentru determinarea necunoscutei?* Aţi putea înlocui una din date cu o alta, mai convenabilă?]

1.19.2. Triunghiul determinat de a, h_a, r.

[*Aţi putea deduce din date vreun element util?*]

1.19.3. Triunghiul determinat de a, r, $a + b + c$.

2.27.1. *Cît a trăit Diofant?* Problema este propusă sub forma unei pretinse inscripţii pe mormîntul lui Diofant. Originalul este în versuri. (Cf. B.L. van der Waerden, *Science Awakening*, p.278.)

Iată mormîntul lui Diofant, iar piatra aceasta vă spune ce vîrstă a avut-a el — dacă îi stăpîniţi meşteşugul. Zeii i-au dat să trăiască o şesime din viaţă ca copil. După încă a douăsprezecea parte [din viaţă] a început să-i mijească barba. Şi a mai trecut o şeptime din viaţă pînă s-a însurat. După cinci ani de la nuntă i s-a născut un fiu. Dar, vai, fiul său iubit şi-a sfîrşit firul vieţii cînd a atins abia jumătate din anii pe care lui însuşi i-a fost dat să-i trăiască. După această grea pierdere, el şi-a căutat consolarea în matematică timp de patru ani, după care l-a ajuns şi pe el sorocul pămîntesc.

2.35.1. Din vîrful unui anumit triunghi, duceţi înălţimea, bise toarea şi mediana. Ştiind că aceste trei drepte împart unghiul α d acel vîrf în patru părţi egale, să se găsească α.

[Poate că aţi vrea să aflaţi şi forma triunghiului. Examinaţi c atenţie *fiecare parte a condiţiei.*]

2.40.1. Într-un triunghi dreptunghic sînt date lungimea ipot nuzei c şi aria A. Pe fiecare latură a triunghiului construiţi cîte u pătrat exterior triunghiului şi examinaţi figura convexă minimă ca conţine cele trei pătrate (formată, de pildă, de o bandă elastic bine întinsă, care le înconjură) : figura este un hexagon (este o figu neregulată, are cîte o latură comună cu fiecare din pătrate, iar u din celelalte trei laturi are, evident, lungimea c).

Calculaţi aria hexagonului.

2.40.2. Într-un triunghi dreptunghic, c este lungimea ipotenuz a, şi b sînt lungimile celorlalte două laturi, iar d este lungimea dia metrului cercului înscris. Demonstraţi că

$$a + b = c + d.$$

[*Reformulaţi problema*: Fiind date lungimile a, b şi c, să s calculeze d.]

2.50.1. Într-o problemă de geometrie în spaţiu analogă ex. 2.4

Începeţi prin a împărţi spaţiul tridimensional în cuburi egal

Prima reţea : Fiecare cub este asociat cu o sferă concentrică lu şi tangentă la toate cele şase feţe.

A doua reţea : Fiecare „al doilea" cub este asociat cu o sferă con centrică lui şi tangentă la toate cele 12 muchii. (Cu alte cuvinte dintre oricare două cuburi care au o faţă comună, unul trebuie s conţină centrul unei sfere asociate, iar celălalt — nu.)

Calculaţi (în procente) fracţiunea de spaţiu conţinută în sferel din cele două reţele.

2.52.1 O prăjitură, în formă de prismă dreaptă cu baza pătrată are deasupra şi pe cele patru feţe laterale un strat de cremă. Înălţimea prismei este 5/16 din latura bazei. Tăiaţi, prăjitura în 9 bucăţi în aşa fel încît fiecare să conţină o aceeaşi cantitate de prăjitură şi o aceeaşi cantitate de cremă. Una din bucăţi trebuie să fie o prismă dreaptă cu baza pătrată, cu cremă numai la partea de sus. Calculaţi raportul dintre înălţimea bucăţii şi latura bazei ei, şi daţi o descriere clară a tuturor celor 9 bucăţi.

2.55.1. Cinci dintre laturile unui tetraedru au aceeaşi lungime a, iar a şasea are lungimea b.

(1) Exprimaţi raza sferei circumscrise tetraedrului în funcţie de a şi b.

(2) Cum aţi folosi rezultatul (1) pentru a determina practic raza de curbură a unei suprafeţe sferice (a unei lentile)?

2.55.2. Atomul de carbon are patru valenţe pe care le figurăm orientate simetric în spaţiu. Din centrul unui tetraedru regulat trasaţi patru drepte la cele patru vîrfuri şi calculaţi unghiul inclus între oricare două dintre ele.

2.55.3. *Fotometrul.* O lampă L are intensitatea luminoasă I, o altă lampă L' are intensitatea luminoasă I', iar distanţa dintre ele d. Să se găsească poziţia unui ecran plasat în aşa fel (între cele două lămpi şi perpendicular pe linia care le uneşte) încît să fie egal iluminat pe cele două feţe.

(Dacă intensitatea luminoasă a unei surse punctiforme de lumină L este I, iluminarea unei suprafeţe care se află la distanţa x de L şi este perpendiculară pe dreapta care le separă este I/x^2. Pentru a înţelege mai bine toate acestea, imaginaţi-vă două sfere cu centrul în L: una are raza I, cealaltă are raza x.)

3.10.1. *Salvare.* Nava s-a dus la fund — poate însă că în „pîntecele" ei există ceva de preţ care merită să fie scos la suprafaţă. Planul nostru a eşuat — poate însă că există în el vreo idee care merită salvată.

În 3.2, primul nostru plan pentru calcularea lui S_2 (notaţiile din 3.1) a dat faliment în modul cel mai ruşinos: Procedeul care a funcţionat atît de bine pentru S_1 n-a dat absolut nimic cînd am încercat să-l aplicăm la S_2. În ce constă greşeala? Poate că am aplicat procedeul prea rigid? Ce-ar fi să-l aplicăm mai puţin rigid? Să-l aplicăm cu vreo (mică) modificare? Sau, să-l aplicăm la vreun alt caz?

Consideraţii de felul acesta conduc la tentative concrete, şi este cît se poate de firesc să încercăm să aplicăm procedeul în cazul sumei S_k. Care este elementul esenţial al procedeului? Combinarea a doi termeni egal depărtaţi de extremităţi: termenul de la o anumită „distanţă" faţă de unul din capete face pereche cu termenul situat la aceeaşi „distanţă" faţă de celălalt capăt. În cazul lui S_k, doi asemenea termeni sînt j^k şi $(n-j)^k$. Dacă adunarea lor nu dă nimic, poate că scăderea dă ceva — şi, în afară de aceasta, poate că am putea adapta „combinarea" celor doi termeni în funcţie de natura lui k:

$$(n-j)^k - (-j)^k = n^k - \binom{k}{1} n^{k-1} j + \binom{k}{2} n^{k-2} j^2 - \\ - \ldots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} n j^{k-1}.$$

Scriem expresia succesiv pentru $j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,n-1,n$:

$$n^k - (-1)^k 0^k = n^k$$

$$(n-1)^k - (-1)^k 1^k = n^k - \binom{k}{1} n^{k-1} 1 + \binom{k}{2} n^{k-2} 1^2 -$$

$$- \ldots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} n 1^{k-1}$$

$$(n-2)^k - (-1)^k 2^k = n^k - \binom{k}{1} n^{k-1} 2 + \binom{k}{2} n^{k-2} 2^2 -$$

$$- \ldots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} n 2^{k-1}$$

. . . . . .

$$1^k - (-1)^k (n-1)^k = n^k - \binom{k}{1} n^{k-1}(n-1) + \binom{k}{2} n^{k-2}(n-1)^2 -$$

$$- \ldots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} n(n-1)^{k-1}$$

$$0^k - (-1)^k n^k = n^k - \binom{k}{1} n^{k-1} n + \binom{k}{2} n^{k-2} n^2 -$$

$$- \ldots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} n n^{k-1}.$$

Adunînd şi folosind notaţiile din 3.3 (dar scriind S_0' în loc de $S_0 + 1$,) obţinem

$$S_k[1 - (-1)^k] = n^k S_0' - \binom{k}{1} n^{k-1} S_1 + \binom{k}{2} n^{k-2} S_2 -$$

$$- \ldots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} n S_{k-1}.$$

Analizaţi cazurile $k = 1,\ 2,\ 3$ ale acestui rezultat şi apoi încercaţi să-i evaluaţi posibilităţile în general.

3.40.1. În cîte moduri întregul pozitiv n poate fi scris ca sumă a unor întregi pozitivi? În cîte moduri n poate fi exprimat ca sumă a unui număr dinainte dat t de termeni (toţi — întregi pozitivi)? Se consideră că două sume care diferă între ele prin ordinea termenilor sînt diferite.

Este natural să începem investigarea unei asemenea probleme făcînd cîteva experienţe directe şi încercînd să aranjăm cît mai ordonat materialul astfel obţinut. Iată sumele obţinute pentru $n = 4$ şi $n = 5$.

4	$1+3$	$2+1+1$	$1+1+1+1$	
	$2+2$	$1+2+1$		
	$3+1$	$1+1+2$		
5	$1+4$	$3+1+1$	$2+1+1+1$	$1+1+1+1+1$
	$2+3$	$1+3+1$	$1+2+1+1$	
	$3+2$	$1+1+3$	$1+1+2+1$	
	$4+1$	$1+2+2$	$1+1+1+2$	
		$2+1+2$		
		$2+2+1$		

Sesizaţi vreo regularitate?
Verificaţi-vă conjectura!
Nu v-ar putea ajuta vreo figură geometrică?

3.40.2. *Numerele lui Fibonacci.* Adunînd numerele în lungul liniilor oblice din fig. A3.40.2, obţinem şirul numerelor lui Fibonacci

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

Să notăm cu F_n termenul cu numărul de ordine n, adică al n-lea număr Fibonacci; astfel, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_8 = 21$.

(1) Exprimaţi F_n în funcţie de coeficienţii binomiali.

(2) Demonstraţi că pentru $n = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

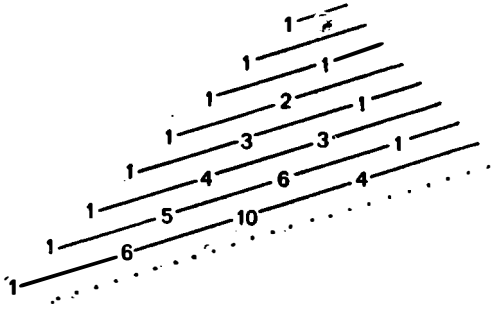


Fig. A3.40.2. O cale oblică spre ... Fibonacci

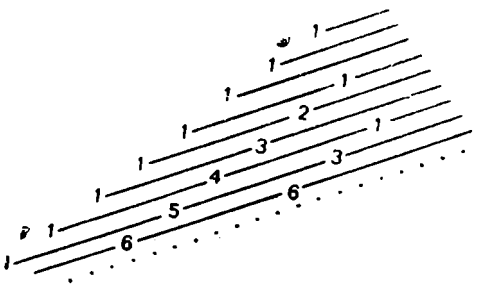


Fig. A3.40.3. Mai abruptă

3.40.3. (*Continuare.*) Şirul de numere

1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, ...

este generat într-un mod analog (vezi fig. A3.40.3). Fie G_n termenul al n-lea; astfel, $G_0 = 13$.

(1) Exprimaţi G_n în funcţie de coeficienţii binomiali.

(2) Demonstraţi că pentru $n = 4, 5, 6, \ldots$

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-3}$$

(3) Generalizaţi.

†**3.60.1.** Consideraţi tabelul

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & & 1\cdot 1 & & & = 1 \\
 & 1\cdot 3 - & 2\cdot 2 + & 3\cdot 1 & & = 2 \\
1\cdot 5 - & 2\cdot 4 + & 3\cdot 3 - & 4\cdot 2 + & 5\cdot 1 & = 3 \\
1\cdot 7 - & 2\cdot 6 + & 3\cdot 5 - & 4\cdot 4 + & 5\cdot 3 - 6\cdot 2 + 7\cdot 1 & = 4
\end{array}$$

Conjecturaţi legea generală sugerată de aceste exemple, exprimaţi-o cu o notaţie matematică convenabilă şi demonstraţi-o.

3.65.1. Dacă x şi n sînt doi întregi pozitivi, expresia

$$\frac{x^2(x^2-1)(x^2-4)\ldots[x^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!\,n}$$

reprezintă un întreg.

†**3.88.1.** O altă rezolvare mai simplă, în anumite privinţe, a ex. 3.86, foloseşte calculul diferenţial. Găsiţi-o.

†**3.88.2.** Observaţi că

$$\begin{array}{ll}
1\cdot 1 + 2\cdot 1 & = 3 \\
1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & = 8 \\
1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3 + 4\cdot 1 & = 20 \\
1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 + 4\cdot 4 + 5\cdot 1 & = 48 \\
1\cdot 1 + 2\cdot 5 + 3\cdot 10 + 4\cdot 10 + 5\cdot 5 + 6\cdot 1 & = 112
\end{array}$$

Conjecturaţi legea generală sugerată de aceste exemple, exprimaţi-o cu o notaţie matematică convenabilă şi demonstraţi-o.

4. 15.1. Definim y_k, pentru $k = 2, 3, 4, \ldots$, prin formula de recurenţă

$$y_k = \frac{y_{k-1} + y_{k-2}}{2}$$

şi notăm

$$y_0 = a, \quad y_1 = b.$$

Exprimaţi y_k în funcţie de a, b şi k.

5.19.1. *Examinînd soluţia* ex. 5.19, pentru a observa că numărul găsit are o interpretare simplă : este numărul de modalităţi de a alege v cutii dintr-un ansamblu de $(n + v)$ cutii. Ar trebui să reuşim să ne dăm seama de un fapt atît de simplu printr-un raţionament elementar.

Să ne imaginăm $n + v$ cutii aşezate într-un rînd — dacă vreţi, fiecare „ocupă" un subinterval de lungime 1 în intervalul $0 \leqslant x \leqslant n + v$. Ce are de-a face problema propusă cu operaţia care constă în a „marca" într-un mod oarecare v dintre aceste $(n + v)$ cutii?

6.13.1. Demonstraţi că nici unul din numerele şirului

$$11, 111, 1111, 11111, \ldots$$

nu este pătratul unui întreg.

6.17.1. „Cîţi copii aveţi, şi ce vîrstă au?" — întrebă oaspetele, un profesor de matematică.

„Am trei băieţi" — răspunde dl. Smith. „Produsul vîrstelor lor este 72, iar suma vîrstelor lor este tocmai numărul locuinţei noastre".

Oaspetele se duse şi privi numărul de la intrare, se întoarse şi zise : „Problema este nedeterminată". „Da, aşa-i" — admise dl. Smith, „dar eu sper totuşi că băiatul meu cel mare va cîştiga cîndva concursul de la Stanford".

Spuneţi ce vîrstă au băieţii, prezentînd şi o argumentaţie.

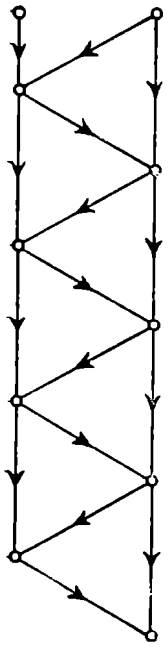


Fig. A7.2.1. Unde ați întîlnit „ceva" asemănător?

7.2.1. Diagrama din figura A7.2.1 are o interpretare care prezintă un anumit interes istoric. Știți care?

9.11.1. *Oricare dintre soluții este suficientă.* Arătați că există o pereche de serii divergente

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

cu termeni pozitivi, descrescători

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots \qquad b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$$

astfel încît seria

$$\min(a_1, b_1) + \min(a_2, b_2) + \ldots + \min(a_n, b_n) + \ldots$$

este convergentă. Ca de obicei, $\min(a, b)$ reprezintă numărul mai mic (cel care nu este mai mare) din perechea (a, b).

[Nu se cere să se enunțe toate perechile de serii care satisfac această condiție, ci numai una singură (una oarecare). Așadar, se poate aplica aici recomandarea lui Leibniz, citată în ex. 9.11: să îngustăm domeniul de căutare, fără însă a îngreuna prin aceasta dificultatea investigației.]

12.2.1. Demonstrați propoziția: Dacă o latură a unui triunghi este mai mică decît media (media aritmetică) a celorlalte două laturi, atunci unghiul opus este mai mic decît media celorlalte două unghiuri.

(Care sînt părțile principale? *Exprimați-le în limbaj matematic* folosind simbolurile obișnuite din trigonometrie.)

12.5.1. *Cunoștințe relevante.* Un patrulater cu laturile a, b, c, d și aria A este înscris (într-un cerc) și circumscris altui (cerc.) Atunci

$$A^2 = abcd.$$

[Demonstrarea acestei propoziții poate fi mai ușoară sau mai dificilă, după cum cunoașteți sau nu cunoașteți o anumită propoziție înrudită.]

12.9.1 *Cunoașteți o problemă înrudită?* Rezolvați următorul sistem de trei ecuații pentru necunoscutele x, y și z (a, b și c sînt date):

$$x^2y^2 + x^2z^2 = axyz$$
$$y^2z^2 + y^2x^2 = bxyz$$
$$z^2x^2 + z^2y^2 = cxyz$$

(Avem aici un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute. Sistemul de acest tip cel mai bine cunoscut este sistemul liniar: n-am putea oare „liniariza" sistemul propus? Căutînd, am putea da peste următoarea formulă:

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{a}{xyz}$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{b}{xyz}$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{c}{xyz}$$

care este liniară în x^{-2}, y^{-2}, z^{-2} *dacă* (ne permitem să visăm!) considerăm pe xyz drept o mărime cunoscută. Soluţia va fi de forma

$$\frac{1}{x^2}=\frac{A}{xyz}\cdots$$

şi deschide o nouă perspectivă — vedeţi care?)

12.9.2. *Să revenim la definiţii.* Considerăm trei cercuri f, f' şi v şi centrele lor, F, F' şi respectiv V. Cercurile f şi f' sînt fixe, v este variabil, f' şi v sînt interioare lui f dar sînt exterioare unul altuia. Demonstraţi propoziţia: Dacă cercul variabil v este tangent la ambele cercuri fixe f şi f', atunci locul geometric al centrului său V este o elipsă.

[Ce este elipsa?]

12.9.3. *Să explorăm împrejurimile.* Vă place problema precedentă (ex. 12.9.2)? Vă place rezolvarea ei? Atunci examinaţi-i cu atenţie „împrejurimile" — aţi găsit în pom un măr roşu şi gustos, trebuie să mai fie şi altele ...

Variaţi problema: Puteţi generaliza problema, sau puteţi considera cazuri particulare, sau cazuri-limită, sau cazuri analoge. Există şansa de a descoperi ceva interesant, precum şi şansa de a învăţa cum se face o investigaţie ştiinţifică.

Ar fi bine ca cititorul să găsească diferitele locuri geometrice pentru V care rezultă din următoarele modificări ale ipotezelor referitoare la cercurile fixe f şi f' şi la cercul variabil v.

(1) *Particularizare.* Cercurile f şi f' sînt concentrice.

(2) *Caz limită.* Fie f o dreaptă fixă, iar f' un punct fix; v este tangent la f şi trece prin $f'=F'$.

(3) *Analogie.* Două cercuri f şi f' sînt exterioare unul altuia, iar v este tangent la f şi f' într-un acelaşi mod: cercul v este fie exterior ambelor, fie le conţine pe amîndouă.

(4) Cazul limită al punctului (3). Fie f şi f' două puncte distincte şi fie că v trece prin ambele puncte.

Consideraţi şi alte cazuri particulare, limită sau analoge.

14.1.1. *Ani bisecţi.* Un an obişnuit are 365 zile, un an bisect, 366 zile. Anul n care nu este un an centenar este bisect dacă (şi numai dacă) n este un multiplu al lui 4. Un an centenar, adică un an n care este un multiplu al lui 100, este bisect dacă (şi numai dacă) n este un multiplu al lui 400. Astfel, 1968 şi 2000 sînt anii bisecţi, 1967 şi 1900 nu sînt. Aceste reguli au fost introduse de Papa Grigore al XIII-lea.

Pînă acum am vorbit exclusiv de anii „civili" care trebuie să conste dintr-un număr întreg de zile. Anul astronomic este perioada de timp în care Pămîntul execută o rotaţie completă în jurul Soarelui. Dacă regulile calendarului gregorian ar fi în concordanţă perfectă cu definiţia anului astronomic, care ar fi durata anului astronomic?

15.2.1. [15.5.]. Fie a, b şi c lungimile laturilor unui triunghi iar d — lungimea bisectoarei unghiului opus laturii de lungime c măsurată de la vîrf, pînă la latură.

(1) Exprimaţi pe d în funcţie de a, b şi c.

(2) Verificaţi expresia obţinută în cele patru cazuri ilustrate în fig. 15.2 — 15.5.

15.52.1. *Încă un proiect de lucrare de cercetare de nivelul şcolii medii* care ar putea fi propus şi ca temă parţială a unei lucrări de sfîrşit de an, la o clasă de profesori.

Un punct (x, y, z) din spaţiul tridimensional este specificat, în modul obişnuit, prin cele trei coordonate rectangulare x, y şi z.

Considerăm patru mulţimi de puncte C, O, I şi H. Fiecare mulţime este specificată printr-un sistem de inegalităţi (care poate consta şi dintr-o singură inegalitate): Din mulţime fac parte acele şi numai acele puncte ale căror coordonate satisfac simultan toate inegalităţile sistemului.

Iată cele patru sisteme de inegalităţi care definesc, fiecare în parte, cîte una din cele patru mulţimi:

(C) $\quad |x| \leqslant 1 \quad |y| \leqslant 1 \quad |z| \leqslant 1$

(O) $\quad |x| + |y| + |z| \leqslant 2$

(I) toate cele patru inegalităţi enumerate la (C) şi (O)

(H) $\quad |y| + |z| \leqslant 2 \quad |z| + |x| \leqslant 2 \quad |x| + |y| \leqslant 2$

Descrieţi detaliat natura geometrică a celor patru mulţimi, menţionaţi toate trăsăturile relevante (nu uitaţi simetriile) aranjîndu-le clar în tabele convenabil întocmite.

Descrieţi, de asemenea, relaţiile dintre cele patru figuri.

Calculaţi volumul V şi aria suprafeţei fiecărei figuri.

Ce generalizări vă sugerează această temă?

(Unele modele de carton v-ar putea fi de ajutor. Cf. ex. 2.50.1, *CRP*, pp.216, 219, 223, ex.8)

15.53.1. Observaţi, de asemenea, că

$$2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3}$$

$$(2 - \sqrt{3})^2 = \sqrt{49} - \sqrt{48}$$

$$(2 - \sqrt{3})^3 = \sqrt{676} - \sqrt{675}$$

$$(2 - \sqrt{3})^4 = \sqrt{9409} - \sqrt{9408}$$

încercaţi să generalizaţi şi să demonstraţi conjectura la care aţi ajuns.

REZOLVĂRI ŞI SOLUŢII

1.19.1. Din centrul cercului circumscris duceţi dreapta care trece prin una din extremităţile laturii a, precum şi perpendiculara pe latura a. În felul acesta, obţineţi un triunghi dreptunghic cu ipotenuza R, un unghi egal cu α şi cu cateta opusă de lungime $a/2$. În cazul nostru, R şi α sînt date, aşa că putem construi pe a. Construiţi triunghiul căutat din valoarea a găsită în felul acesta şi din valorile α şi r date iniţial, folosind ex.1.19.

1.19.2. Împărţiţi triunghiul dorit în trei triunghiuri unind centrul cercului înscris cu cele trei vîrfuri. Consideraţii privitoare la arii dau

$$\frac{1}{2} r(a + b + c) = \frac{1}{2} a h_a.$$

Aşadar, puteţi construi lungimea perimetrului $a + b + c$ pornind de la valorile date a, h_a şi r şi, în felul acesta, reduceţi problema propusă, la ex.1.19.3.

1.19.3. Din centrul cercului înscris, duceţi o dreaptă prin vîrful A şi o perpendiculară pe latura b (sau c). Obţineţi, în felul acesta,

un triunghi dreptunghic care are un unghi ascuţit egal cu $\alpha/2$, iar cateta opusă de lungime r. Notăm cu x cealaltă catetă. Însă

$$a + b + c - 2a = 2x$$

aşa că puteţi construi mai întîi pe x din valorile date $a + b + c$ şi a, şi apoi puteţi construi pe α din x şi din valoarea dată r. Construiţi triunghiul cerut din α obţinut în felul acesta şi din a şi r daţi iniţial, folosind ex.1.19.

2.27.1. Fie x vîrsta la care a murit Diofant. Din

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

găsim $x = 84$.

2.35.1. (Cf. „American Mathematical Monthly", **66**, 1959, p.208.) Fie β unghiul mai mare şi γ unghiul mai mic dintre cele două unghiuri rămase. Dacă β este unghiul ascuţit, cele patru drepte c, h_a, d, m_a, b care pleacă din vîrful A (notaţiile din ex.1.7) se succed în această ordine. Din triunghiurile dreptunghice în care h împarte triunghiul considerat

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{3\alpha}{4}.$$

Din triunghiurile în care m_a împarte triunghiul considerat

$$\frac{\frac{a}{2}}{m_a} = \frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\alpha}{4}\right)} = \frac{\sin\frac{3\alpha}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right)},$$

de unde

$$\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4} = \sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{3\alpha}{4}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin 3\,\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \pi - \frac{3\alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

2.40.1. (Stanford, 1965) Hexagonul constă din trei pătrate şi patru triunghiuri, şi aceste tringhiuri au aceeaşi arie A. Prin urmare, aria hexagonului este $2c^2 + 4A$.

2.40.2. (Stanford, 1963) Împărţiţi triunghiul dreptunghic dat în trei triunghiuri care au un vîrf comun în centrul cercului înscris în triunghiul dat. Din compararea ariilor rezultă

$$\frac{d}{2}\,\frac{a+b+c}{2} = \frac{ab}{2}$$

$$d = \frac{2ab}{a+b+c} = \frac{2ab(a+b-c)}{(a+b)^2 - c^2} = a + b - c.$$

2.50.1. $100\pi/6$ şi respectiv $100\pi\sqrt{2}/6$ sau, aproximativ, 52,36% şi 74,07% [cf. rezolvarea ex.15.52.1, punctul (6)].

2.52.1. (Stanford, 1964) Fie C prisma dată (prăjitura) şi D, prisma căutată (cu cremă numai pe partea de sus). Pentru latura bazei şi pentru înălţime, introducem notaţiile

s şi h pentru prisma C
x şi y pentru prisma D

Condiţiile care definesc pe D sînt exprimate de ecuaţiile

$$x^2 = \frac{s^2 + 4sh}{9}$$

$$x^2 y = \frac{s^2 h}{9}$$

$$h = \frac{5s}{16}$$

care dau

$$x = \frac{s}{2}, \quad y = \frac{5s}{36}, \quad \frac{y}{x} = \frac{5}{18}.$$

Tăiaţi pe D din C, astfel încît *fie* laturile, *fie* diagonalele părţii de sus a lui D să fie paralele cu laturile părţii de sus a lui C şi, în ambele cazuri, în aşa fel încît prismele C şi D să aibă aceleaşi patru plane de simetrie; aceste plane de simetrie comune taie restul din C în opt bucăţi identice care, au fiecare, acelaşi volum şi aceeaşi porţie de cremă ca şi bucata D.

2.55.1. (Stanford, 1962) Fie C centrul şi r raza sferei circumscrise. Există două „figuri-plane-cheie", două secţiuni ale tetraedrului, una prin muchia b şi punctul median al muchiei opuse, cealaltă prin această din urmă muchie şi punctul median al muchiei b. Aceste două secţiuni sînt perpendiculare una pe alta; intersecţia lor d uneşte cele două puncte mediane considerate şi conţine pe C.

Fie x distanţa, pe perpendiculară, de la C la b (cealaltă extremitate este punctul median al lui b) şi h înălţimea uneia din cele două feţe care sînt triunghiuri echilaterale; prin urmare

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Din triunghiuri dreptunghice în cele două secţiuni găsim ecuaţiile

$$h^2 = d^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$r^2 = (d - x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

şi acum avem patru ecuaţii pentru a determina cele patru necunoscute: h se obţine imediat din prima ecuaţie, apoi se calculează d din a doua ecuaţie. Este comod să se calculeze x după ce a fost calculat d (şi anume, scăzînd una din alta ultimele două ecuaţii). În cele din urmă

$$r = \frac{a^2}{4}\frac{4a^2 - b^2}{3a^2 - b^2}.$$

(*Verificaţi*: Dacă $b = a\sqrt{3} = 2h$, atunci $r = \infty$.)

O aplicaţie posibilă: Două triunghiuri echilaterale de latură a şi cu o latură comună cu funcţie de balama pot fi înclinate în aşa fel unul faţă de celălalt, încît toate cele patru vîrfuri să se afle pe o suprafaţă sferică concavă; atunci, măsurînd pe b, obţinem pe r. O lentilă convexă necesită un dispozitiv ceva mai complicat.

2.55.2. Dacă în ex. 2.55.1 luăm $a=b$, tetraedrul devine regulat

$$r^2 = \frac{3a^2}{8}$$

şi

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\alpha = 109°28'.$$

Acesta este unghiul care trebuie presupus între oricare două valenţe ale unui atom de carbon legat simetric (ca în molecula CH_4).

2.55.3. Fie x distanţa, măsurată pe perpendiculară, între L şi ecran. Atunci

$$\frac{I}{x^2} = \frac{I'}{(d-x)^2}$$

aşa că

$$x = \frac{d\sqrt{I}}{\sqrt{I} + \sqrt{I'}}.$$

(În practică, problema este oarecum alta: este dat I şi măsurăm d şi x; de aici, determinăm pe I'.)

3.10.1. Iată primele trei cazuri particulare:

$$2S_1 = n(n+1)$$
$$0 = n^2(n+1) - 2nS_1$$
$$2S_3 = n^3(n+1) - 3n^2S_1 + 3nS_2.$$

Cazul $k = 1$ dă evaluarea lui S_1 printr-o metodă care nu diferă decît foarte puţin de „metoda micului Gauss" (3.1).

Cazul $k = 2$ conduce tot la S_1, dar pe o cale ocolită.

Cazul $k = 3$ conduce la S_3, dacă sînt cunoscuţi în prealabil S_1 şi S_2.

În general, rezultatul permite calcularea lui S_k din valorile anterioare $S'_0, S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$ *cînd k este impar*, dar nu şi cînd k este par. Aceasta explică într-o anumită măsură (prin generalizarea unei modificări) de ce metoda care a reuşit pentru S_1 în 3.1 a dat greş pentru S_2 în 3.2. În afară de aceasta, comparînd rezultatul de aici cu 3.2 — 3.4 şi ex. 3.6 — 3.10, putem învăţa cîte ceva — cîndva, cuiva, s-ar putea să-i fie de folos, în cine ştie ce context ...

3.40.1. Nădăjduiesc că cititorul a examinat în cazurile $n = 1, 2, 3$.

Conjectură: Există $\binom{n-1}{t-1}$ moduri distincte de a reprezenta pe n ca sumă a t întregi pozitivi.

Cazurile $t = 1$, n sînt banale, cazurile $t = 2$, $n-1$ sînt aproape evidente. Pentru o demonstrație generală, să considerăm pe dreapta numerelor intervalul $0 \leqslant x \leqslant n$ și în acest interval, punctele $x = 1, ,2, 3, \ldots, n-1$. Alegînd oricare $(t-1)$ din aceste $(n-1)$ puncte în calitate de puncte de diviziune, împărțim intervalul în t subintervale succesive de lungimi întregi și, în felul acesta, construim pe n ca o sumă de t termeni succesivi de tipul cerut.

Pentru profesori: Problema și rezolvarea ei pot fi prezentate în mod foarte atrăgător cu ajutorul bastonașelor Cuisenaire.

3.40.2. Verificați relațiile pe fig. A3.40.2 pentru valorile n pentru care operația este posibilă.

(1) $F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots$

(2) Din formula de recurență [vezi 3.6(2); cf.ex.4.15. 3.40.3].

(1) $G_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-5}{2} + \ldots$

(2) Din formula de recurență.

(3) Modificarea pantei duce la șirul $y_1, y_2, y_3, \ldots$, care depinde de un parametru (panta, sau întregul pozitiv q) care satisface formula de recurență (ecuația cu diferențe, ex.4.14)

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-q}.$$

În cazul $q = 1$, panta este 0 și

$$y_n = 2y_{n-1}.$$

(Vezi ex. 3.32.)

3.60.1. Conjectură:

$$1(2n-1) - 2(2n-2) + 3(2n-3) - \ldots + (2n-1)1 = n.$$

Pentru a o demonstra, să examinăm coeficientul lui x^{2n-2} în produsul

$$\begin{aligned}
&(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots)(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots) \\
&= (1-x)^{-2}(1+x)^{-2} \\
&= (1-x^2)^{-2} \\
&= 1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \ldots + nx^{2n-2} + \ldots
\end{aligned}$$

3.65.1. (Cf. Stanford, 1963) Observați că

$$\frac{x}{n} = \frac{(x+n)+(x-n)}{2n}.$$

Așadar, expresia propusă este egală cu

$$\binom{x+n}{2n} + \binom{x+n-1}{2n}$$

iar coeficienții binomiali sînt numere întregi.

38.8.1. Derivați ambii membrii ai identității

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Ex. 3.87 și 3.88 pot fi tratate în mod similar.

3.88.2. Conjectură:

$$1\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \ldots + (n+1)\binom{n}{n} = (n+2)2^{n-1}.$$

(Dificultatea care trebuie depășită pentru a ajunge la această conjectură s-ar putea să conste în recunoașterea produselor $3 \cdot 1$, $4 \cdot 2$, $5 \cdot 4$, $6 \cdot 8$, $7 \cdot 16$.)

Pentru demonstrație, derivați mai întîi ambii membri ai identității

$$\binom{n}{0}x + \binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^{n+1} = x(1+x)^n$$

și apoi puneți $x = 1$.

4.55.1. Ecuația în r

$$2r^2 - r - 1 = 0$$

are rădăcinile $r = 1$ și $r = -1/2$. Prin urmare, după ex. 4.14,

$$y_k = c_1 + \frac{(-1)^k c_2}{2^k}.$$

Folosind ecuațiile inițiale (cazurile $k = 0$ și $k = 1$), obținem pe c_1, c_2 și, în final,

$$y_k = \frac{a+2b}{3} + (-1)^k \frac{a-b}{3 \cdot 2^{k-1}}.$$

5.19.1. Marcăm într-un fel oarecare (dacă vreţi, cu un semn al înmulţiri $\times$) v din cele $(n + v)$ cutii aşezate la rînd. În fiecare din cutiile care preced prima cutie marcată punem cîte un factor x_1, în cutiile nemarcate dintre „mărcile" nr. 1 şi nr. 2 punem cîte un factor x_2, în cutiile dintre „mărcile" nr. 2 şi nr. 3, factorul $x_3 \ldots$, în cutiile dintre „mărcile" nr. $(v - 1)$ şi v, factorul x_v, iar în fiecare din cutiile care urmează după ultima cutie marcată punem factorul 1. În felul acesta, fiecărei alegeri de v cutii din cele $(n + v)$ cutii disponibile îi corespunde un produs de forma $x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \ldots x_v^{m_v}$, cu $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_v \leqslant n$ şi deci, un termen al polinomului. Raţionamentul de mai sus constituie un raţionament intuitiv.

Cf. ex. 3.40.1.

6.13.1. (Stanford, 1949) Problema este următoarea: să se găsească un întreg pozitiv x, în aşa fel încît toate cifrele lui x^2 să fie 1.

(1) *Reţinem numai o parte* (o mică parte) *a condiţiei*: Ultima cifră a lui x^2 este 1. Deoarece ultima cifră a lui x^2 depinde numai de ultima cifră a lui x, este suficient să examinăm numerele de o cifră; pătratele lor sînt respectiv

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

[Remarcaţi că x^2 şi $(10 - x)^2$ au aceeaşi ultimă cifră.] Aşadar, pot fi alese numai cifrele 1 sau 9.

(2) *Să reţinem o parte* (partea imediat următoare, ceva mai mare) *a condiţiei*: Ultimele două cifre ale lui x^2 sînt 11. Este suficient să considerăm numerele de două cifre, iar dintre două numere x şi $100 - x$, este suficient să considerăm numai unul; şi astfel, în virtutea lui (1), este suficient să considerăm doar zece numere: 01, 11, 21, ..., 91. Nici unul din ele nu are ca pătrat un număr care să se termine cu 11 — ceea ce demonstrează afirmaţia.

Morală: Poate fi avantajos să transformăm o problemă „de demonstrat" într-o problemă „de aflat".

6.17.1. (Stanford, 1965) Se subînţelege că drept „vîrstă" admitem numai numere întregi de ani. Iată un tabel complet al descompunerilor lui 72 în trei factori întregi pozitivi, urmată fiecare de suma celor trei factori:

$1 \cdot 1 \cdot 72$	74	$2 \cdot 2 \cdot 18$	22
$1 \cdot 2 \cdot 36$	39	$2 \cdot 3 \cdot 12$	17
$1 \cdot 3 \cdot 24$	28	$2 \cdot 4 \cdot 9$	15
$1 \cdot 4 \cdot 18$	23	$2 \cdot 6 \cdot 6$	**14**
$1 \cdot 6 \cdot 12$	19	$3 \cdot 3 \cdot 8$	**14**
$1 \cdot 8 \cdot 9$	18	$3 \cdot 4 \cdot 6$	13

Singura sumă a celor trei factori care apare mai mult decît o singură dată este scoasă în evidenţă cu caractere grase (suma în cauză este 14). Remarca tatălui despre fiul cel mare introduce o distincţie între acele cazuri care, în rest, sînt la fel de eligibile : vîrstele copiilor sînt 8, 3 şi 3 ani.

7.2.1. Vezi ex. 3.91. Punctele reprezintă cantităţile

$$C_6 \qquad I_6$$
$$C_{12} \qquad I_{12}$$
$$C_{24} \qquad I_{24}$$
$$C_{48} \qquad I_{48}$$
$$C_{96} \qquad I_{96}$$

9.11.1. (Cf. „American Mathematical Monthly", **56**, 1949, pp.423—424.)
Alegeţi dinainte

$$\min(a_n, b_n) = \frac{1}{n^2}.$$

(Oricare altă serie convergentă cu termeni pozitivi descrescători ar fi la fel de bună.) Seriile

$$(1) + \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{42^2}\right) + \left(\frac{1}{42^2} + \cdots\right.$$

$$(1) + (1) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \ldots + \frac{1}{36}\right) + \frac{1}{43^2} + \cdots$$

sînt construite din „segmentele" corespondente indicate prin paranteze. În unul din segmente, fiecare termen este egal cu minimul dinainte ales ; în segmentul corespondent din cealaltă serie, toţi membrii sînt egali între ei, precum şi cu ultimul termen din segmentul precedent, iar suma lor este 1. În ambele serii, cele două tipuri de segmente alternează.

Aceste serii încă nu îndeplinesc complet condiţia enunţată : termenii descresc în sensul „$\geqslant$", nu în sensul „$>$". Dar modificarea necesară este uşor de introdus : În segmentele în care toţi termenii consecutivi sînt egali, scădem din ei termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice cu termenul iniţial şi cu raţia suficient de mici, în special cu suma $< 1/2$.

12.2.1. (Stanford, 1952) *Care este ipoteza?*

$$a < \frac{b+c}{2}.$$

Care este concluzia?

$$\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$$

care este echivalentă cu

$$2\alpha < \pi - \alpha$$

$$\alpha < \frac{\pi}{3}.$$

Element cunoscut relevant:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$> \frac{b^2+c^2-(b+c)^2/_4}{2bc}$$

$$= \frac{3(b^2+c^2)}{8bc} - \frac{1}{4}$$

$$\geqslant \frac{6bc}{8bc} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3},$$

ceea ce demonstrează afirmaţia.

12.5.1. (Julius G. Baron; vezi „Mathematics Magazine", **39**,1966, pp.134 şi 112.)

În esenţă, problema este: Să se găsească aria A a unui patrulater care este atît înscris, cît şi circumscris, fiind date laturile lui a, b, c şi d.

O problemă strîns înrudită cu aceasta a apărut în India acum 1200 ani. Aveţi toate şansele să vi-o reamintiţi dacă aţi auzit-o cîndva şi dacă vă întrebaţi cu toată buna-credinţă: (*Nu cumva*) *cunosc vreo problemă înrudită? (Nu cumva) cunosc vreo problemă cu acelaşi tip de necunoscută?*

Într-adevăr, problema aceea are aceeaşi necunoscută şi aceleaşi date cu problema propusă; ba chiar are jumătate din clauza cea mai pregnantă a condiţiei propuse; ea este: Să se găsească aria A a unui patrulater înscris cunoscînd laturile lui a, b, c şi d. Rezolvarea ei este (*MRP*, vol. I, pp. 291—292, ex.41.)

$$A^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d),$$

unde $2p = a + b + c + d$.

O dată în posesiunea acestei informaţii, este suficient să observaţi: dacă patrulaterul este circumscris şi latura a este opusă lui c, iar latura b este opusă lui d, atunci

$$a + c = b + d = p$$

12.9.1. Notăm

$$b + c - a = 2A \qquad c + a - b = 2B \qquad a + b - c = 2C$$

Atunci

$$\frac{1}{x^2} = \frac{A}{xyz} \qquad \frac{1}{y^2} = \frac{B}{xyz} \qquad \frac{1}{z^2} = \frac{C}{xyz}$$

Prin înmulţire, obţinem

$$xyz = ABC$$

aşa că

$$x^2 = BC \qquad y^2 = CA \qquad z^2 = AB.$$

Pentru o rezolvare completă, rămîne de discutat cazul în care una sau mai multe dintre necunoscutele x, y, z se anulează.

12.9.2. Definiţia curentă a elipsei face apel la focare. Considerarea acestei definiţii ne poate duce la întrebarea „Unde sînt situate focarele?" şi, în felul acesta, (în cele din urmă), la conjecturarea unei *propoziţii mai puternice, care este mai uşor de demonstrat*: În condiţiile date referitoare la f, f' şi v, locul geometric al lui V este o elipsă cu focarul în F şi F'. Într-adevăr, definiţia elipsei este satisfăcută. Aşa cum se vede uşor din figura

$$FV + F'V = r + r',$$

unde r este raza lui f, iar r', raza lui f'.

12.9.3. (1) Cerc concentric, de rază $(r + r')/2$. (2) Parabolă cu directoarea f şi focarul F'. (3) Hiperbolă cu focarele F şi F'. (4) Mediatoarea segmentului cu extremităţile, $f = F$ şi $f' = F'$.

Cîteva alte cazuri :

(5) Cazul-limită din ex. 12.9.2, sau de la punctul (3) : f' este un punct pe f, locul geometric este o dreaptă.

(6) Cazul particular al lui (3) : $r = r'$, locul geometric este o dreaptă.

Există şi alte întrebări.

În legătură cu (3) : Care este direcţia asimptotelor, care este punctul lor de intersecţie? Direcţia şi poziţia trebuie să fie determinate de cercurile fixe f şi f', dar cum? Şi, de ce?

În legătură cu (5) : Oare întreaga dreaptă este un caz-limită al unei elipse? Sau al unei hiperbole? Sau, o parte a dreptei este una, iar cealaltă parte — alta?

Şi aşa mai departe.

În atenţia profesorilor : Cazul în care f' este un punct, este foarte frumos prezentat în patru seriale *Animated Geometry*, de J. L. Nicolet.

14.1. Dacă 400 ani gregorieni consecutivi ar dura exact cît 400 ani astronomici, durata anului astronomic ar fi

$$\frac{97 \cdot 366 + 303 \cdot 365}{400} = 365 + \frac{97}{400}$$

zile, adică 365 zile, 5 ore, 49 minute şi 12 secunde, o durată care este cu numai 26 secunde mai lungă decît cea dedusă din observaţiile astronomice. Diferenţa este mică, dar în 3323 ani ar însemna totuşi o diferenţă de o zi.

15.2.1. (Cf. Stanford, 1964) (1) Segmentele în care d împarte latura c sînt proporţionale cu laturile adiacente. Prin urmare

$$\left(\frac{ac}{a+b}\right)^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos\frac{\gamma}{2}$$

Eliminarea directă a lui γ dă

$$d^2 = \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}$$

(2) Dacă $a = b = c$, atunci $d^2 = 3a^2/4$. Dacă $a^2 + b^2 = c^2$, atunci

$$\frac{d}{a\sqrt{2}} = \frac{b}{a+b}$$

ă această proporție poate fi esizată din triunghiuri asemenea șor de construit.

Dacă $a = b$, atunci

$$d^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Dacă $a + b = c$, atunci $= 0$.

15.52.1. Formularea problemei lasă multă libertate de acțiune și o face în mod intenționat: la început, problemele „reale" sînt, deseori, destul de nedeterminate. Detaliez cîteva puncte care merită să fie luate în considerare.

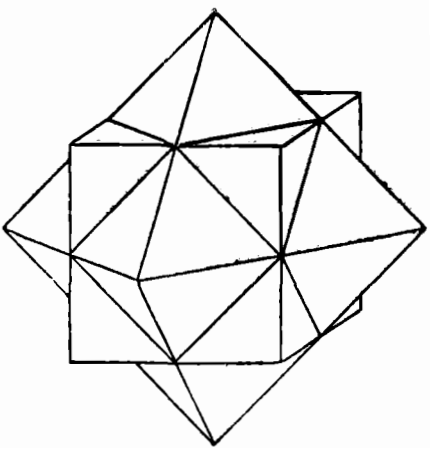


Fig. AS1. Pe C și pe O trebuie să-i vedeți, pe I și pe H trebuie să vi-i imaginați

(1) Punctele din fiecare mulțime umplu interiorul și suprafața unui *poliedru* (vezi fig. *AS*1, *AS*2, *AS*3).

C este un cub, fețele lui sînt pătrate.

O este un octaedru regulat, fețele lui sînt triunghiuri echilaterale. (Cf. ex. 5.5.)

I este *intersecția* lui C și O; se numește *cuboctaedru*. El are 14 fețe: șase fețe sînt pătrate tăiate din cîte o față a lui C, iar opt fețe sînt triunghiuri echilaterale tăiate din cîte o față a lui O.

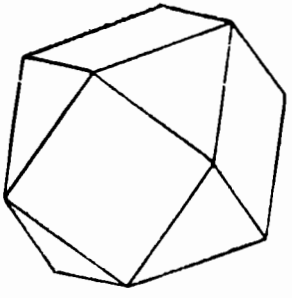


Fig. AS2. Intersecția I

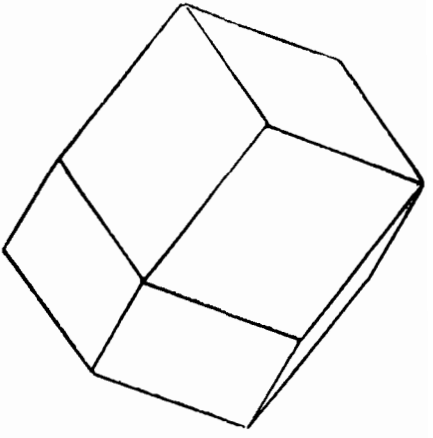


Fig. AS3. Înfășurătoarea convexă H

H conţine pe C şi pe O; într-adevăr, H este mulţimea convexă minimă care le conţine pe amîndouă, este *înfăşurătoarea convexă*. Feţele solidului sînt romburi şi corpul se numeşte *dodecaedru rombic*.

Trecem de la C la I tăind din C opt tetraedre identice.

Trecem de la C la H adăugînd lui C şase piramide identice.

(2) Enumerăm vîrfurile celor patru poliedre.

C $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

O $(\pm 2, 0, 0)$ $(0, \pm 2, 0)$ $(0, 0, \pm 2)$

I $(0, \pm 1, \pm 1)$ $(\pm 1, 0, \pm 1)$ $(\pm 1, \pm 1, 0)$

H vîrfurile lui C şi ale lui O.

(3) Tabelul de mai jos prezintă F, V şi E, numerele de feţe, vîrfuri şi respectiv muchii, pentru fiecare poliedru.

	F	V	E
C	6	8	12
O	8	6	12
I	$6 + 8$	12	24
H	12	$8 + 6$	24

(4) C, O şi I sînt înscrise în H. Opt dintre cele 14 vîrfuri ale lui H sînt vîrfurile lui C, iar restul de şase sînt vîrfurile lui O, centrele celor 12 feţe ale lui H sînt vîrfurile lui I.

Fiecare muchie a lui C este cuplată cu o muchie a lui O: ele se bisectează reciproc, ele sînt diagonalele unei aceleiaşi feţe a lui H, punctul lor de intersecţie este un vîrf a lui I.

(5) Toate cele patru poliedre prezintă acelaşi tip de simetrie; vom descrie simetria considerînd figura cea mai familiară, C.

În cub există două tipuri distincte de *plane de simetrie*:

Trei sînt paralele cu —, şi la mijlocul distanţei dintre — o pereche de feţe opuse ale cubului.

Şase trec prin cîte o pereche de muchii opuse.

Toate cele nouă plane de simetrie trec prin centrul cubului şi împarte cubul în 48 de tetraedre identice.

În cub există trei tipuri distincte de *axe de simetrie* (cf. *CRP*, ex. 8, pp. 216, 219, 223—224):

Şase unesc punctele mediane de pe cîte o pereche de muchii opuse, şi fiecare din ele este intersecţia a două plane de simetrie.

Patru unesc o pereche de vîrfuri opuse, şi fiecare dintre ele este intersecţia a trei plane de simetrie.

Trei unesc punctele mediane de pe cîte o pereche de feţe **opuse**, fiecare dintre ele este intersecţia a patru plane de simetrie.

Toate cele 13 axe de simetrie trec prin centrul cubului. Dacă axa este intersecţia a n plane de simetrie, atunci cubul rotit în jurul celei axe cu un unghi $360°/n$ coincide cu ele însuşi.

(6) Cele două reţele din ex. 2.50.1 implică pe C şi respectiv pe H. În prima reţea, fiecare sferă este înscrisă într-un cub şi toate aceste cuburi umplu întregul spaţiu, fără goluri şi fără întrepătrunderi. În reţeaua a doua, fiecare sferă este înscrisă într-un dodecaedru rombic, şi toate aceste dodecaedre rombice umplu tot spaţiul, fără goluri şi fără întrepătrunderi.

(7) Pentru a calcula volumul V [atenţie: notaţia este alta decît cea din (3)!] pentru I şi H, este avantajos să pornim de la C. Dacă poliedrul este circumscris sferei, atunci între V şi S există o legătură.

C	$S = 24$	$V = \frac{1}{3} 1 \cdot S = 8$
O	$S = 16\sqrt{3}$	$V = \frac{1}{3}\frac{2}{\sqrt{3}} S = \frac{32}{3}$
I	$S = 12 + 4\sqrt{3}$	$V = \frac{20}{3}$
H	$S = 24\sqrt{2}$	$V = \frac{1}{3}\sqrt{2}S = 16.$

(8) Aceste exemple pot fi folosite pentru a introduce cîteva noţiuni generale, de pildă, sisteme de inegalităţi, înfăşurătoare convexă, simetrie în spaţiu etc.

Cîteva chestiuni mai particulare: Există şi alte perechi de poliedre legate între ele aşa cum sînt legate C şi O? Alte poliedre care umplu spaţiul? Etc.

15.53.1. Fie a, b şi D întregi pozitivi, unde D nu este un pătrat perfect, legaţi între ei prin relaţia

$$a^2 - b^2 D = 1.$$

De pildă, $a = 2$, $b = 1$, $D = 3$. Fie n un întreg pozitiv; atunci există întregi A şi B astfel încît

$$(a - b\sqrt{D})^n = A - B\sqrt{D}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{D})^n &= A + B\sqrt{D}\\ A^2 - B^2D &= (a + b\sqrt{D})^n(a - b\sqrt{D})^n\\ &= (a^2 - b^2D)^n\\ &= 1\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}(a - b\sqrt{D})^n &= \sqrt{A^2} - \sqrt{B^2D}\\ &= \sqrt{A^2} - \sqrt{A^2 - 1}.\end{aligned}$$

Nu este nevoie decît de o foarte mică modificare pentru a generaliza în mod similar ex.15.53, sau pentru a-l contopi cu problema de faţă într-o generalizare comună.

Bibliografie

I. CLASICI

Euclid, *Elemente*. („Euclid III 20" se referă la Propoziția 20 din Cartea a III-a a *Elementelor*.) În românește, *Elementele* au fost trad. de V. Marian și au apărut în „Biblioteca istorică a Gazetei matematice", 1939—1941.

Pappus Alexandrinus, *Collectio*, editată de F. Hultsch, 1877; vezi vol. 2, pp. 634—637 (începutul Cărții a VII-a).

Descartes (1) *Oeuvres*, editate de Charles Adam și Paul Tannery, Paris, 1908.

(2) *Reguli utile și clare pentru îndrumarea minții în cercetarea adevărului*, trad. de C. Vilt, Ed. Științifică, București, 1964; (pentru observații în legătură cu *Regulile pentru îndrumarea minții* — lucrare deosebit de interesantă pentru noi — și pentru modul cum s-au făcut citările din ea, vezi ex. 2.72).

(3) *Discurs asupra metodei*, Ed. Științifică, București, 1957.

Leibniz (1) *Mathematische Schriften*, editate de C. J. Gerhardt.

(2) *Philosophische Schriften*, editate de C. J. Gerhardt.

(3) *Opuscules et fragments inédits*, editate de L. Couturat.

Bernard Bolzano, *Wissenschaftslehre*, ed. a II-a, 1930; vezi vol. 3, pp. 293—575 (Erfindungskunst).

II. MAI MODERNI

E. MACH, *Erkenntnis und Irrtum*, ed. a IV-a, Leipzig, 1924; vezi pp. 251—274 *et passim*.

J. Hadamard, *Leçons de Géométrie plane*, Paris, 1898; vezi nota A, *Sur la méthode en géométrie*.

F. Krauss, Denkform mathematischer Beweisführung, *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, vol. 63, pp. 209—222.
Werner Hartkopf, *Die Strukturformen der Probleme*; Disertație, Berlin, 1958.
I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, „The British Journal for the Philosophy of Science", vol, 14, 1963, pp. 1—25, 120—139, 221—245.
Franz Denk, Werner Hartkopf, George Pólya, *Heuristik*, „Der Mathematikunterricht", vol. 10, 1964, partea I.

III. LUCRĂRI CONEXE ALE AUTORULUI

Cărți

1. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 2 vol; ed. a II-a, Berlin, 1954; împreună cu G. SZEGÖ.
2 *How to Solve It*; ed. a II-a, 1957; Anchor Book A 93, Doubleday. În românește: *Cum rezolvăm o problemă?*, Ed. Științifică, București, 1965. (Citată sub forma *CRP*; referințele privesc paginile din ediția în limba română dar, pentru comoditate, se dă și titlul paragrafelor.)
3 *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton, 1954. În două volume, intitulate *Induction and Analogy in Mathematics* (vol. I) și *Patterns of Plausible Inference* (vol. II). În românește: *Matematica și raționamentele plauzibile*, vol. I: *Inducția și analogia în matematică*, vol. II: *Scheme de inferențe plauzibile*, Ed. Științifică, București, 1954. (Citată sub forma *MRP*).
4 *Mathematical Methods in Science*, lecții editate de Leon Bowden, School Mathematics Study Group Studies in Mathematics, vol. XI.

Articole

1 *Geometrische Darstellung einer Gedankenkette*, „Schweizerische Pädagogische Zeitschrift", 1919, 11. pp.
2 *Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben?*, „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht", **63**, 1932, pp. 159—169.
3 *Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben?* „Acta Psychologica", **4**, 1938, pp. 113—170.
11 *Die Mathematik als Schule des plausiblen Schliessens*, „Gymnasium Helveticum", **10**, 1956, pp. 4—8 reproduse în „Archimedes", **8**, 1956, pp. 111—114. *Mathematics as a Subject for Learning Plausible Reasoning*; traducere de C. M. Larsen, „The Mathematics Teacher", **52**, 1959, pp. 7—9.
12 *On picture-writing*, „American Mathematical Monthly", **63**, 1956, pp. 689—697.
13 *L'Heuristique est-elle un sujet d'étude raisonnable?*, „La Méthode dans les Sciences Modernes" („Travail et Méthode", număr hors-série), 1958, pp. 279—285.
14 *On the Curriculum for Prospective High School Teachers*, „American Mathematical Monthly", **65**, 1958, pp. 101—104.

15. *Ten Commandments for Teachers*, „Journal of Education of the Faculty and College of Education, Vancouver and Victoria", nr. 3, 1959, pp. 61—69.
16 *Heuristic Reasoning in the Theory of Numbers*, „American Mathematical Monthly", **66**, 1959, pp. 375—384.
17 *Teaching of Mathematics in Switzerland*, „American Mathematical Monthly", **67**, 1960, pp. 907—914; „The Mathematics Teacher", **53**, 1960, pp. 552—558.
18 *The Minimum Fraction of the Popular Vote that can elect the President of the United States*, „The Mathematics Teacher", **54**, 1961, pp. 130—133.
19 *The Teaching of Mathematics and the Biogenetic Law*, „The Scientist Speculates", sub redacția lui I. J. Good, 1962, pp. 352—356.
20 *On Learning, Teaching, and Learning Teaching*, „American Mathematical Monthly", **70**, 1963, pp. 605—619.
(Numerele omise sînt citate în *MPR*, vol. I, p. 324 și vol. II, p. 221.)

IV. PROBLEME

Unele dintre problemele propuse spre rezolvare sînt reproduse din „Stanford University (Stanford-Sylvania) Competitive Examination in Mathematics". Acest fapt este indicat la începutul rezolvării, împreună cu anul în care a fost propusă problema, sub forma „Stanford, 1957". Cele mai multe din aceste probleme (unele, împreună cu rezolvările respective) au apărut în „The California Mathematics Council Bulletin".

Culegerea *The USSR Olympiad Problem Book*, de Shklarsky, Chentzov și Yaglom (trad. engleză editată de J. Sussman, San Francisco, 1962) conține numeroase probleme elementare interesante și dificile propuse în *U.R.S.S.* la olimpiade de matematică.

Hungarian Problem Book, „New Mathematical Library", vol. 11—12, conține probleme elementare interesante, rezolvări detaliate, note instructive în legătură cu subiectele tratate și observații asupra unui concurs de matematică care a contribuit esențial la dezvoltarea matematicii în Ungaria.

V. ÎN LEGĂTURĂ CU METODOLOGIA PREDĂRII

On the Mathematics Curriculum of the High School (memorandum cu 65 semnături), „American Mathematical Monthly", **69**, 1962, pp. 189—193; „The Mathematics" Teacher", **55**, 1962, pp. 191—195.

Martin Wagenschein, *Exemplarisches Lehren im Mathematikunterricht*, „Der Mathematikunterricht", **8**, 1962, partea a IV-a.

A. I. Wittenberg, *Bildung und Mathematik*, Stuttgart, 1963.

A. I. Wittenberg, Soeur Sainte-Jeanne-de-France, F. Lemay, *Redécouvrir les mathématiques*, Neuchâtel, 1963.

Roy Dubisch, *The Teaching of Mathematics*, New York, 1963. Conține și o bogată bibliografie adnotată cu lucrări apărute recent în limba engleză.

Indice

Acest indice conţine, pe lîngă referiri la lucrarea de faţă, şi referiri la unele pasaje paralele din lucrările mele conexe. Pentru a deosebi cele patru volume de care este vorba, au fost folosite simbolurile:

CRP pentru *Cum rezolvăm o problemă?*, ediţia românească.

MRP, I pentru *Matematica şi raţionamentele plauzibile*, vol. I, *Inducţia şi analogia în matematică*, ediţia românească.

MRP, II pentru *Matematica şi raţionamentele plauzibile*, vol. II, *Scheme de inferenţe plauzibile*, ediţia românească.

Paginile din *Descoperirea în matematică* (volumul de faţă) sînt citate fără nici o specificare.

Numerele se referă la paginile din ediţiile în limba română.

Cursivele au fost folosite pentru a scoate în evidenţă unele sentinţe al căror rol este discutat în cap. 12.

Indexul NU dă (şi nici n-ar putea da, cu un efort rezonabil) trimiteri exhaustive la teme tratate aproape permanent în toate cele 4 volume, cum ar fi „Analogie", „Generalizare", „Conjectură", „Inducţie", „Necunoscută" etc.

Abel 419
Abstractizare 46, 74
Ajutor intern, ajutor extern *CRP*, 33—55; 334—336
Alternant, procedeu, *vezi* Procedeu
Am folosit toate datele? (întreaga condiţie, întreaga ipoteză)? *CRP*, 65—67, *MRP*. 181—182, 190—191; 30, 126, 273

Amuzamente (matematice) *CRP*, 88—89, 95—96; 56—57, 62—63, 163—165, 171—173, 176, *vezi şi* Jocuri
Analiza, *vezi* Schema procedeului descendent
Analogie, *CRP*, 57—65; *MRP*, I, 27—53; *MRP*, II, 13—18, 27—28; 225, 238, 277, 320, 349
  între coeficienţii binomiali şi cei polinomiali 108
  între geometria plană şi geometria în spaţiu *CRP*, 38—45; *MRP*, I, 42, 65—66; 25—26,68—69, 104, 277, 302
  între triunghiul lui Pascal şi triunghiul lui Leibniz, 109—110
  cu teorema lui Heron, 62
  cu teorema lui Pitagora, *CRP*, 22—35; 50, 62
  vezi, de asemenea, Generalizare, particularizare şi analogie
Anticipare, 76
Aproximaţii succesive, 41
Arhimede, *CRP*, 58; *MRP*, I, 185—189, 198—199; 55, 61, 75, 121, 215, 364

Bernoulli, Jacques 95
Bolanzo, Bernard, *CRP*, 67; 485
Buridan 368

Cavalieri 458
Ce avem? Ce este dat? CRP, 197—199; 184, 267
  vezi, de asemenea, Date; Necunoscuta, datele, condiţia; Ipoteza; Ipoteza şi condiţia
Ce se poate face cu astfel de obiecte (date, ipoteza), *CRP*, 197—199; 214, 269—270
  vezi, de asemenea, Date, deducem ceva util din ~
Ce urmărim? Ce căutăm? CRP, 67—68; 184, 229, 267
  vezi, de asemenea, Necunoscuta; Examinăm necunoscuta; Necunoscuta, datele, condiţia; Concluzia; Ipoteza şi concluzia
Concluzie, *CRP*, 161; 146, 268
  cum putem demonstra *o astfel de* ~ 208, 218
Condiţia, *CRP*, 75; 16, 143, 155—159, 231—232, 267
  clauza cu care începem 165—169, 175—176, 180—181
  clauza majoră a ~ 167
  clauzele ~ 16, 147
  exprimarea prin ecuaţii a ~, *vezi* Schema cartezianã
  folosirea întregii ~, *vezi* Am folosit toate datele?, *vezi, de asemenea,* Necunoscuta, datele, condiţia
  împărţirea (subdivizarea) ~ 18, 32, 43, 155—159, 177
  redundantă 60
  reţinem numai o parte a ~ *CRP*, 161—162; 16, 30, 49, 175, 232
  suficientă, sau insuficientă, pentru a determina necunoscuta, *CRP*, 154; *MRP*, I, 235—237; 31, 57—58, 71, 73, 75—76
Conjectura („ghicirea" deliberată) *MRP*, I, II *passim;* 51, 63, 100, 118, 268, 299, 320, 342—371
  analizăm ~ 356—357, 370
  vezi, de asemenea, Generalizarea, Inducţia
Contraexemplu, *CRP*, 149—150; 235—237
Cum putem obţine ACEST tip de obiect (necunoscută, concluzie)? 51, 52, 134, 186, 187, 213, 269, 278
  vezi, de asemenea, Problemă cu acelaşi tip de ~, sau cu un tip similar de necunoscută; Teoremă cu aceeaşi concluzie, sau cu o concluzie similară
Cunoaştem vreo problemă înrudită? CRP, 75—76; 270

Dacă nu putem rezolva problema propusă, *CRP*, 76; 23, 88, 185
Dante, *MRP*, I, 200; 240
Date, *CRP*, 161; 15, 143, 153, 267
deducem ceva util din ~ *CRP*, 197—199; 21; 213
pentru a determina *acest* tip de necunoscută 275—276
varierea ~ *CRP*, 132—135, 205; 23, 48, 125
vezi, de asemenea, Necunoscuta, datele, condiția
Definiție, *CRP*, 77—82; 271, 273
Denk, Franz, 337, 486
Descartes, *CRP*, 82; *MRP*, II, 24, 167; 14, 36,37, 73, 74, 75, 140, 155, 182, 266, 267, 485
despre poliedre, *MRP*, I, 77—78; 354
Reguli pentru îndrumarea minții 36, 42—44, 73—74, 75—76
Deus ex machina, *MRP*, II, 171—173; 82, 316
Din senin, *CRP*, 74; 94; *MRP*, II, 172—173; 82
Duncker, Karl, *CRP* 100; 253, 256, 261

Einstein, 294
Euclid, *MRP*, I, 31; 15; 143, 147, 153, 195, 485
Euler, *MRP*, I, 17, 24, 33—39, 48—53, 115—129, 132—134; *MRP*, II, 11—13, 113; 63—64, 72
despre poliedre, *MRP*, I, 54—63, 72—79; 354—355
Examinăm necunoscuta, *CRP*, 191—197; 278
vezi, de asemenea, Problemă cu același tip de necunoscută, sau cu o necunoscută de tip similar
Există oare o soluție? *CRP*, 154; 268
vezi, de asemenea, Condiție suficientă, sau insuficientă, pentru a determina necunoscuta
Fapt și conjectură, 370
Fapte-cheie, 271, 276
Fejes-Tóth, 365
Fibonacci, 67
numerele lui ~ 133
Figură-cheie, 394
Flexibilitate, *MRP*, II, 176; 219
Formula prismoidului, 134—135
France, Anatole, 341

Galilei, *MRP*, I, 23, 228—231; 133, 319
Gauss, *MRP*, I, 80; 78
Generalizare *CRP*, 106—107; *MRP*, I, 27—33, 39—40; *MRP*, I — II, *passim;* 65, 70, 80, 83, 98, 102, 104, 109, 135, 136, 320, 352
formulare generală avantajoasă, 88
litere în loc de numere, *CRP*, 107; 39, 61, 389
observăm și generalizăm, *CRP*, 218; *MRP*, I, 144—146; 96, 105, 344, 351
Generalizare și particularizare, 238
Generalizare, particularizare și analogie, *MRP*, I, 27—33; 238, 270, 320
„Ghicire" (deliberată), *vezi* Conjectură
Gîndire productivă, gîndire creatoare, 278—279, 289—290
Goldbach, *MRP*, I, 19; 146

Hadamard, *CRP*, 82, 100; 137, 485
Hartkopf, Werner 10, 337, 486
Hermite, Charles, 342
Heron, teorema lui ~ 345—348
vezi, de asemenea, Analogie cu ~
Hilgard, F. R. 292
Hobbes, 204, 228.

Idee strălucită, *CRP*, 108—110; 28, 38, 80, 240—248
Independență și compatibilitate, 75—76
Inducție, *CRP*, 120—126; *MRP*, I, 17—26; *MRP*, I—II, *passim;* 113, 342—372, 412

observăm şi explicăm regularităţi, *CRP*, 218; *MRP*, I, 11—112; 116, 344, 420, 421, 456
schema inductivă fundamentală (silogismul euristic), *CRP*, 116—120, *MRP*, II, 7—9 *et passim*
verificare (în cazuri particulare, a unor consecinţe), *CRP*, 148—149; 114, 345—348, 352—353
vezi, de asemenea, Generalizarea, observăm şi generalizăm
Inducţia matematică, *vezi* Schema ~
Inerţie mintală, 81
Interpretare, 46, 61
mecanică, *MRP*, I, 177—179
nouă interpretare, *MRP*, I, 179—182
optică, *MRP*, I, 172—177
Ipoteză, 146
din care putem deduce *această* concluzie, 276
Ipoteza şi concluzia, *CRP*, 161; 146, 150, 153, 231, 267, 285
Istoricul unor rezolvări („dosar biografic") 7, 22

James, William, *CRP*, 100; 141
Jocuri, 157—158, 163—165, 175, 216—217, 248, 445; *vezi* şi Amuzamente matematice

Kant 291, 296
Kepler, *MRP*, I 27, 231—233; 319, 456
Keynes, J. M. 362
Kohler, Wolfgang, *CRP*, 100; 220
Krauss, F., *CRP*, 100; 486

Lagrange, 127, 427
Lakatos, Imre, 237, 324, 486
Leibniz, *CRP*, 130; *MRP*, I, 47; 63, 104, 109, 110, 112, 135, 151, 176, 235, 249, 291, 370, 485
Lewis Carroll, 58
Lichtenberg, Georg, 248, 291, 295
Limbaj algebric (matematic), *CRP*, 170—173; 39, 275, 320
figurilor geometrice 275, 320—321
Lindemann, F. 152
Loc (geometric), 17, 18, 152
Loewner, Charles, 342
Lucrăm ascendent, de la date spre necunoscută, *vezi* Schema procedeului ascendent
Lucrăm descendent, de la necunoscută spre date, *vezi* Schema procedeului descendent
Lucrăm din interior, din exterior 262—263, 271

Mach, Ernest, *CRP*, 100; *MRP*, I, 135; 485
Mariotte, 242
Metafore, 182
Metoda, *vezi* Schema, Rezultat sau metodă
Mobilizare şi organizare, *CRP*, 167—170; 75, 253, 262
diagrama (Cum gîndim) 257
Multitudinea căilor de acces (modurilor de a aborda problema) 95, 104, 134

Necunoscută, *CRP*, 67—68; 15, 143, 267
auxiliară, *CRP*, 91, 156; 47, 189
cum găsim *acest tip* de ~, *CRP*, 191—196; 51, 52, 134, 186, 187, 213, 269, 276
multicomponentă, 147
multipartită, 147
operaţională, 151
Necunoscuta, datele, condiţia, *CRP*, 167, 161; 17, 19, 23, 24, 42, 143—145, 150, 267, 286
Newton, *MRP*, I, 44, 112; 63—66, 71, 112—113, 250, 280, 419, 456

Paine, Thomas, 247
Pappus, *CRP*, 142—148; 22, 458, 485
Partea sugerează întregul, 260—261, 348
Particularizare, *CRP*, 148—153, *MRP*, I, 27; 320
caz particular călăuzitor, *MRP*, I, 40—41; 129, 137
caz particular echivalent cu cazul general, *MRP*, I, 41; 99
caz particular extrem, *CRP*, 150—152; *MRP*, I, 40
caz particular imediat următor, 84
caz particular reprezentativ, *MRP*, I, 41; 98, 407
interpretare concretă, *CRP*, 153
situaţie specială, 125, 128
vezi, de asemenea, Generalizare, particularizare şi analogie
Pascal, 86, 90—92, 109, 110, 405
Pitagora, teorema lui ~, *vezi* Analogie
Planificarea progresivă, *vezi* Schema procedeului ascendent
Principiul genetic, 331—332
Principiul raţiunii non-suficiente, *MRP*, I, 220—222; 361—362
Problemă, 141—142
auxiliară, *CRP*, 155—160; 31, 220—239, 288
auxiliară echivalentă, *CRP*, 157—159; 221—223
auxiliară mai ambiţioasă, sau mai puţin ambiţioasă, *CRP*, 159—160; 223—225
auxiliară mai depărtată, 225—226
considerăm ~ aproape rezolvată, *MRP*, I, 156
considerăm ~ deja rezolvată, *CRP*, 146—147; 18—20, 24, 28, 43, 56, 391
cu acelaşi tip de necunoscută, sau cu o necunoscută de tip similar, *CRP*, 191—196; 229—231, 272, 276, 277—278, 287
de aflat, *CRP*, 160; 143—145, 158
de demonstrat, *CRP*, 160—162; 143, 145—146
degajăm ~, 74—75
echivalentă, *CRP*, 159—160; 16, 150, 222
formularea ~, 122—123, 298, 302
înrudită, *CRP*, 75—76, 107; 185, 270
înrudită şi mai simplă, 88
înrudită şi rezolvată anterior, *CRP*, 75—76, 107—108; 134, 229
părţile principale ale ~, *CRP*, 161; 146, 147, 286
rezolvăm o parte a problemei propuse, *CRP*, 86; 18, 19, 20, 24, 56, 63
Procedeu alternant, 236—237
Program, 207, 210—211
Proximitate, *CRP*, 191—192; 250—251
Punct de sprijin („piatră de sprijin") *CRP*, 85, 153; 20, 22, 24, 26, 27
Punerea în ecuaţie, *vezi* Schema carteziană

Raţionament riguros, *CRP*, 68—74; 322—326
Realizăm planul, să ne ~, *CRP*, 188, 215
Recurenţă, formula, *MRP*, I, 118, 128, 130; 92, 108, 421—422
Reducere 17, 18
ad absurdum, *CRP*, 177—184
bilaterală, *CRP*, 157; 221—222
convertibilă, *vezi* bilaterală
echivalentă, *vezi* bilaterală
unilaterală, *CRP*, 159—160; 223—225
Reformulăm problema, *CRP*, 97, 131; 198, 274—275
Regresivă, planificarea ~, *vezi* Schema procedeului descendent
Reguli 280—281, 290
ale predării 297—300, 311
ale raţionamentului plauzibil, *MRP*, II, 128—131

de „făcut" descoperiri, *CRP*, 172; 280—290
de preferinţă, 284—285
Relevante, cunoştinţe, *CRP*, 165, 161, 168; 45, 55, 75, 271—272, 386
Retrospectivă, discuţie, *CRP*, 28—32; 299
Rezolvare, *vezi* Soluţie
Rezultatul sau metoda, *CRP*, 31; 101, 120, 130, 482

Schema, carteziană, *CRP*, 170—173; 36—37, 41—44, 155—159
celor două locuri 16—17, 18—19, 28, 32, 159—165
celor trei locuri 32—33
coeficienţilor nedeterminaţi, 115—116
figurilor asemenea, *CRP*, 40—41; 22—23, 28
figurilor auxiliare, *CRP*, 102—105; 27—28
inducţiei matematice, *CRP*, 120—126; *MRP*, I, 135—137; 92—95, 103
procedeului ascendent 189, 199—200, 212—215
procedeului descendent, *CRP*, 185—191; 195—198, 204—206, 212—215, 230
recurenţei, 85—87, 69—73
superpoziţiei, 129, 130
Schur, I, 342
Shaw, Bernard, 331—332
Simetrie, *CRP*, 206—207; *MRP*, I, 221—222; 181, 210, 361—365, 440, 441
Simpson, regula, 136
Sinteză, *vezi* Schema procedeului descendent
Socratic(ă) (metoda, dialogul), 296, 297, 300, 386
Soluţie, *CRP*, 208; 144, 152—153
revenind asupra ~, *CRP*, 28—33; 31—32
vezi, de asemenea, Retrospectivă, discuţie ~
Spinoza, 332
Subproblemă, *vezi* Problema auxiliară
Sussman, J, 487
Szegő, G, 333, 487

Teoremă (propoziţie), 145—146
demonstrarea, sau infirmarea ~ *CRP*, 160—161; 145—146, 325
mai puternică (temei posibil, bază de demonstrare posibilă), *MRP*, I, 7—13, 24—25; 232
cu aceeaşi concluzie, sau cu una similară, *CRP*, 196—198; 231, 272, 276, 277, 287
Trecere continuă 23, 54

Verificăm conjectura, *vezi* Conjectură, examinăm ~
Visăm, ne permitem să ~, 19—22
Wagenschein, Martin, 319, 487
Wallis, 113
Weyl, Hermann, 324
Wittenberg, A. I., 319, 487

Zermelo, 340—341

Cuprinsul

PREFAȚĂ 5
INDICAȚII ȘI RECOMANDĂRI PENTRU CITITOR 11

PARTEA ÎNTÎI — SCHEME

CAPITOLUL 1. SCHEMA CELOR DOUĂ LOCURI GEOMETRICE

1.1. Construcții geometrice 15
1.2. De la exemplu la schemă 16
1.3. Exemple 17
1.4. Să ne imaginăm că problema a fost deja rezolvată 19
1.5. Schema figurilor asemenea 22
1.6. Exemple 23
1.7. Schema figurilor auxiliare 27
Exemple și comentarii la Capitolul 1, 1.1—1.51
[1.7. *Notații.* 1.15. *Trei faruri.* 1.42. *O fisură.* 1.44. *O revenire.* 1.45. *Trei posturi de reperare acustică.* 1.47. *Schema celor trei locuri geometrice.* 1.49. *În legătură cu construcțiile geometrice.* 1.50. *Alte probleme* 1.51. *Mulțimi.*]

CAPITOLUL 2. SCHEMA CARTEZIANĂ

2.1. Descartes și ideea unei metode universale 36
2.2. O problemă măruntă 37
2.3. Punerea în ecuație 41

2.4. Exemple didactice 4
2.5. Exemple din geometrie. 4
2.6. Un exemplu din fizică 5
2.7. Un exemplu din categoria „amuzamentelor" 5
2.8. Alte exemple „amuzante" 5

Exemple și comentarii la capitolul 2, 2.1—2.78 (*Partea întîi*, 2.1—2.16; *Partea a doua*, 2.17—2.78)

[2.10. *Un analog al teoremei lui Heron.* 2.11. *Un alt analog al teoremei lui Pitagora.* 2.12. *Încă un analog al teoremei lui Pitagora.* 2.13. *Un alt analog al teoremei lui Heron.* 2.17. *Miscellanea.* 2.28. *O problemă din Egiptul antic.* 2.32. *Geometrie plană.* 2.33. *Newton — despre punerea în ecuație, în cazul problemelor de geometrie.* 2.46. *Geometrie în spațiu.* 2.54. *O inegalitate.* 2.55. *Sferometrul.* 2.56. *Graficul timp-deplasare.* 2.64. *Atîtea ecuații — cîte necunoscute.* 2.65. *Mai multe ecuații decît necunoscute.* 2.72. *Regulile lui Descartes.* 2.73. *Degajați problema.* 2.74. *Cunoștințe relevante. Mobilizarea și organizarea lor.* 2.75. *Independență și compatibilitate.* 2.76. *Soluție unică. O anticipare.* 2.77. *De ce — probleme școlărești?* 2.78. *Alte probleme.*]

CAPITOLUL 3. RECURENȚA

3.1. Povestea unei mici descoperiri 78
3.2. Din senin 81
3.3. Trebuie, totuși să-l aplicăm noi înșine 83
3.4. Recurența 85
3.5. Abracadabra 87
3.6. Triunghiul lui Pascal 90
3.7. Inducția matematică 92
3.8. Descoperiri în perspectivă 95
3.9. Observăm, generalizăm, demonstrăm și redemonstrăm 96

Exemple și comentarii la Capitolul 3, 3.1—3.92 (*Partea întîi*, 3.1—3.21; *Partea a doua*, 3.22—3.30; *Partea a treia*, 3.31—3.55; *Partea a patra*, 3.56—3.92)

[3.2. *Un caz particular echivalent cu cazul general.* 3.21. *Două forme de inducție matematică.* 3.44. *Coeficienții trinomiali.* 3.51. *Triunghiul armonic al lui Leibniz.* 3.52. *Pascal și Leibniz.* 3.56. *Serii de puteri.* 3.61. *Teorema binomului pentru exponenți fracționari și negativi.* 3.65. *Extindem domeniul.* 3.70. *Metoda coeficienților nedeterminați.* 3.75. *Inversa unei serii de puteri.* 3.81. *Ecuații diferențiale.* 3.91. *În legătură cu numărul π.* 3.92. *Alte probleme.*]

CAPITOLUL 4. SUPERPOZIȚIA

4.1. Interpolarea 122
4.2. O situație specială 125
4.3. Combinăm cazuri particulare, pentru a rezolva cazul general 126
4.4. Schema 127

Exemple și comentarii la Capitolul 4, 4.1—4.36 (*Partea întîi*, 4.1—4.16; *Partea a doua*, 4.17—4.36)

[4.11. *Combinația liniară sau superpoziția.* 4.12. *Ecuații diferențiale liniare, omogene, cu coeficienți constanți.* 4.14. *Ecuații cu diferențe finite, liniare omogene, cu coeficienți constanți.* 4.16. *Superpoziție de mișcări.* 4.17. *Multitudinea căilor de acces.* 4.18. *Care este necunoscuta?* 4.20. *Iată o problemă înrudită cu a noastră și rezolvată anterior.* 4.22. *Alte cunoștințe.* 4.24. *Formula prismoidului.* 4.30. *Nici un lanț nu este mai solid decît veriga lui cea mai slabă.* 4.32. *Regula lui Simpson.* 4.36. *Extindem sfera de aplicabilitate.*]

PARTEA A DOUA — SPRE O METODĂ GENERALĂ

CAPITOLUL 5. PROBLEME

5.1. Ce este o problemă? 141
5.2. Clasificarea problemelor 142
5.3. Probleme de aflat 143
5.4. Probleme de demonstrat 145
5.5. Componentele necunoscutei, clauzele condiției 146
5.6. Ceea ce căutăm este un procedeu 147

Exemple și comentarii la Capitolul 5, 5.1—5.19

[5.8. *De demonstrat sau de aflat?* 5.9. *Alte probleme.* 5.10. *Procedeul de rezolvare poate consta dintr-o succesiune nelimitată de operații.* 5.11. *Cvadratura cercului.* 5.12. *Succesiune și consecință.* 5.13. *O ambiguitate regretabilă.* 5.14. *Datele și necunoscuta, ipoteza și concluzia.* 5.15. *Să numărăm datele.*]

CAPITOLUL 6. EXTINDEM DOMENIUL

6.1. Domeniu mai larg pentru schema carteziană 155
6.2. Domeniu mai larg pentru schema celor două locuri geometrice 159
6.3. Clauza cu care începem 165
6.4. Domeniul mai larg pentru schema recurenței 169
6.5. „Cucerirea" progresivă a necunoscutei 173

Exemple și comentarii la Capitolul 6, 6.1—6.25

[6.1. *O condiție cu multe clauze.* 6.9. *Să păstrăm numai o parte a condiției.* 6.10. *Firul Ariadnei.* 6.18. *Alte probleme.*

6.19. *Un obiectiv intermediar.* 6.20. *Reprezentare grafică.* 6.21. *Cîteva tipuri de probleme nematematice.* 6.25. *O clasificare mai rafinată.*]

CAPITOLUL 7. REPREZENTAREA GEOMETRICĂ A EVOLUȚIEI PROCESULUI DE REZOLVARE

7.1. Metafore 181
7.2. În ce constă problema? 183
7.3. Iată o ideel 185
7.4. Dezvoltăm ideea. 186
7.5. Să mergem pînă la capăt 188
7.6. Un film în ralanti 189
7.7. O anticipare 191
7.8. Planuri și programe 192
7.9. Probleme în interiorul problemelor 192
7.10. Nașterea ideii 193
7.11. Activitatea gîndirii 193
7.12. Disciplina gîndirii 194

Exemple și comentarii la Capitolul 7, 7.1—7.5
[7.1. *Un alt mod de abordare.* 7.3. *Căutarea unei demonstrații.* 7.4. *Diagrame elementare.* 7.5. *Alte probleme.*]

CAPITOLUL 8. PLANURI ȘI PROGRAME

8.1. O schemă pentru elaborarea unui plan 204
8.2. O schemă mai generală 206
8.3. Un program 207
8.4. Alegerea între mai multe planuri 208
8.5. Planuri și programe 210
8.6. Scheme și planuri 211

Exemple și comentarii la Capitolul 8, 8.1—8.8
[8.1. *Descendent sau ascendent? Regresiv sau progresiv? Analiză sau sinteză?* 8.2. *Înțeleptul începe cu sfîrșitul.* 8.4. *O alegere între trei planuri.* 8.5. *O alegere între două planuri.* 8.6. *Și acesta este un plan ...* 8.8. *Nu vă angajați prea mult.*]

CAPITOLUL 9. PROBLEME IN INTERIORUL PROBLEMELOR

9.1. Probleme auxiliare: mijloc de a atinge un scop 220
9.2. Probleme echivalente: reducerea bilaterală 221
9.3. Lanțuri de probleme echivalente 222
9.4. Probleme auxiliare mai ambițioase, sau mai puțin ambițioase: reducerea unilaterală 223

.5. Probleme auxiliare mai îndepărtate 225
.6. Ajutor material, ajutor metodologic, influenţă stimulantă, călăuză, practică (exerciţiu) 226

Exemple şi comentarii la Capitolul 9, 9.1—9.15
[9.1. *Surse „sigure" de probleme auxiliare?* 9.2. *Respice finem.* 9.3. *Suprimarea, sau adăugarea, unei clauze.* 9.4. *Lărgirea, sau îngustarea condiţiei.* 9.5. *Examinarea unei teoreme mai puternice, sau a unei teoreme mai puţin puternice.* 9.11. *Căutarea unui contraexemplu.* 9.12. *Particularizarea şi generalizarea.* 9.13. *Analogia.* 9.14. *Şi dacă nu reuşim?* 9.15. *Alte probleme.*]

CAPITOLUL 10. NAŞTEREA IDEII

10.1. Şi dintr-o dată — lumină 240
10.2. Exemplu. 241
10.3. În general, despre natura ideii revelatoare 245
10.4. Ideile — o chestiune de şansă 247

Exemple şi comentarii la Capitolul 10, 10.1—10.2
[10.1. *Spontaneitatea ideilor. Un citat şi un comentariu.* 10.2. *Două experienţe.*]

CAPITOLUL 11. ACTIVITATEA GÎNDIRII

11.1. Cum gîndim 249
11.2. Ce înseamnă „a avea o problemă" 249
11.3. Relevanţă 250
11.4. Proximitate 250
11.5. Previziune 251
11.6. Domeniul de căutare 252
11.7. Decizii 253
11.8. Mobilizare şi organizare 253
11.9. Recunoaştere şi reamintire 255
11.10. Suplimentare şi regrupare 255
11.11. Izolare şi combinare 256
11.12. O diagramă 257
11.13. Partea sugerează întregul. 260

Exemple şi comentarii la Capitolul 11, 11.1—11.11
[11.1. *Experienţa dumneavoastră, propria dumneavoastră judecată.* 11.2. *Mobilizare.* 11.3. *Previziune.* 11.4. *Părţi mai multe sugerează întregul mai intens.* 11.5. *Recunoaştere.* 11.6. *Regrupare.* 11.7. *Efort din interior, efort din exterior.* 11.8. *Euristica şoarecelui în labirint.* 11.9. *Progres.* 11.10. *A, şi dumneata la fel ...* 11.11. *Şoareci şi oameni.*]

CAPITOLUL 12. DISCIPLINA GÎNDIRII

12.1. Cum ar trebui să gîndim 26
12.2. Să ne precizăm scopul 26
12.3. Să evaluăm perspectivele 26
12.4. Ce urmărim — o cale de acces 26
12.5. Ce urmărim — un aspect mai promiţător 27
12.6. Ce urmărim — cunoştinţe relevante 27
12.7. Ce urmărim — o reevaluare a perspectivelor 27
12.8. Arta de a pune întrebări 27

Exemple şi comentarii la Capitolul 12, 12.1—12.11
[12.1. *Reformularea problemei.* 12.2. *Exprimarea problemei în limbaj matematic.* 12.3. *Un bagaj de cunoştinţe bine „asortat" şi bine organizat.* 12.4. *Din ce date aţi putea deduce acest tip de necunoscută?* 12.5. *Din ce ipoteză aţi putea deduce această concluzie?* 12.6. *O analogie: triunghiul şi tetraedrul.* 12.10. *Atenţia şi acţiunea.* 12.11. *Gîndire productivă, gîndire creatoare.*]

CAPITOLUL 13. REGULI DE „FĂCUT" DESCOPERIRI?

13.1. Reguli şi reguli. 280
13.2. Raţionalitate 281
13.3. Economie, dar nu limitare predeterminată 282
13.4. Perseverenţă, dar diversitate 283
13.5. Reguli de preferinţă 284
13.6. Elemente inerente problemei 285
13.7. Cunoştinţe disponibile 286
13.8. Probleme auxiliare 288
13.9. Rezumat. 288

Exemple şi comentarii la Capitolul 13, 13.1—13.3
[13.1. *Geniul, expertul şi începătorul.* 13.2. *Despre prune şi planuri.* 13.3. *Stilul de lucru.*]

CAPITOLUL 14. SĂ ÎNVĂŢĂM NOI, SĂ-I ÎNVĂŢĂM PE ALŢII ŞI SĂ ÎNVĂŢĂM CUM SĂ-I ÎNVĂŢĂM PE ALŢII

14.1. Predarea nu este o ştiinţă. 291
14.2. Scopul predării 292
14.3. Predarea este o artă 293
14.4. Trei principii ale învăţării. 295
14.5. Trei principii ale predării 297
14.6. Exemple 300

4.7. Metodica predării, sau : să învățăm cum să-i învățăm pe alții 306
4.8. Atitudinea profesorului 310

Exemple și comentarii la Capitolul 14, 14.1—14.28
(*Partea întîi*, 14.1—14.4 ; *Partea a doua*, 14.5—14.28)
[14.5. *De ce „rezolvarea problemelor" — obiect de studiu?* 14.6. *Rezolvarea problemelor și elaborarea teoriilor.* 14.7. *Rezolvarea problemelor și cultura generală.* 14.8. *Limbajul figurilor.* 14.9. *Numere raționale și numere iraționale.* 14.10. *Raționamentul riguros.* 14.11. *O hartă poate fi oare perfectă?* 14.12. *Ce anume trebuie să-i învățăm pe elevi?* 14.13. *Principiul genetic.* 14.14. *Omagiu fățarnic.* 14.15. *Confuzia de niveluri.* 14.16. *Isadora Duncan.* 14.17. *Niveluri de cunoaștere.* 14.18. *Repetare și contrast.* 14.19. *Ajutor intern, ajutor extern.* 14.21. *Cît e de grea?* 14.22. *Dificultate și valoare educativă.* 14.23. *Cîteva tipuri de probleme.* 14.26. *O lucrare scrisă de încheiere a cursului de „sfîrșit de an".* 14.27. *Despre comunicările la sesiunile de matematică. Regulile lui Zermelo.* 14.28. *Epilog.*]

CAPITOLUL 15. CONJECTURA ȘI METODA ȘTIINȚIFICĂ

15.1. Probleme de cercetare la nivelul clasei 342
15.2. Exemplu 342
15.3. Discuție 344
15.4. Un alt exemplu 345
15.5. Reprezentarea grafică a evoluției unui raționament inductiv 346
15.6. Un exemplu istoric 348
15.7. Metodă științifică : „ghicește și verifică" 356
15.8. Cîteva trăsături de dorit ale „problemelor de cercetare" 357
15.9. Concluzie 358

Exemple și comentarii la Capitolul 15, 15.1—15.55
(*Partea întîi* 15.1—15.20 ; *Partea a doua*, 15.21—15.40 ; *Partea a treia*, 15.41—15.55)
[15.23. *Principiul rațiunii non-suficiente.* 15.24. *Măgarul lui Buridan.* 15.39. *Principiul rațiunii non-suficiente în fizică. Sau — natura ar trebui să fie predictibilă.* 15.40. *Problema celor n puncte alese pe o suprafață sferică.* 15.41. *Alte probleme.* 15.44. *Fracții zecimale periodice.* 15.48. *Numere trapezoidale.* 15.55. *Fapt și conjectură.*]

ANEXE

ANEXA I 375
REZOLVĂRI ȘI SOLUȚII 380
ANEXA II 459
BIBLIOGRAFIE 485
INDICE 489

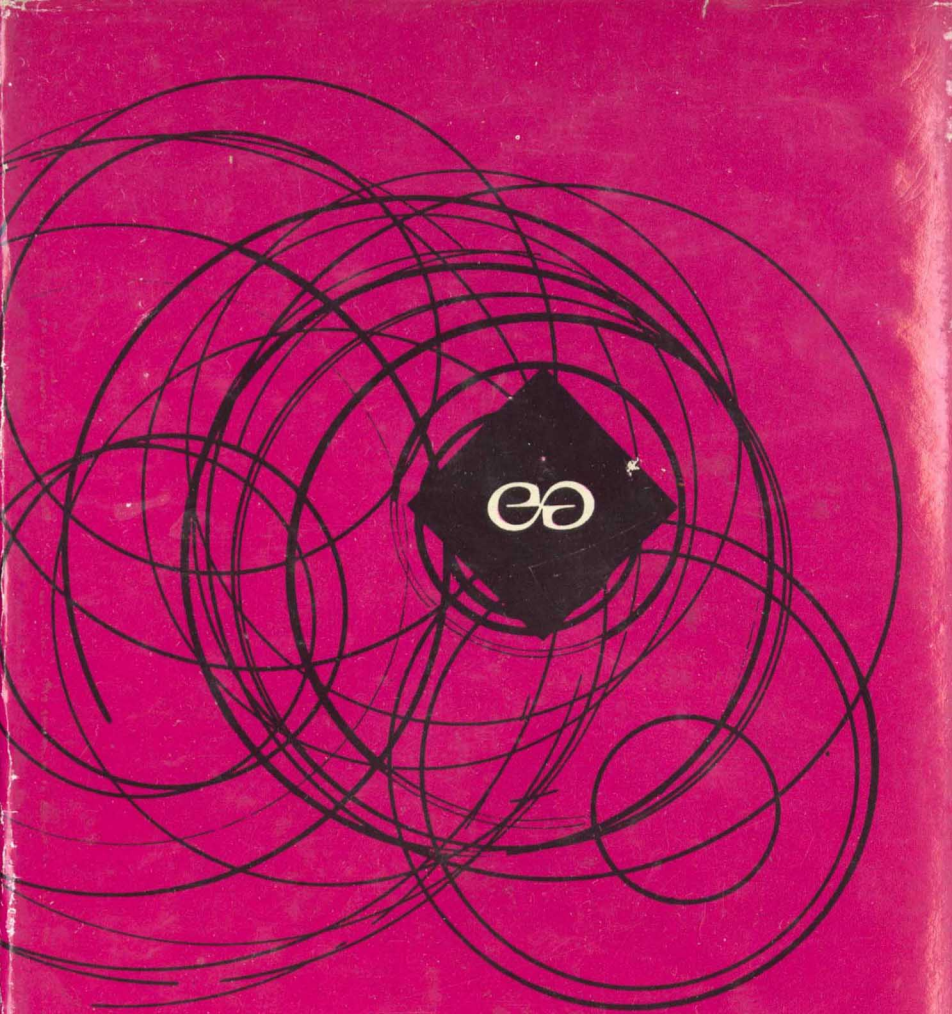
REDACTOR: MARIA BORICEAN
TEHNOREDACTOR: IOANA DRAGOMIRESCU

Coli de tipar: 31,50.
Indici pentru clasificarea zecimală:
biblioteci mari: 51, biblioteci mici: 51.

Întreprinderea Poligrafică Cluj
Str. Brassai 5—7.
Republica Socialistă România. Comandă nr. 440.

Lei 18,50

Lei 18,50



Editura Științifică